

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	Σ	Sem.	$\Sigma\Sigma$	Známka

(1) (7 bodov)

- (a) Definujte zjednotenie množín a komplement množiny.
 (b) Symetrická diferencia množín \div je operácia definovaná predpisom

$$X \div Y = (X \cap Y^C) \cup (X^C \cap Y).$$

Dokážte alebo vyvráťte: pre všetky množiny A, B, C platí:

- $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$
- $A \cup (B \div C) = (A \cup B) \div (A \cup C)$.

(2) (7 bodov) Nech M je uzavretý reálny interval $\langle 0, 1 \rangle$. Definujme na M binárnu operáciu $*$ danú predpisom

$$a * b = \begin{cases} a & \text{ak } a > b, \\ b & \text{ak } a \leq b. \end{cases}$$

- (a) Dokážte, že $*$ je komutatívna operácia.
 (b) Nájdite jednotkový prvok vzhľadom na $*$.
 (c) Dokážte, že $(M, *)$ nie je grupa.
- (3) (7 bodov) Nech $d(X, Y)$ označuje vzdialenosť bodov X, Y v rovine. Nech F je fixný bod v rovine. Definujme na množine všetkých bodov v rovine relácie ρ, θ takto:
- $A\rho B$ práve vtedy, keď $d(A, B)$ je celé číslo.
 - $A\theta B$ práve vtedy, keď $d(A, F) - d(B, F)$ je celé číslo.
- Zistite, či sú ρ, θ ekvivalencie.
- (4) (7 bodov) Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je Fibonacciho postupnosť, daná rovnosťami

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \\ f_2 &= 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2}, \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}, n > 2 \end{aligned}$$

Uhádnite, čomu je pre $n \geq 1$ rovné

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n.$$

Matematickou indukciou dokážte vašu hypotézu.

- (5) (10 bodov) Pre slovo \mathbf{w} označuje \mathbf{w}^R obrátené slovo. Napríklad: $0101^R = 1010$, $kobyła^R = alybok$.
- (a) Napíšte Turingov stroj, ktorý pre vstupné slovo \mathbf{w} z $\{a, b\}^+$ dá na výstupe slovo $\mathbf{w}\mathbf{w}^R$
- (b) Popíšte stručne a výstižne jednotlivé fázy výpočtu vášho Turingovho stroja, jeho stavy a prechodovú funkciu.
- (c) Napíšte prvých 7 krokov výpočtu vášho Turingovho stroja na vstupnom slove aba .

(6) (6 bodov) V gramatike s pravidlami

$$\begin{aligned}S &\rightarrow ABBABS \\S &\rightarrow B \\AB &\rightarrow BA \\AA &\rightarrow A \\BBBB &\rightarrow B \\B &\rightarrow b \\A &\rightarrow a\end{aligned}$$

odvoďte slovo $baaa$. Vysvetlite, prečo slovo $bbaaa$ nepatrí do jazyka generovaného touto gramatikou.

(7) (8 bodov)

- (a) Definuje izomorfizmus grafov.
- (b) Pre každé dva z nasledujúcich grafov vyšetrite, či sú izomorfné. Ak sú izomorfné, zostrojte zložku izomorfizmu týkajúcu sa vrcholov. Ak nie sú, dokažte, že izomorfizmus neexistuje.

(8) (8 bodov) Nájdite kosťu grafu prehľadávaním do hĺbky a do šírky. Poradie vrcholov je abecedné.