

DISKRÉTNÁ MATEMATIKA A LOGIKA – PRÍKLADY

Znakom (*) sú označené príklady, ktoré sa môžu javiť ako „ťažšie“ tesne po príslušnej prednáške. Mali by ste však byť schopní ich zvládnuť s istým časovým odstupom, po diskusii s kolegami alebo s prednášajúcim/cvičiacim a podobne.

- (1) Vezmite si znovu papier s cvičeniami o posetoch. Zistujte, či sú dané posety zväzmi alebo nie.
- (2) Toto je Cayleyho tabuľka operácie \wedge istého zväzu. Nakreslite jeho diagram a potom Cayleyho tabuľku \vee .¹

\wedge	a	b	c	d	e	f	g
a	a	a	d	d	d	d	a
b	a	b	c	d	c	f	b
c	d	c	c	d	c	c	c
d	d	d	d	d	d	d	d
e	d	c	c	d	e	c	e
f	d	c	c	d	c	f	f
g	a	b	c	d	e	f	g

- (3) Hovoríme, že poset (S, \leq) je *polozväz*, ak pre každé dva prvky $a, b \in S$ existuje $\inf\{a, b\} = a \wedge b$. Nájdite polozväz, ktorý nie je zväz.
- (4) Dokážte, že každý konečný polozväz má najmenší prvok.
- (5) Nájdite polozväz, ktorý nemá najmenší prvok.
- (6) Dokážte, že ak (S, \leq) je konečný polozväz, ktorý má najväčší prvok, potom (S, \leq) je zväz.
- (7) Nájdite polozväz, ktorý má najväčší prvok ale nie je to zväz.
- (8) Nech (P, \leq) je taký poset, ktorý má najväčší prvok a pre každú množinu $A \subseteq P$ platí, že $\inf A$ existuje. Dokážte, že (P, \leq) je zväz.
- (9) (*) Z predošlého cvičenia nie je možné vynechať podmienku o existencii najväčšieho prvku. Je ju však možné zoslabiť. Doplňte xxxx v nasledujúcej vete tak aby platila a dokážte ju.

Veta 1. *Nech (P, \leq) je taký poset, že platia tieto podmienky.*

(a) *Pre každú množinu $A \subseteq P$ platí, že $\inf A$ existuje.*

(b) *Pre každú množinu $A \subseteq P$ existuje prvok $x \in P$ taký, že xxx .*

Potom (P, \leq) je zväz.

- (10) Skúmajte opäť konečné zväzy z cvičenia 1) a zistujte, či sú distributívne, modulárne, alebo nič z toho.
- (11) Bez použitia vety o diamante a pentagone dokážte, že každý reťazec je distributívny zväz.
- (12) Je podzväz distributívneho zväzu vždy distributívny?
- (13) Je podzväz modulárneho zväzu vždy modulárny?
- (14) Nech (L, \leq) je zväz. Definujme teraz duálny poset (L, \leq^*) takto:

$$a \leq^* b :\iff b \leq a.$$

¹V tabuľke som spravil jednu chybu. Opravte si ju sami.

Dokážte:

- (a) (L, \leq) je zväz práve vtedy, keď (L, \leq^*) je zväz.
 - (b) (L, \leq) je distributívny zväz práve vtedy, keď (L, \leq^*) je distributívny zväz.
 - (c) (L, \leq) je modulárny zväz práve vtedy, keď (L, \leq^*) je modulárny zväz. Prečo stačí dokázať vždy len jednu implikáciu? ²
- (15) (*) Distributívny zákon má tvar „ $(\forall a, b, c \in L)$ nejaká rovnosť“. Naproti tomu modulárny zákon má tvar „ $(\forall a, b, c \in L)$ nejaká implikácia“. Je však možné nájsť vyjadrenie aj modulárneho zákona v tvare všeobecne kvantifikovanej rovnosti. Nájdite túto rovnosť.
- (16) Dokážte, že diamant má práve 2 kongruencie.
- (17) Nájdite všetky podzväzy pentagonu, ktoré obsahujú jeho najmenší a najväčší prvok. Nakreslite ich poset v usporiadaní \subseteq . Je to zväz?
- (18) Nájdite 3 rôzne kongruencie pentagonu a nakreslite diagramy k nim prislúchajúcich faktorových zväzov.
- (19) Nájdite všetky kongruencie zväzu L :

²Využite fakt, že $(\leq^*)^* = \leq$.

[Je ich 7]. Označme $Con(L)$ množinu všetkých kongruencií tohto zväzu. Nakreslite poset $(Con(L), \subseteq)$. Presvedčte sa, že to je distributívny zväz.

- (20) Ako vyzerajú kongruencie na konečných reťazcoch?
 (21) Dokážte, že ak Θ je kongruencia na zväze L , potom pre všetky $x_1, x_2 \in L$ také, že $x_1 \Theta x_2$ platí aj $x_1 \Theta x_1 \vee x_2$, $x_1 \Theta x_1 \wedge x_2$.
 (22) Pomocou predošlého cvičenia dokážte, že pre každý konečný zväz L a kongruenciu Θ na L platí, že pre všetky $x \in L$ je $[x]_\Theta$ konečný interval, t.j. že existujú $a, b \in L$ také, že

$$[x]_\Theta = \{y \in L : a \leq y \leq b\}$$

- (23) Pre poset (P, \leq) , $P = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}\}$, nájdite $H(P)$ a nakreslite diagram distributívneho zväzu $(H(P), \cap, \cup)$.
 (24) Ak L_1, L_2 sú zväzy, potom $L_1 \times L_2$ s usporiadaním

$$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) := \implies x_1 \leq y_1 \text{ a zároveň } x_2 \leq y_2$$

je zväz. Dokážte.

- (25) Nech C_2 je dvojprvkový reťazec a C_3 je trojprvkový reťazec. Potom $C_2 \times C_3$ je distributívny zväz (viď predošlé cvičenie). Nájdite $J(C_2 \times C_3)$ a nakreslite diagram zväzu $H(J(C_2 \times C_3))$.
 (26) (*) Ak L_1, L_2 sú distributívne zväzy, v akom vzťahu sú posety $J(L_1)$, $J(L_2)$ a $J(L_1 \times L_2)$?
 (27) Dokážte, že ak L je distributívny zväz a Θ je kongruencia na L , potom L/Θ je distributívny zväz.
 (28) Nakreslite zväz všetkých podgrúp grupy S_3 v usporiadaní \subseteq . Je distributívny? Je modulárny?
 (29) Nakreslite zväz všetkých podgrúp grupy Z_6 v usporiadaní \subseteq . Je distributívny? Je modulárny?
 (30) Ako vyzerá zväz všetkých podgrúp grupy Z_n v usporiadaní \subseteq ? Hľadajte súvislosti s deliteľnosťou prirodzených čísel!
 (31) Dokážte, že ak a, b sú kladné prirodzené čísla, potom $nsn(a, b).nsd(a, b) = a.b$. Dokážte, že $(\mathbb{N}^+, |)$ je distributívny zväz. Použite vetu o diamante a pentagone.