5. Dvojný a trojný integrál

Nebudem tu definovať integrál spojitej funkcie $f\colon G \subset R^n \to R$, len pripomeniem, že

1. V prípade, že $f \geq 0$ a G je obdĺžnik $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ je integrál objem kolmého telesa, ktorého podstava je G a hornú stenu tvorí graf funkcie f a integrál sa počíta postupným integrovaním:

$$\iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\Big]\,\mathrm{d}\,x\,.$$

Pritom poradie integrovania sa môže vymeniť.

Príklad. Vypočítajte $\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, ak

1. $G = \langle 3,4\rangle \times \langle 1,2\rangle = \{(x,y)\colon\ 3 \leq x \leq 4\,,\ \ 1 \leq y \leq 2\}$, $f(x,y) = x^2 + 2y$.

$$\int_G (x^2+2y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_3^4\int_1^2 (x^2+2y)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x = \int_3^4 [x^2y+y^2]_1^2\,\mathrm{d}\,x = \int_3^4 (x^2+4-1)\,\mathrm{d}\,x =$$

$$\Big[\frac{x^3}{3}+3x\Big]_3^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{3^3}{3} + 3 = \frac{46}{3}\,.$$

2. G je oblasť ohraničená priamkami $x = 2$, $y = x$ a hyperbolou $y = \frac{1}{x}$ a $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y^2}$.

V tomto prípade G nie je obdĺžnik, ale dá sa popísať nerovnosťami:
$1 \leq x \leq 2$, $\frac{1}{x} \leq y \leq x$ (nakreslite)

$$\int_g \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_1^2\int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x = \int_1^2 \Big[\frac{-x^2}{y}\Big]_{y=\frac{1}{x}}^{y=x} = \int_1^2 (-x+x^3)\,\mathrm{d}\,x = \Big[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\Big]_1^2 = \frac{9}{4}\,.$$

Podobne sa počítajú aj trojné integrály

3. $\iiint_G f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$, $G = \langle 1,3\rangle \times \langle 0,2\rangle \times \langle 2,5\rangle$, $f(x,y,z) = x^2y^2z$

$G\colon 1 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 2$, $2 \leq z \leq 5$

$$\int_1^3\int_0^2\int_2^5 x^2y^2z\,\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x = \int_1^3\int_0^2 : x^2y^2\Big[\frac{z^2}{2}\Big]_2^5\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x = \frac{21}{2}\int_1^3 x^2\Big[\frac{y^3}{3}\Big]_0^2\,\mathrm{d}\,x = \frac{21}{2}\frac{8}{3}\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_1^3 = 28\Big[9-\frac{1}{3}\Big] = \frac{728}{3}$$

4. G je oblasť (ihlan) ohraničená rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x+y+z-1 = 0$, $f(x,y,z) = \dfrac{1}{(x+y+z+1)^3}$.

G popíšeme nerovnosťami: Keď $y = z = 0$, tak x je medzi $x = 0$ a $x = 1$; Keď si také x vyberieme, v rovine $z = 0$ je y medzi $y = 0$, $y = 1-x$, napokon, keď je už zvolené x aj y, tak z je medzi $z = 0$ a $z = 1-x-y$, teda

$G\colon 0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1-x$, $0 \leq z \leq 1-x-y$ a integrál sa počíta postupne:

$$\int_0^1\Big\{\int_0^{1-x}\Big[\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(x+y+z+1)^3}\,\mathrm{d}\,z\Big]\,\mathrm{d}\,y\Big\}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1\Big\{\int_0^{1-x}\Big[\frac{(x+y+z+1)^{-2}}{-2}\Big]_{z=0}^{z=1-x-y}\,\mathrm{d}\,y\Big\}\,\mathrm{d}\,x =$$

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\frac{1}{2}\Big\{\frac{1}{(x+y+1)^2} - \frac{1}{4}\Big\}\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 \frac{1}{2}\Big[\frac{-1}{(x+y+1)} - \frac{1}{4}y\Big]_{y=0}^{y=1-x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int_0^1\Big\{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\Big\}\,\mathrm{d}\,x =$$

$$\frac{1}{2}\Big[\ln 2 - \frac{3}{4} + \frac{1}{8}\Big] = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}\,.$$

Dvojné a trojné integrály sa počítajú pomocou substitúcie najčastejšie, ak riešime úlohu so stredovou alebo osovou symetriou. Pripomeniem najprv substitúciu do určitého integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$. Ak je interval $\langle a,b\rangle$ obrazom intervalu $\langle \alpha,\beta\rangle$ rastúcou alebo klesajúcou funkciou $\varphi\colon \langle\alpha,\beta\rangle \to \langle a,b\rangle$, tak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}\,t\ \ (\mathrm{d}\,x = |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}\,t).$$

V prípade $n = 2$ a $n = 3$ sa „nekonečne malý" obsah $\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$ (objem $\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$) nahradzuje absolútnou hodnotou determinantu, ktorého riadky sú gradienty jednotlivých zložiek zobrazenia $\Phi\colon M \subset R^n \to R^n$ ($n = 2, 3$), ktorého obraz je oblasť G (musí mať ešte ďalšie vlastnosti). Nebudem vysvetlovať príslušnú teóriu, len uvediem najčastejšie používané substitúcie.

Polárne súradnice.

Bod $[x, y]$ v rovine je určený vzdialenosťou $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ od počiatku a uhlom $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y &= r\ \mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\varphi \end{aligned}$$

V R^3 sa na osovo symetrické úlohy používajú valcové súradnice, stredovo symetrické sférické súradnice:

Valcové $r \in \langle 0, \infty)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $u \in R$

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= u \\ \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z &= r\ \mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,u \end{aligned}$$

Sférické $\rho \in \langle 0, \infty)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $\vartheta \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\vartheta\cos\varphi \\ y &= \rho\cos\vartheta\sin\varphi \\ z &= \rho\sin\vartheta \\ \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z &= (\rho^2\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\vartheta\,\mathrm{d}\,\varphi \end{aligned}$$

Príklady:

1. $\iint_M e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, $M = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 \le 4$. V sférických súradniciach $M\colon 0 \le r \le 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

$$\iint\limits_M e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^2 e^{-r^2} r\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\varphi = 2\pi\Big[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big]_0^2 = \pi\Big(1 - \frac{1}{e^4}\Big).$$

2. $\iint_G \dfrac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, $G\colon x^2 + y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

$$\iint\limits_G \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^1 \frac{1 - r^2}{1 + r^2} r\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\varphi = \left|\begin{array}{c} t = 1 + r^2 \\ \mathrm{d}\,t = 2r\,\mathrm{d}\,r \\ r^2 = t - 1 \end{array}\right| = \frac{\pi}{2}\int\limits_1^2 \frac{2 - t}{t}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\pi}{4}(2\ln 2 - 1).$$

3. $\iint_G (1 - 2x - 3y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, $G = \{(x, y) \in R^2\colon x^2 + y^2 \le 1\}$ $[\pi]$

4. $\iiint_G z\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$, $G\colon 0 \le x \le 2$, $0 \le y \le \sqrt{2x - x^2}$, $0 \le z \le 2$
$y \le \sqrt{2x - x^2} \implies y^2 \le 2x - x^2 \implies x^2 + y^2 \le 2x \implies (x-1)^2 + y^2 \le 1$. Použijeme valcové súradnice:
$x^2 + y^2 \le 2x$ je vo valc. súr. $r^2 \le 2r\cos\varphi \implies 0 \le r \le 2\cos\varphi$,
$(x-1)^2 + y^2 \le 1 \implies -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, ale navyše $y \ge 0 \implies 0 \le \varphi$

$$\iiint_G z\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z = \int\limits_0^2\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{2\cos\varphi} (ur)r\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,u = \int\limits_0^2\int\limits_0^{\pi/2} u\Big[\frac{r^3}{3}\Big]_0^{2\cos\varphi}\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,u =$$
$$\int\limits_0^2\int\limits_0^{\pi/2} u\frac{8}{3}\cos^3\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,u = \frac{8}{3}\int\limits_0^2 u\int\limits_0^{\pi/2}(1 - \sin^2\varphi)\cos\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,u = \frac{32}{9}.$$

5. $\iiint_G (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$: $G\colon x^2 + y^2 + z^2 \le 4$, $z \ge 0$ (použite sférické súradnice). $[\frac{128}{15}\pi]$

6. $\iiint_G \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$, $G\colon 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$, $z \ge 0$. $[\frac{15}{2}\pi]$

6. Krivkové a plošné integrály.

Krivku v rovine alebo priestore budeme chápať ako trajektóriu pohybu hmotného bodu. Krivka sa nazýva jednoduchá, ak hmotný bod prechádza každým jej bodom okrem počiatočného a koncového len raz. Ak sa počiatočný bod rovná koncovému, hovoríme, že krivka je uzavretá.

Krivky určujeme parametricky:

v R^2: $K = \{[x(t), y(t)] : t \in \langle a, b\rangle\}$ — parametrizácia krivky K,

v R^3: $K = \{[x(t), y(t), z(t)] : t \in \langle a, b\rangle\}$

Predpokladáme, že krivka je hladká, t.j. $[x'(t), y'(t)] \neq [0, 0]$ ($[x'(t), y'(t), z'(t)] \neq [0, 0, 0]$) pre $\forall t \in (a, b)$, čo znamená, že v každom bode okrem krajných má krivka dotyčnicu.

Výpočet dĺžky hladkej krivky $K \subset R^2$:

Predpokladajme, že $K = [x(t), [y(t)]$, $t \in \langle a, b\rangle$, je hladká krivka a označme $l(t)$ dĺžku oblúka krivky K od bodu $[x(a), [y(a)]$ po bod $[x(t), [y(t)]$. Nech $t_0 \in (a, b)$ a $t \in (t_0, b)$. Ak $t - t_0$ je dostatočne malé, tak dĺžka oblúka krivky K od bodu $[x(t_0), y(t_0)]$ po bod $[x(t), y(t)]$ sa rovná dĺžke vektora $[x(t), y(t)] - [x(t_0), y(t_0)]$:

$$l(t) - l(t_0) = \sqrt{(x(t) - x(t_0))^2 + (y(t) - y(t_0))^2} \implies \frac{l(t) - l(t_0)}{t - t_o} = \sqrt{\left(\tfrac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}\right)^2 + \left(\tfrac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}\right)^2}$$

Teda

$$l'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{l(t) - l(t_0)}{t - t_0} = \sqrt{|x'(t_0)|^2 + |y'(t_0)|^2} \implies l(t_0) = \int_a^{t_0} \sqrt{|x'(t_0)|^2 + |y'(t_0)|^2}\, \mathrm{d}\, t$$

Keď dosadíme za t_0 bod b dostaneme dlžku celej krivky:

Ak $[x(t), y(t)]$, $t \in \langle a, b\rangle$ je jednoduchá hladká krivka, tak jej dĺžka

$$\ell(K) = \int_a^b \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2}\, \mathrm{d}\, t$$

V R^3:

$$\ell(K) = \int_a^b \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2 + |z'(t)|^2}\, \mathrm{d}\, t$$

Definícia. Nech $M \subset R^3$ a $K \subset M$ je hladká krivka s parametrizáciou $[x(t), y(t), z(t)]$, $t \in \langle a, b\rangle$. Nech $f : M \to R$ je spojitá funkcia. Číslo

$$\int_K f(x, y, z)\, \mathrm{d}\, s = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2 + |z'(t)|^2}\, \mathrm{d}\, t$$

sa nazýva *krivkový integrál* (*prvého druhu*) funkcie f pozdĺž krivky K.

Analogicky sa definuje aj krivkový integrál pozdĺž rovinnej krivky

$$\int_K f(x, y)\, \mathrm{d}\, s = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2}\, \mathrm{d}\, t$$

Príklad. Vypočítajte krivkové integrály

1. $\int_K x^2\, \mathrm{d}\, s$, kde $K = \{(x, \ln x) : x \in \langle 1, 2\rangle$:

$$\int_K x^2\, \mathrm{d}\, s = \int_1^2 x^2\sqrt{1 + \left(\tfrac{1}{x}\right)^2}\, \mathrm{d}\, x = \int_1^2 x^2\sqrt{\tfrac{x^2+1}{x^2}}\, \mathrm{d}\, x = \int_1^2 x\sqrt{x^2 + 1}\, \mathrm{d}\, x = \left| \begin{smallmatrix} 1+x^2=t \\ 2x\, \mathrm{d}\, x = \mathrm{d}\, t \end{smallmatrix} \right| \tfrac{1}{2}\int_2^5 \sqrt{t}\, \mathrm{d}\, t = \tfrac{1}{3}\left[t^{(3/2)}\right]_2^5$$

2. $\int_K xy\, \mathrm{d}\, s$, K je časť elipsy $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ ($x(t) = 2\cos t$, $y(t) = 3\sin t$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$). [38/5]

3. $\int_K y^2\, \mathrm{d}\, s$, K je oblúk cykloidy $[t - \sin t, 1 - \cos t]$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. [256/15]

4. $\int_K \dfrac{z^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,s$, $K=[\cos t, \sin t, 2t]$, $t\in\langle 0,2\pi\rangle$. $[\sqrt{2}(8/3)\pi^3]$

Plocha S v R^3 je množina $S\subset R^3$, ktorá sa dá parametricky vyjadriť ako obor hodnôt spojitej funkcie z $M\subset R^2$ do R^3. Tu sa budeme zaoberať len prípadom, keď množina M je súvislá, uzavretá a ohraničená, všetky tri zložky funkcie $\mathbf{r}\colon M\to R^3$ majú spojité parciálne derivácie podľa oboch premenných a $\mathbf{r}$ je injektívna:

$$S\colon \mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)=(r_1(u,v),r_2(u,v),r_3(u,v))\,,\ (u,v)\in M\,,\qquad \text{polohový vektor bodu na } S$$

Pripomeňme si, že plošný obsah rovnobežníka dvoch vektorov $\mathbf{x},\mathbf{y}$ je $\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|$. Podobne ako vzorec pre dĺžku krivky sa dá odvodiť vzorec na výpočet obsahu $\sigma(S)$ plochy S:

$$\sigma(S)=\iint\limits_M \left\|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right\|\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v=\iint\limits_M \left\|\Big(\frac{\partial r_1}{\partial u},\frac{\partial r_2}{\partial u},\frac{\partial r_3}{\partial u}\Big)\times\Big(\frac{\partial r_1}{\partial v},\frac{\partial r_2}{\partial v},\frac{\partial r_3}{\partial v}\Big)\right\|\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v\,.$$

Príklad. Nájdite povrch gule s polomerom ρ.
Pomocou sférických súradníc má guľová plocha parametrizáciu:

$$S\colon \mathbf{r}(\varphi,\vartheta)=(\rho\cos\vartheta\cos\varphi,\rho\cos\vartheta\sin\varphi,\rho\sin\vartheta)\,,\quad 0\le\varphi\le 2\pi\,,\ -\frac{\pi}{2}\le\vartheta\le\frac{\pi}{2}\,.$$

Takže povrch gule je

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left\|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\vartheta}\right\|\mathrm{d}\,\vartheta\,\mathrm{d}\,\varphi=$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\|(-\rho\cos\vartheta\sin\varphi,\rho\cos\vartheta\cos\varphi,0)\times(-\rho\sin\vartheta\cos\varphi,-\rho\sin\vartheta\sin\varphi,\rho\cos\vartheta)\|\,\mathrm{d}\,\vartheta\,\mathrm{d}\,\varphi=$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\|(\rho^2\cos^2\theta\cos\varphi,\rho^2\cos^2\theta\sin\varphi,\rho^2\cos\vartheta\sin\vartheta)\|=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\rho^2\cos\vartheta\,\mathrm{d}\,\vartheta\,\mathrm{d}\,\varphi=4\pi\rho^2\,.$$

Plocha môže mať aj iné parametrizácie, plošný obsah je ale stále to isté číslo. Pomocou parametrizácie sme definovali krivkový integrál, dá sa ukázať, že od výberu parametrizácie nezávisí. Teraz tak definujeme plošný integrál (prvého) druhu.

Definícia. Ak S je plocha určená parametrizáciou $\mathbf{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v)z(u,v))$, $u,v\in M$, a $f\colon S\to R$ je spojitá funkcia, tak

$$\int\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,S=\iint\limits_M f\big(x(u,v),y(u,v)z(u,v)\big)\left\|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right\|\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v$$

sa nazýva (plošný) integrál funkcie f cez plochu S.

Príklad. Vypočítajte $\int_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,S$, ak
1. $f(x,y,z)=2x+\frac{4}{3}y+z$, S je časť roviny $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z=1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$. $[\,4\sqrt{61}]$
2. $f(x,y,z)=x^2+y^2$, S je guľová plocha $x^2+y^2+z^2=1$. $[\frac{8}{3}\pi]$
3. $f(x,y,z)=\sqrt{4-x^2-y^2}$, S je plocha určená rovnicou $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$. $[\,\pi r^3]$
4. $f(x,y,z)=1$, S je časť paraboloidu $z=2-(x^2+y^2)$ nad rovinou xy. $[\frac{13}{3}\pi]$
5. $f(x,y,z)=x^2+y^2$, S je plocha z príkladu 4. $[\frac{149}{30}\pi]$
6. Vypočítajte povrch časti paraboloidu $x^2+y^2=4z$ medzi rovinami $z=1$ a $z=3$. $[\frac{16}{3}\pi(4-\sqrt{2})]$

7. Skalárne a vektorové polia.

Definition. *Skalárnym poľom* sa nazýva dvojica (Ω, U), kde $\Omega \subset R^3$ je súvislá množina a U je skalárna funkcia $U\colon \Omega \to R$, ktorá má v Ω spojité parciálne derivácie podľ všetkých premenných.

Vektorovým poľom sa nazýva dvojica $(\Omega, \mathbf{F})$, $\Omega \subset R^3$, kde je súvislá množina a $\mathbf{F}\colon \Omega \to R^3$ je vektorová funkcia, ktorej zložky majú v oblasti Ω spojité parciálne derivácie podľ všetkých premenných.

Práca v silovom poli. Nech je $(\Omega, \mathbf{F}(X))$ silové pole a $K \subset \Omega$ je regulárna krivka s parametrizáciou $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in \langle a, \rangle b$. Krivka K je orientovaná súhlasne s parametrizáciou, t.j. počiatočný bod krivky je $X(a)$. Označme $A(t)$ prácu, ktorú vykoná sila $\mathbf{F}$ pri pohybe po krivke K od bodu $X(a)$ po bod $X(t)$. Podobne ako pri odvodzovaní vzorca na výpočet dĺžky krivky sa dá ukázať, že derivácia $A'(t) = \mathbf{F}(X(t)) \cdot X'(t)$ (skalárny súčin vektora $\mathbf{F}(X(t)$ a smerového vektora dotyčnice ku krivke K v bode $X(t)$). Potom sa práca vektorového poľa $\mathbf{F}$ pri pohybe po celej krivke K (od $X(a)$ po $X(b)$) rovná

$$A = \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) \,\mathrm{d}\, t\,.$$

To vysvetľuje význam nasledujúcej definície.

Definícia. Nech $(\Omega, \mathbf{F})$ je vektorové pole, $K \subset \Omega$ je regulárna krivka orientovaná súhlasne s parametrizáciou $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in \langle a, \rangle b$, $\mathbf{F}(x, y, z) = \big(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\big) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Potom

$$\int_K \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = \int_K P(x, y, z) \,\mathrm{d}\, x + Q(x, y, z) \,\mathrm{d}\, y + R(x, y, z) \,\mathrm{d}\, z = \int_a^b \mathbf{F}\big(X(t)\big) \cdot X'(t) \,\mathrm{d}\, t$$

sa nazýva krivkový integrál (2. druhu) vektorovej funkcie $\mathbf{F}$ pozdĺž krivky K.

Ak je K orientovaná nesúhlasne s parametrizáciou, tak

$$\int_K \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = -\int_a^b \mathbf{F}\big(X(t)\big) \cdot X'(t) \,\mathrm{d}\, t$$

Príklad. Vypočítajte krivkové integrély (2. druhu)

1. $\int_K [\sin y \,\mathrm{d}\, x + (x - \cos y) \,\mathrm{d}\, y]$, kde K je obvod trojuholníka tvoreného priamkami $y = \frac{1}{2}\pi x$, $y = \frac{1}{2}\pi$, $x = 0$ oreintovaný proti smeru hodinových ručičiek (t.j. kladne). $[\frac{1}{4}\pi + \frac{2}{\pi} - 1]$
2. $\int_K [(xy^2 - y) \,\mathrm{d}\, x + (x + y^2) \,\mathrm{d}\, y]$, K je kladne orientovaný obvod trojuholníka s vrcholmi $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$. $[0]$
3. $\int_K [xy \,\mathrm{d}\, x + x \,\mathrm{d}\, y]$, K je krivka, ktorá sa skladá z paraboly $y = x^2$ od bodu $(0, 0)$ po bod $(1, 1)$ a $y = \sqrt{x}$ od $(1, 1)$ po $(0, 0)$. $[\frac{11}{60}]$
4. $\int_K [x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}) \,\mathrm{d}\,\vec{r}$, K je orientovaná úsečka so začiatočným bodom $A = [1, 1, 1]$ a koncovým bodom $B = [5, 1, 4]$. $[27]$
5. $\int_K [x \,\mathrm{d}\, x + y \,\mathrm{d}\, y + z \,\mathrm{d}\, z]$, K je kružnica $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = 3$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ orientovaná súhlasne s parametrizáciou. $[0]$
6. $\int_K [(y - z) \,\mathrm{d}\, x + (z - x) \,\mathrm{d}\, y + (x - y) \,\mathrm{d}\, z$, K je oblúk skrutkovnice $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. $[4\pi]$

8. „derivácie" vektorového poľa — divergencia, rotácia.

Teraz nech $(\Omega, \mathbf{F})$ je pole rýchlosti prúdenia častice kvapaliny v oblasti Ω. Predpokladáme, že pole je stacionárne, t.j. nezávislé od času. Nech (x, y, z) je stred obdĺžnika $S \subset \Omega$ obsahu $\sigma(S)$, ktorý je taký malý, že v ňom môžeme $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ považovať za konštantný a nech $\vec{n}$ je normálový vektor obdĺžnika S, $\|\vec{n}\} = 1$. Potom za jednotku času cez S prejde $(\mathbf{F}(x, y, z) \cdot \vec{n})\sigma(S)$ kvapaliny.

Množstvo kvapaliny na jednotku objemu, ktorá pretečie cez bod $X = (x, y, z) \in \Omega$ (kladné ak z neho vytečie, záporné ak vtečie) vypočítame tak, že bod X umiestnime do stredu kvádra so stenami rovnobežnými so súradnicovými rovinami a hranami dĺžky $2\Delta x$, $2\Delta y$, $2\Delta z$, také malé, že na stenách kvádra je rýchlosť $\mathbf{F}$ konštantná. Objem tohoto kvádra je $8\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$. Takže tok na jednotku objemu cez tento kváder je

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\Delta x\Delta y\Delta z}\Big\{ & 4\Delta y\Delta z\big[\vec{i} \cdot \mathbf{F}(x + \Delta x, y, z) - \vec{i} \cdot \mathbf{F}(x - \Delta x, y, z)\big] + \\ & 4\Delta x\Delta z\big[\vec{j} \cdot \mathbf{F}(x, y + \Delta y, z) - \vec{j} \cdot \mathbf{F}(x, y - \Delta y, z)\big] + \\ & 4\Delta x\Delta y\big[\vec{k} \cdot \mathbf{F}(x, y, z + \Delta) - \vec{j} \cdot \mathbf{F}(x, y, z - \Delta z)\big]\Big\}\,. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Tok cez bod $X = (x, y, z)$ dostaneme ako limitu keď $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$. Je to teda „derivácia podľa objemu" toku vektorového poľa. Ak označíme ΔV objem malého telesa obsahujúceho bod (x,y,z), dostaneme limitným prechodom číslo, ktoreé sa nazýva divergencia funkcie $\mathbf{F}$ v bode (x, y, z):

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\text{tok smerom von z } \Delta V}{\Delta V}\,.$$

Vzorec na výpočet $\operatorname{div}\mathbf{F}(x, y, z)$ dostaneme počítaním limity z výrazu $(*)$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}} \Big\{ & \vec{i}\cdot\frac{\mathbf{F}(x+\Delta x,y,z)-\mathbf{F}(x-\Delta x,y,z}{\Delta x} + \\
& \vec{j}\cdot\frac{\mathbf{F}(x,y+\Delta y,z)-\mathbf{F}(x,y-\Delta y,z}{\Delta y} \\
& +\vec{k}\cdot\frac{\mathbf{F}(x,y,z+\Delta z)-\mathbf{F}(x,y,z-\Delta z}{\Delta z}\Big\} \\
= & \lim_{\Delta x\to 0}\vec{i}\cdot\frac{\mathbf{F}(x+\Delta x,y,z)-\mathbf{F}(x,y,z)+\mathbf{F}(x,y,z)-\mathbf{F}(x-\Delta x,y,z)}{2\Delta x} + \\
& \lim_{\Delta y\to 0}\vec{j}\cdot\frac{\mathbf{F}(x,y+\Delta y,z)-\mathbf{F}(x,y,z)+\mathbf{F}(x,y,z)-\mathbf{F}(x,y-\Delta y,z)}{2\Delta y} + \\
& \lim_{\Delta z\to 0}\vec{k}\cdot\frac{\mathbf{F}(x,y,z+\Delta z)-\mathbf{F}(x,y,z)+\mathbf{F}(x,y,z)-\mathbf{F}(x,y,z-\Delta z)}{2\Delta z}
\end{aligned}$$

Teraz si uvedomíme, že $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ a dostaneme:

$$\begin{aligned}
&\vec{i}\cdot\frac{\mathbf{F}(x+\Delta x,y,z)-\mathbf{F}(x,y,z)+\mathbf{F}(x,y,z)-\mathbf{F}(x-\Delta x,y,z)}{2\Delta x} = \\
&\qquad \frac{1}{2}\Big[\vec{i}\cdot\frac{\mathbf{F}(x+\Delta x,y,z)-\mathbf{F}(x,y,z)}{\Delta x} + \vec{i}\cdot\frac{\mathbf{F}(x-\Delta x,y,z)-\mathbf{F}(x,y,z)}{\Delta x}\Big] = \\
&\qquad\qquad \frac{1}{2}\Big[\frac{P(x+\Delta x,y,z)-P(x,y,z)}{\Delta x} + \frac{P(x,y,z)-P(x-\Delta x,y,z)}{\Delta x}\Big]\,.
\end{aligned}$$

Podobný výraz dostaneme aj v druhej a tretej zložke a po prechode k limite dostaneme definíciu:

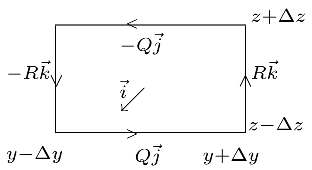
Definícia. Nech $(\Omega, \mathbf{F})$, $\mathbf{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, je vektorové pole. *Divergencia vektorového poľa* $(\Omega, \mathbf{F})$ je skalárne pole $(\Omega, \operatorname{div}\mathbf{F})$, kde

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} = \nabla\cdot\mathbf{F}(x,y,z)\,.$$

Príklad.

1. Vypočítajte $\operatorname{div}\mathbf{F}$ pre
   a. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x^2y\vec{i} + z\vec{j} + x^2\vec{k}$ $[6xy]$ b. $\mathbf{F} = (3x + y)\vec{i} + (2z + x)\vec{j} + (z - 2y)\vec{k}$ $[4]$
2. Ak $\mathbf{F} = \big(2xy^2 + z^2\,,\ 3x^2z^2 - y^2z^3\,,\ yz^2 - xz^3\big)$, vypočítajte $\operatorname{div}\mathbf{F}$ v bode $(-1, 2, 3)$. $[-61]$

Pohyby sa dajú rozložiť na priamočiare a rotačné. *Rotácia* vektorového poľa $(\Omega, \mathbf{F})$ v bode $(x, y, z) \in \Omega$ vyjadruje „množstvo" a smer rotačných pohybov v danom bode. Skôr, než napíšeme formálny vzorec, určíme „množstvo" rotácie v bode $X = (x, y, z)$ poľa $\mathbf{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{Q}$ okolo osi rovnobežnej s vektorom $\vec{i}$ (t.j. osou x). Bod X „obkolesíme" obdĺžnikom kolmým na vektor $\vec{i}$ a počítame tok po obvode tohoto obdĺžnika proti smeru hodinových ručičiek:



$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\Delta y\Delta z}[2\Delta y Q(x,y^*,z-\Delta z) + 2\Delta z R(x,y+\Delta y,z^*) \\
&\qquad -2\Delta y Q(x,\tilde{y},z+\Delta z) - 2\Delta y R(x,y-\Delta y,\tilde{z})]\,, \\
&\quad y^*,\tilde{y} \in\langle y-\Delta y, y+\Delta y\rangle\,,\ z^*,\tilde{z}\in\langle z-\Delta z, z+\Delta z\rangle
\end{aligned}$$

Tento výraz upravíme apočítame limitu:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta z\to 0}\frac{-1}{2\Delta z}[Q(x,\tilde{y},z+\Delta z) - Q(x,y^*,z-\Delta z)] + \lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{2\Delta y}[R(x,y+\Delta y,z^*) - R(x,y-\Delta y,\tilde{z})] \\
&\qquad = \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z}
\end{aligned}$$

Poslednú rovnosť dostaneme podobným trikom ako pri odvodzovaní vzorca pre divergenciu.

Podobne určíme aj zložky rotačného pohybu okolo osí rovnobežných s vektormi $\vec{j}$ a $\vec{k}$.

Definícia. Nech $(\Omega, \mathbf{F})$, $\mathbf{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, je vektorové pole. *Rotácia vektorového poľa* $(\Omega, \mathbf{F})$ je vektorové pole $(\Omega, \operatorname{rot} \mathbf{F})$, kde

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(x,y,z) = \Big(\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z}\Big)\vec{i} + \Big(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} - \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x}\Big)\vec{j} + \Big(\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}\Big)\vec{k}\,.$$

Definície gradientu skalárneho poľa U a divergencie a rotácie veltorového poľa $\mathbf{F}$ sa stručne píšu pomocou operátora ∇:

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} U &= \nabla U\,,\\
\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\,,\\
\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y,z) & Q(x,y,z) & R(x,y,z) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Rotácia sa niekedy označuje aj $\operatorname{curl} \mathbf{F}$.

Príklad.
1. Pre $f(x,y,z) = x^2y^2z^3$ vypočítajte $\nabla^2 f$ (t.j. $\nabla \cdot \nabla f$). $[2y^2z^3 + 2x^2z^3 + 6x^2y^2z]$
2. Pre skalárne pole $(\Omega, U(x,y,z))$ napíšte vzorec na výpočet $\nabla^2 U$ (Laplaceov operátor).
3. $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2y\vec{i} + xy^2z\vec{j} - yz^2\vec{k}$, vypočítajte
   a. $\operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{F}$, $[2y(1+z)\vec{i} + 2(x+xz-z)\vec{j} + 2y(x-1)\vec{k}]$
   b. $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{F}$, $[2yz\vec{i} + 2(x-z)\vec{j} + 2yx\vec{k}]$
4. Nech f má v oblasti Ω spojité všetky parciálne derivácie druhého rádu. Vypočítajte $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)$.

9. Plošný integrál 2. druhu.

Teraz definujeme integrál vektorovej funkcie cez hladkú orientovateľnú plochu, t.j. plochu, ktorá má dve strany A, B (formálne to nebudem definovať, v konkrétnych prípadoch plôch, na ktorých budeme integrovať to bude zrejmé) teda o normálovom vektore ku tejto ploche vieme rozhodnúť, či smeruje zo A do B alebo naopak.

Nech $(\Omega, \mathbf{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k})$ je vektorové pole a $S \subset \Omega$ je plocha s parametrickými rovnicami polohového vektora bodu na ploche S: $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v)z(u,v))$, $u, v \in A \subset R^2$, Integrál (2. druhu) funkcie $\mathbf{F}$ cez plochu S je

$$\iint\limits_S \mathbf{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\,S = \pm \iint\limits_A \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial x}{u} & \frac{\partial y}{u} & \frac{\partial z}{u} \\ \frac{\partial x}{v} & \frac{\partial y}{v} & \frac{\partial z}{v} \end{vmatrix} \mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v\,.$$

Pričom $+$ píšeme, ak je plocha orientovaná súhlasne s parametrizáciou, t.j. rovnako ako vektor $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$. V prípade uzavretých plôch sa za kladnú orientáciu považuje orientácia normálového vektora

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{u} & \frac{\partial y}{u} & \frac{\partial z}{u} \\ \frac{\partial x}{v} & \frac{\partial y}{v} & \frac{\partial z}{v} \end{vmatrix}$$

zvnútra plochy von.

Teraz bez dôkazu uvedieme vety, ktoré vyjadrujú súvislosť medzi integrálom pozdĺž uzavretej rovinnej krivky a dvojným integrálom cez vnútro tej krivky, resp. medzi integrálom cez uzavretú plochu a trojným integrálom cez vnútro tej plochy.

Greenova veta. *Nech $K \subset \Omega$ je jednoduchá uzavretá po častiach hladká krivka orientovaná proti smeru hodinových ručičiek a $(\Omega, \mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j})$ je vektorové pole a nech A je vnútro krivky K. Potom*

$$\int\limits_K \big(P(x,y)\,\mathrm{d}\,x + Q(x,y)\,\mathrm{d}\,y\big) = \iint\limits_A \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

Gaussova veta. *Nech $S \subset \Omega$ je jednoduchá uzavretá po častiach hladká kladne orientovaná plocha a $(\Omega, \mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j}) + R(x,y,z)\vec{k}$ je vektorové pole a nech A je vnútro krivky K. Potom*

$$= \iint\limits_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\, S = \iiint\limits_A \operatorname{div} \mathbf{F} \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y \,\mathrm{d}\, z\,.$$

Príklad. Pomocou Greenovej (Gaussovej vety) vypočítajte krivkové (plošné integrély
1. $\int_K [\sin y \,\mathrm{d}\, x + (x - \cos y)\,\mathrm{d}\, y]$, kde K je obvod trojuholníka tvoreného priamkami $y = \frac{1}{2}\pi x$, $y = \frac{1}{2}\pi$, $x = 0$ oreintovaný proti smeru hodinových ručičiek (t.j. kladne). $[\frac{1}{4}\pi + \frac{2}{\pi} - 1]$
2. $\int_K [(xy^2 - y)\,\mathrm{d}\, x + (x + y^2)\,\mathrm{d}\, y]$, K je kladne orientovaný obvod trojuholníka s vrcholmi $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$. $[0]$
3. $\int_K [xy \,\mathrm{d}\, x + x \,\mathrm{d}\, y]$, K je krivka, ktorá sa skladá z paraboly $y = x^2$ od bodu $(0,0)$ po bod $(1,1)$ a $y = \sqrt{x}$ od $(1,1)$ po $(0,0)$. $[\frac{11}{60}]$
4. $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\, S$, $\mathbf{F} = (4xz, -y^2, yz)$,
   S je povrch kocky ohraničenej rovinami $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$. $[\frac{3}{2}]$
5. $\iint_S [xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}] \cdot \mathrm{d}\, S$, S je plocha $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z > 0$. $[16\pi]$
6. $\iint_S (4x\vec{i} - 2y^2\vec{j} + z^2\vec{k}) \cdot \mathrm{d}\, S$, S povrch valca $x^2 + y^2 = 4$, $0 \le z \le 3$. $[84\pi]$
7. $\iint_S \big((xy + y^2)\vec{i} + x^2 y\vec{j}\big) \cdot \mathrm{d}\, S$, S povrch telesa $x^2 + y^2 = 4$, $0 \le z \le 3$, $x \ge 0$, $y \ge 0$. $[8 + 3\pi]$

Nasledujúca veta je analógiou Greenovej vety pre priestorové uzavreté krivky.

Stokesova veta. *Nech $(\Omega, \mathbf{F})$ je vektorové pole a nech uzavretá regulárna krivka K je okrajom regulárnej plochy S a pri pohybe po krivke K v smere jej orientácie je plocha S naľavo od K. Potom*

$$\int\limits_K \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\, \vec{r} = \iint\limits_S (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\, S\,.$$

Definícia. Nech $(\Omega, \mathbf{F})$ je vektorové pole. Ak pre všetky dvojice regulárnych kriviek $K_1, K_2 \subset \Omega$ so spoločnými počiatočnými aj koncovými bodmi platí

$$\int\limits_{K_1} \mathbf{F} \,\mathrm{d}\, \vec{r} = \int\limits_{K_2} \mathbf{F} \,\mathrm{d}\, \vec{r},$$

tak hovoríme, že integrál $\iint_K \mathbf{F} \,\mathrm{d}\, \vec{r}$ v oblasti Ω nezávisí od integračnej cesty.

Veta. *Ak $\int_K \mathbf{F} \,\mathrm{d}\, \vec{r}$ v oblasti Ω nezávisí od integračnej cesty, tak pre každú uzavretú po častiach regulárnu krivku K platí*

$$\int\limits_K \mathbf{F} \,\mathrm{d}\, \vec{r} = 0$$

Zo Stokesovej vety vyplýva nasledujúca podmienka nezávislosti integrálu od cesty:

Veta. *Integrál $\iint_K \mathbf{F} \,\mathrm{d}\, \vec{r}$ v oblasti Ω nezávisí od integračnej cesty, ak platí*

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0 \iff \exists\, f\colon \Omega \to R \text{ také, že } \mathbf{F} = \nabla f\,.$$

Vetu nebudeme dokazovať, poznamenajme len, že $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$ sa dá overiť jednoduchým priamym výpočtom.

Označenie. Ak integrál $\int_K \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\, \vec{r}$ nezávisí od cesty a $K \subset \Omega$ má počiatočný bod $\mathbf{a}$ a koncový bod $\mathbf{b}$, tak píšeme

$$\int\limits_K \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\, \vec{r} = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\, \vec{r}.$$

Aj v rovinnej oblasti Ω platí, že krivkový integrál $\int_K \mathbf{F}(x,y) \,\mathrm{d}\, \vec{r}$ nezávisí od integračnej cesty, ak $\mathbf{F}(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y)$. Ukážte, že je to dôsledok Greenovej vety.