Funkcionálna analýza 1

doc. Michal Zajac

1. Euklidovský lineárny priestor.

Definícia. Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in C^n$. Potom sa
a) $\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2}$ nazýva euklidovská metrika (vzdialenosť vektorov $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$)
a) $\|\mathbf{x}\| = \mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$ nazýva euklidovská norma vektora $\mathbf{x}$.

Poznámka. Pre $n = 1, 2, 3$ je to obvyklá vzdialenosť dvoch bodov (dĺžka vektora).

Príklad. Vypočítajte $\|x\|, \|y\|, \mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, ak
a) $\mathbf{x} = (1, 0, 2, 2), \mathbf{y} = (1, 1, -1, 1) \in R^4$
b) $\mathbf{x} = (1 + i, -i, 0, 2), (2i, 1, 1 + i, 0) \in C^4$

Dá sa ukázať, že $\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ aj $\|\mathbf{x}\|$ má obvyklé vlastnosti vzdialenosti dvoch bodov a dĺžky vektora:

$$\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathrm{d}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \geq 0 \qquad \|x\| \geq 0$$
$$\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y} \qquad \|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = 0$$
$$\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathrm{d}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \qquad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad \text{trojuholníková nerovnosť}$$
$$\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\| \quad \forall \text{ číslo } \alpha$$

Pripomeňme, že v R^n a C^n sú definované operácie sčítania a násobenia n-tiec číslom

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \oplus (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \quad \alpha \odot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

avšak, ak v C^n a pre $n \geq 2$ ani v R^n nemáme usporiadanie. R^n, C^n s operáciami $\oplus$, $\odot$ sú a s normou $\|\mathbf{x}\|$ sú príklady lineárnych normovaných priestorov (viacej o nich bude v predmete FA2).

2. Limita a spojitosť funkcií $R^n \to R^m$ ($C^n \to C^m$).

Definícia. Nech $\mathbf{a} \in R^n$, $\varepsilon > 0$. Množina
a) $O_\varepsilon(a) = \{\mathbf{x} \in R^n \colon \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \varepsilon\}$ sa nazýva epsilonové okolie bodu $\mathbf{a}$.
a) $O^\circ_\varepsilon(a) = \{\mathbf{x} \in R^n \colon 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \varepsilon\}$ sa nazýva prstencové epsilonové okolie bodu $\mathbf{a}$.

Príklad. Nakreslite v rovine okolie $O_{\frac{1}{2}}(\mathbf{a})$ a $O^\circ_{\frac{1}{2}}(\mathbf{a})$ pre
a) $\mathbf{a} = (0, 0)$ b)$\mathbf{a} = (1, -1)$ c) $\mathbf{a} = (2, 0)$

Pomocou pojmu okolie definujeme (podobne ako pre funkcie $R \to R$:

Definícia. Nech $M \subset R^n$, $\mathbf{a} \in R^n$, $f \colon M \to R^m$.
a) Bod $\mathbf{a}$ je vnútorný bod množiny M, ak $\exists \delta > 0$, pre ktoré je $O_\delta(\mathbf{a}) \subset M$
b) $\mathbf{a}$ je hromadný bod množiny M, ak $\forall \delta > 0$ platí $O^\circ_\delta(\mathbf{a}) \cap M \neq \emptyset$.
c) Ak je $\mathbf{a}$ hromadný bod množiny M, tak $\mathbf{b} \in R^m$ je limita funkcie f v bode $\mathbf{a}$ ($\mathbf{b} = \lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$), ak $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ také, že $\mathbf{x} \in O^\circ_\delta(a) \cap M \implies f(\mathbf{x}) \in O_\varepsilon(\mathbf{b})$.
d) Funkcia f je spojitá v bode $\mathbf{a} \in M$, ak $\forall\ varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ také, že $x \in O^\circ_\delta(a) \cap M \implies f(\mathbf{x}) \in O_\varepsilon(f(\mathbf{a}))$. V hromadnom bode je to ekvivalentné s rovnosťou $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.

Príklad. Určte definičný obor $D(f)$ funkcie $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, nakreslite ho rozhodnite, či je bod $\mathbf{a}$ hromadný bod alebo vnútorný bod $D(f)$, ak
a) $\mathbf{a} = (3, 0)$ b) $\mathbf{a} = (0, 0)$ c) $\mathbf{a} = (3, 3)$
d) Nájdite v R^2 bod, ktorý je vnútorný ale nie je hromadný bod množiny $D(f)$

a) hrom. nie vnútoný, b) aj hromadný aj vnútorný, c) ani hromadný ani vnútorný, d) taký neexistuje, každý vn. bod je aj hromadný.

Veta. *Nech* $\mathbf{a} \in A \subset M \subset R^n$. *Ak je funkcia* $f \colon M \to R^m$ *spojitá v bode* $\mathbf{a}$, *tak je aj jej zúženie na množinu* A *spojité v bode* $\mathbf{a}$.

Príklad. Ukážte, že funkcia $f\colon R^2 \to R$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pre } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ nie je spojitá v bode $(0,0)$

návod: $(0,0)$ je hromadný bod R^2, ak by bola f spojitá v $\mathbf{a}$, tak by $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} = f(0,0) = 0$, to by muselo platiť aj pore zúženie na priamku $p\colon y = kx$. Ale $\lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}$.

Na spojitosť ale nestačí spojitosť na všetkých priamkach prechádzajúcich daným bodom:
Funkcia $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ pre $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$ nie je spojitá v bode $(0,0)$, hoci jej zúženie na ktorúkoľvek priamku prechádzajúcu bodom $(0,0)$ je spojité v bode $(0,0)$ (lebo na celej parabole $y = x^2$ je $f(x,y) = \frac{1}{2}$)

3. Parciálne derivácie a lokálne extrémy.

Funkcia $f\colon A \subset R^n \to R^m$ určuje m funkcií $f\colon R^n \to R$. Píšeme
$f(x_1,x_2,\dots,x_n) = (f_1(x_1,x_2,\dots,x_n), f_2(x_1,x_2,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,x_2,\dots,x_n))$. Pritom platí f je spojitá v bode $\mathbf{a} \in A$ vtedy a len vtedy, ak je každá zložka $f_k\colon A \to R$, $k = 1,2,\dots,m$, spojitá v bode $\mathbf{a}$. Pre $m = 3$ to vyplýva z nerovností:

$$|y_k| \le \|(y_1,y_2,y_3)\| = \sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}\,, \quad k = 1,2,3$$

a z implikácie

$$|y_k| < \varepsilon \text{ pre } \forall k = 1,2,3 \implies \|y\| = \sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2} < \sqrt{3\varepsilon^2} = \varepsilon\sqrt{3}\,.$$

Namiesto skúmania vlastností funkcií $f\colon A \to R^m$ teda v mnohých prípadoch bude stačiť skúmať funkcie $f_k\colon A \to R$ (zložky funkcie f). Obmedzíme sa teda na funkcie s hodnotami v R. O nich má zmysel aj otázka, v ktorom bode nadobúdaju (lokálne) extrémy. Definícia lokálneho maxima a minima je rovnaká ako pre funkcie 1 premennej $D(f) \subset R$ a vynecháme ju. Na zisťovanie extrémov je dôležitý pojem:

Definícia. Nech $M \subset R^n$, $\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_n)$ je vnútorný bod množiny M. Nech $i \in \{1,2,\dots,n\}$. Ak existuje vlastná limita

$$\lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1,\dots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\dots,a_n) - f(a_1,a_2,\dots,a_i,\dots,a_n)}{x_i - a_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}(\mathbf{a})$$

Potom sa toto číslo nazýva **parciálna derivácia** funkcie f v bode $\mathbf{a}$ podľa premennej x_i.

Teda funkciu f zúžime na priamku prechádzajúcu bodom $\mathbf{a}$ rovnobežnú s osou x_i a deriváciu tohoto zúženia v bode a_i nazveme parciálna derivácia funkcie f v bode $\mathbf{a}$. Je zrejmá, že ak má funkcia f v bode $\mathbf{a}$ lokálne maximum, tak ho tam má aj zúženie na každú priamku prechádzajúcu cez bod $\mathbf{a}$. Dostávame:

Veta (nutná podmienka lokálneho extrému). *Nech* $\mathbf{a} \in M \subset R^n$, $f\colon M \to R$, $i \in \{1,\dots,n\}$. *Ak má funkcia* f *v bode* $\mathbf{a}$ *lokálne maximum alebo minimum a* $\exists\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}(\mathbf{a})$, *tak* $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0$.

1

Definícia. Nech $A \subset R^n$, $f\colon A \to R$ má na celej množine A spojité parciálne derivácie podľa každej premennej. Potom sa vektorová funkcia

$$f : A \to R^n\,, \qquad f(x_1,x_2,\dots,x_n) = \Big(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}(\mathbf{x}),\dots,\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n}(\mathbf{x})\Big)$$

nazýva gradient funkcie f a označuje $\operatorname{grad} f(\mathbf{x})$ alebo $\nabla f(\mathbf{x})$.

Bod $\mathbf{a} \in M$ sa nazýva stacionárny bod funkcie f, ak $\nabla f(\mathbf{a}) = (0,0,\dots,0)$

Namiesto priamky rovnobežnej s niektorou súradnicovou osou môžeme v predchádzajúcich úvahách použiť hocictorú priamku prech. bodom $\mathbf{a}$ (teda určenú bodom $\mathbf{a}$ a smerovým vektorom $\mathbf{e}$.

Definícia. Nech $M \subset R^n$, $\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_n)$ je vnútorný bod množiny M a nech $\mathbf{e} = (e_1,e_2,\dots,e_n)$ je vektor dĺžky 1 ($\|\mathbf{e}\| = 1$). Ak existuje vlastná limita

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{e}) - f(\mathbf{a})}{t} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(\mathbf{a})$$

Potom sa toto číslo nazýva derivácia funkcie f v bode $\mathbf{a}$ podľa smeru vektora $\mathbf{e}$.

Zrejme je, že aj smerová derivácia v bode, v ktorom funkcia nadobúda lokálny extrém musí byť nulová. Teraz sa obmedzíme na $n = 2$, ale ľahko bude vidieť, že podobne by sme dostali aj všeobecný prípad $n \in N$. Teda máme $M \subset R^2$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ je vektor dĺžky $\|\mathbf{e}\| = 1$. Ak má funkcia v bode $\mathbf{a}$ lokálny extrém, tak $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$ a funkcia $\varphi(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{e})$ má lokálny extrém v bode $t = 0$. Ak má táto funkcia aj druhú deriváciu, tak sa podľa jej hodnoty v $t = 0$ dá rozhodnúť, či je to maximum alebo minimum.

Budeme potrebovať aj pojem parciálnej derivácie druhého rádu. Ak $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ existuje na celej množine M, tak definuje funkciu (dvoch premenných), jej parciáne derivácie (ak existujú) sa nazývajú parciálne derivácie funkcie f druhého rádu. Budeme teraz predpokladať, že funkcia f má na množine M spojité všetky parciálne derivácie druhého rádu. Potom platí:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2), \text{ teda môžeme stručnejšie písať:}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}).$$

Vrátime sa teraz k výpočtu $\varphi''(0)$. Najprv počítajme všeobecnejšie derivácie zloženej funkcie $g(t) = f(u(t), v(t))$ v bode $t_0 \in R$, kde u, v sú diferencovateľné funkcie (jednej premennej):
Označme $u(t) = u, v(t) = v$, $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$

$$g'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(u(t), v(t)) - f(u_0, v_0)}{t - t_0}$$

Čitateľ zlomku vyjadríme ako súčet:

$$\begin{aligned} f(u(t), v(t)) - f(u_0, v_0) &= [f(u(t), v(t)) - f(u_0, v) + f(u_0, v) - f(u_0, v_0)] \\ &= \frac{f(u(t), v(t)) - f(u_0, v)}{u - u_0}(u - u_0) + \frac{f(u_0, v) - f(u_0, v_0)}{v - v_0}(v - v_0) \end{aligned}$$

a vrátime sa k výpočtu $\varphi'(t_0)$:

$$\varphi'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(u(t), v(t)) - f(u_0, v)}{u - u_0}\frac{u - u_0}{t - t_0} + \frac{f(u_0, v) - f(u_0, v_0)}{v - v_0}\frac{v - v_0}{t - t_0}$$

Ak sú funkcie u, v diferencovateľné, tak sú aj spojité, teda $\lim_{t \to t_0} u(t) = u_0$, $\lim_{t \to t_0} v(t) = v_0$. Z vety o limite zloženej funkcie pre funkcie jednej premennej dostávame.

$$\begin{aligned} \varphi'(t_0) = \lim_{u \to u_0} \frac{f(u(t), v(t)) - f(u_0, v)}{u - u_0} \lim_{t \to t_0} \frac{u - u_0}{t - t_0} + \lim_{v \to v_0} \frac{f(u_0, v) - f(u_0, v_0)}{v - v_0} \lim_{t \to t_0} \frac{v - v_0}{t - t_0} = \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(u_0, v_0)u'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(u_0, v_0)v'(t_0). \end{aligned}$$

V našom prípade je $u(t) = a_1 + te_1$, $v(t) = a_2 + te_2$, $u'(t_0) = e_1$, $v'(t_0) = e_2$, teda

$$\varphi'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(u_0, v_0)e_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(u_0, v_0)e_2.$$

Ak za t_0 dosadíme $t_0 = 0$ dostaneme $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}$ (skalárny súčin). Ak dosadíme lubovoľné t dostaneme vyjadrenie funkcie $\varphi'(t)$:

$$\varphi'(t) = e_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a} + t\mathbf{e}) + e_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a} + t\mathbf{e}).$$

Zopakujeme ten istý trik pre túto funkciu a dostaneme:

$$\varphi''(0) = e_1\left(\nabla \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}\right) + e_2\left(\nabla \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a})e_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a})e_1 e_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{a})a_2^2.$$

To nás priviedlo k definícii druhého diferenciálu funkcie f v bode $\mathbf{a}$ (sformulujeme ho už pre lubovoľné $n \in N$:

Definícia. Nech $\mathbf{a} \in M \subset R^n$ a nech má funkcia $f\colon M \to R$ v nejakom okolí bodu $\mathbf{a}$ spojité všetky parciálne dcerivácie druhého rádu. Potom sa funkcia

$$\mathrm{d}^2 f_{\mathbf{a}}\colon R^n \to R^n\,, \qquad \mathrm{d}^2 f_{\mathbf{a}}(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) e_i e_j$$

nazýva druhý diferenciál funkcie f v bode $\mathbf{a}$

Pre jednotkové vektory $\mathbf{e}$ je hodnota druhého diferenciálu druhou deriváciou funkcie $\varphi(t)$ v bode nula. Preto, ak by existovali dva vektory $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$, pre ktoré

$$\mathrm{d}^2 f_{\mathbf{a}}(\mathbf{e}) < 0 < \mathrm{d}^2 f_{\mathbf{a}}(\mathbf{f})$$

tak by funkcia f nadobúdala v bode $\mathbf{a}$ maximum v smere vektora $\mathbf{e}$ ale minimum v smere vektora $\mathbf{f}$, teda v takom bode by lokálny extrém nebol. Ak by sme pre všetky smery $\mathbf{e}$ dostali kladnú (zápornú) hodnotu $\mathrm{d}^2 f_{\mathbf{a}}(\mathbf{e}) > 0$ ($\mathrm{d}^2 f_{\mathbf{a}}(\mathbf{e}) < 0$), tak by v bode $\mathbf{a}$ mala funkcia f ostré lokálne minimum (maximum).

Druhý difernециál v bode $\mathbf{a}$ je funkcia určená maticou

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

Matica $A = (a_{ij})$ je symetrická, t.j. $a_{ij} = a_{ji}$, teda $A^\top = A$. V maticovom zápise sa druhý diferenciál v bode $\mathbf{a}$ dá napísať:

$$\mathrm{d}^2 f_{\mathbf{a}}(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \mathbf{e}^\top A \mathbf{e}\,.$$

Takéto funkcie sa nazývajú kvadratické formy a existuje o nich ucelená teória, ktoré sa považuje za súčasť lineárnej algebry.

Definícia. Nech $A \in R^{n\times n}$ je symetrická matica. Matica A sa nazýva kladne (záporne) definitná, ak pre $\forall\, \mathbf{e} \in R^{n\times 1}$, $\mathbf{e} \neq 0$ platí

$$\mathbf{e}^\top A \mathbf{e} > 0 \qquad \left(\mathbf{e}^\top A \mathbf{e} < 0\right)$$

A je indefinitná ak $\exists \mathbf{e}, \mathbf{f} \in R^{n\times 1}$ také, že:

$$\mathbf{e}^\top A \mathbf{e} < 0 < \mathbf{f}^\top A \mathbf{f}\,.$$

Sylvestrovo kritérium. *Nech $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ je symetrická matica. Označme $d_k = \det(a_{ij})_{1\le i,j\le k}$.*
1) Ak $d_k > 0$ pre $\forall\, k = 1, 2, \ldots, n$, tak je A kladne definitná.
2) Ak $(-1)^k d_k > 0$ pre $\forall\, k = 1, 2, \ldots, n$, tak je A záporne definitná.
3) Ak $d_k \neq 0$ pre $\forall\, k = 1, 2, \ldots, n$, ale neplatí ani 1) ani 2), tak je matica A indefinitná.

Pre $n = 2$ platí navyše:
4) Ak je $d_2 < 0$, tak je matica A indefinitná (nemusí byť $d_1 \neq 0$).

Cvičenia. Určte definičný obor a lokálne extrémy funkcií
1. $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$,
2. $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$,
3. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y + zy - z$,
4. $f(x, y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$,
5. $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$,
6. $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy - x - y + 2$,
7. $f(x, y) = xy(2 - x - y)$,
8. $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2)$,
9. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z + x$,
10. $f(x, y, z) = 6x^2 + 5y^2 + 145z^2 + 4xy - 8xz + 2yz + 1$.

4. Viazané a globálne extrémy.

Definition. Podmnožina $M \subset R^n$ sa nazýva uzavretá, ak obsahuje všetky svoje hromadné body.

Poznamenajme, že M je uzavretá, ak všetky body $\mathbf{x} \notin M$ sú vnútornými bodmi množiny $R^n \setminus M$.

Veta. *Nech $M \subset R^n$ je uzavretá množina a $f\colon M \to R$ je spojitá funkcia. Potom f nadobúda na množine M maximum aj minimum, t.j. $\exists \mathbf{a}, \mathbf{b} \in M$ také, že:*

$$\mathbf{x} \in M \implies f(\mathbf{a}) \le f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{b}) \ \ t.j. \qquad \min_{\mathbf{x}\in M} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})\,, \quad \max_{\mathbf{x}\in M} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{b})\,.$$

Príklad. Nájdite globálne extrémy funkcie $f(x,y) = x+y$ na množine $M = \{(x,y) \in R^2 \colon x^2+y^2-1 \le 0\}$.

Riešenie: Vieme, že $\exists \mathbf{a} \in M$, pre ktoré $f(\mathbf{a}) = \min_{\mathbf{x}\in M} f(\mathbf{x})$. Ak je $\mathbf{a}$ vnútorný bod množiny M, tak je stacionárnym bodom. Zistíme teda všetky stacionárne body funkcie f a stacionárne body zúženia funkcie f na hranicu M, t.j. kružnicu $x^2+y^2=1$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 = \frac{\partial f}{\partial y} \implies \text{funkcia } f \text{ nemá stac. body.}$$

Teda a musí byť bodom kružnice. Určíme, v ktorých bodoch na kružnici by mohla mať funkcia extrém.

a. Kružnicu $x^2+y^2=1$ môžeme parametricky určiť rovnicou:

$$(x,y) = (\cos\varphi, \sin\varphi)\,, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle\,.$$

Potom sa funkcia f v bodoch kružnice dá napísať ako funkcia jednej premennej

$$g(\varphi) = f(\cos\varphi, \sin\varphi) = \cos\varphi + \sin\varphi \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\,.$$

g môže mať lokálny extrém v stacionárnych bodoch ($g'(\varphi)=0$) alebo na hranici intervalu.

$$g'(\varphi) = -\sin\varphi + \cos\varphi = 0 \implies \sin\varphi = \cos\varphi \implies \varphi \in \left\{\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right\},$$

Na určenie najväčšej a najmenšej hodnoty stačí vypočítať:

$$g(0) = 1\,, \quad g(\pi/4) = \cos(\pi/4) + \sin(\pi/4) = 2\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,, \quad g(5\pi/4) = -2\frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$
$$\implies \max_M f(\mathbf{x}) = f\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \sqrt{2}\,, \quad \min_M f(\mathbf{x}) = f\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = -\sqrt{2}\,.$$

b. Lokálne extrémy na hranici môžeme hľadať ja metódou Lagrangeových multiplikátorov: Vytvoríme funkciu $L(x,y) = f(x,y) + \lambda(x^2+y^2-1)$, ktorá sa na hranici množiny M, t.j. na kružnici $x^2+y^2=1$, zhoduje s funkciou f Nájdeme stacionárne body tejto funkcie (závisia od λ) a také číslo λ, pre ktoré tie stacionárne body ležia na kružnici $x^+y^2-1=0$. Hovoríme tomu, že nájdeme viazané extrémy funkcie f s väzbou $h(x,y) = x^2+y^2-1=0$

Metóda lagrangeových multiplikátorov má nasledovné úskalie:

Ak má Lagrangeova funkcia $L(x,y)$ lokálny extrém, tak taký istý extrém má aj funkcia f, lebo je zúžením funkcie L na na množinu K určenej väzbou. Môže sa ale stať, že funkcia $f|K$ extrém má, ale rozšírená funkcia L nemá v tomto bode extrém, prípadne ani stacionárny bod (derivácie funkcie L podľa smerov ,,rovnobežných s množinou K sú síce nulové, ale v iných smeroch nie sú nulové. Ukážte si to na nasledujúcom príklade:

Príklad. Metódou Lagrangeových multiplikátorov nájdite $\max\limits_K xy$ na priamke $x+y=1$

Tento príklad ľahko vyriešime aj bez diferenciálneho počtu: $f\big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big) = \frac{1}{4}$ a

$$f(x,y) = xy = x(1-x) = x - x^2 = -\Big(x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\Big) + \frac{1}{4} = -\Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{1}{4} \le \frac{1}{4}$$

Ale pri riešení pomocou Lagrangeových multiplikátorov zistíme síce, že $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ je stacionárny bod funkcie $L(x, y)$ ale L v ňom má sedlový bod:

$$\begin{aligned}
L(x, y) &= xy + \lambda(x + y - 1) \\
\frac{\partial L}{\partial x} &= y + \lambda = 0 \implies y = -\lambda \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= x + \lambda = 0 \implies x = -\lambda \\
x + y - 1 = 0 &\implies -\lambda - \lambda - 1 = 0 \implies \lambda = -\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Teda $\mathbf{a} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ je stacionárny bod funkcie $L(x, y) = xy - \frac{1}{2}(x + y - 1)$, jej druhý diferenciál v bode $\mathbf{a}$ je daný maticou:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \implies \text{ v bode } \mathbf{a} \text{ má } L \text{ sedlový bod.}$$