Komentáre k prvému termínu skúšky z DMaL, ZS 2006/07

(1) (10 bodov) Nech $*$ je binárna operácia na množine $\mathbb{R}_0^+$ (t.j. všetkých nezáporných reálnych čísel) daná predpisom

$$x * y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Zistite, či je $*$ na $\mathbb{R}_0^+$ komutatívna, asociatívna a či má jednotkový prvok.

- $*$ *je komutatívna:* $\forall x, y \in \mathbb{R}_0^+ : x * y = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y^2 + x^2} = y * x$, *lebo* $+$ *je komutatívna na* $\mathbb{R}$.
- $*$ *je asociatívna:* $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_0^+ : (x*y)*z = \sqrt{x^2+y^2}*z = \sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. *Podobne* $x*(y*z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. *V tichosti sa využila asociativita* $+$ *na* $\mathbb{R}$, *to však nebolo nutné explicitne spomenúť.*
- *Jednotkový prvok bol* 0.

Najviac chýb bolo v asociativite, lebo ste zabúdali na tú vnútornú druhú mocninu.

(2) (10 bodov)

(a) Definujte podgrupu.

(b) Vybavme $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ zvyčajnou operáciou sčítania vektorov, t.j.

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2).$$

Potom $(\mathbb{Z}^2, +)$ je grupa (to nedokazujte). Môžeme ju nakresliť ako množinu všetkých bodov v rovine s celočíselnými súradnicami (viď obrázok na tabuli). Nech H je najmenšia možná podgrupa grupy $(\mathbb{Z}^2, +)$, ktorá obsahuje prvok $(-1, 1)$. Nájdite H a nakreslite ju. Potom nájdite aspoň tri rôzne pravé kosety H v $\mathbb{Z}^2$.

Toto bol pre vás najťažší príklad. Bolo treba nielen vedieť definíciu podgrupy, ale aj jej rozumieť a vedieť ju samostatne použiť. Pritom to nie je ťažké.

Línia uvažovania mohla byť asi takáto (píšem neformálne):

- *V prvom rade si musím uvedomiť, že operácia je sčítanie vektorov (a nie nejaké* násobenie po zložkách*). Neutrálny prvok v* $(\mathbb{Z}^2, +)$ *je teda* $(0, 0)$, *inverzný prvok k* $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ *je teda* $(-x_1, -x_2)$.
- *Hľadané* H *musí byť uzavreté na* $+$. *Keďže* $(-1, 1) \in H$, *musím teda mať* $(-1,1)+(-1,1) = (-2,2) \in H$, *aj* $(-1,1)+(-2,2) = (-3,3) \in H$ *atď., teda musí platiť*

$$\{(-1,1), (-2,2), (-3,3), (-4,4), \dots\} \subseteq H$$

- *To ale nestačí,* H *má byť uzavretá aj na inverzné prvky. Takže ak napr.* $(-2, 2) \in H$, *potom aj* $(2, -2) \in H$, *takže* *mám aj*

$$\{(1,-1),(2,-2),(3,-3),(4,-4),\dots\} \subseteq H$$

- *Teraz treba urobiť znovu uzáver vzhľadom na +. To ale v tomto konkrétnom prípade znamená iba prihodiť do vreca aj* $(0,0)$*, lebo* $(-1,1)+(1,-1)=(0,0)$*. Prípadne si stačí pamätať, že jednotkový prvok je v každej podgrupe. Dostávame teda*

$$H = \{\dots,(-3,3),(-2,2),(-1,1),(0,0),(1,-1),(2,-2),\dots\} = \\ = \{(-t,t) : t \in \mathbb{Z}\}.$$

  Je jasné, ako to vyzerá na obrázku. Všetky prvky, ktoré v H *sú tam podľa definície podgrupy musia byť a* H *je zrejme podgrupa* $\mathbb{Z}^2$*. Takže* H *je najmenšia podgrupa* $\mathbb{Z}^2$ *obsahujúca* $(-1,1)$*.*
- *Pravé kosety sú* $H+(x_1,x_2)$*, kde* $(x_1,x_2) \in \mathbb{Z}^2$*, napr. pre* $(x_1,x_2)=(1,1)$ *máme*

$$H+(1,1) = \{(-t,t)+(1,1) : t \in \mathbb{Z}\} = \\ \{(-t+1,t+1) : t \in \mathbb{Z}\}.$$

  Geometricky tvoria každý pravý koset H *v* $\mathbb{Z}^2$ *body zo* $\mathbb{Z}^2$ *ležiace na priamkach so smernicou -1.*

Nebolo nutné vypisovať úvahy až tak podrobne, ako som ich tu napísal ja. Intelektuálne ambiciózne typy môžu porozmýšľať, ako by to vyzeralo ak by v zadaní bolo namiesto $(-1,1)$ *povedzme* $(-5,3)$*.*

(3) (12 bodov)
  (a) Napíšte Turingov stroj, ktorý pre vstupné slovo $\mathbf{w}=a^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n>0$ dá na výstupe slovo a^nb^k, kde $k=n^2$.
  (b) Popíšte stručne a výstižne jednotlivé fázy výpočtu vášho Turingovho stroja, jeho stavy a prechodovú funkciu.
  (c) Napíšte prvých 7 krokov výpočtu vášho Turingovho stroja na vstupnom slove aa.
  (d) V gramatike s pravidlami

$$\begin{aligned} S &\to AABS \\ S &\to \lambda \\ BA &\to AB \\ AB &\to BA \\ AAA &\to A \\ A &\to a \\ B &\to b \end{aligned}$$

odvoďte slovo *aabb*. Vysvetlite, prečo slovo *ababa* nepatrí do jazyka generovaného touto gramatikou.

Príklad (3) som ešte neopravoval, teda nekomentujem.

(4) (10 bodov)

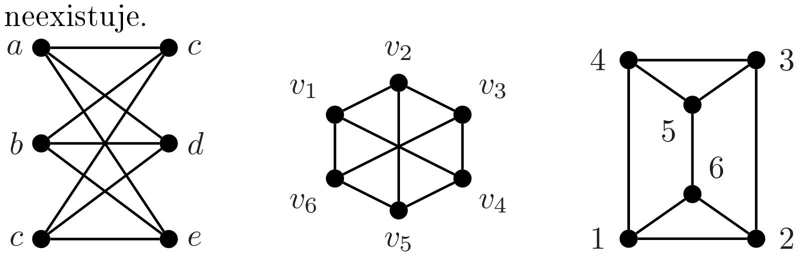
(a) Napíšte aký je vzťah medzi súčtom stupňov všetkých vrcholov grafu a počtom jeho hrán. Vysvetlite, prečo to tak je.

Kto vedel, nemal problém

(b) Koľko najmenej a koľko najviac hrán môže mať súvislý jednoduchý bezslučkový graf so 100 vrcholmi? Prečo?

- *Najmenej vtedy, keď je to strom a vtedy to je 99. Tu som bol jemne nedôsledný a akceptoval som proste nakreslený strom s nijako nezdôvodneným tvrdením, že menej sa nedá.* [1]
- *Najviac: každá hrana musí spájať práve 2 vrcholy, teda odpoveď je* $\binom{100}{2}$. *Inou kombinatorickou úvahou sa dalo dostať k výsledku,* $99+98+\ldots+1$, *to je to isté číslo. Často sa vyskytujúca nesprávna odpoveď bola* $99!$.

(c) Pre každé dva z nasledujúcich grafov vyšetrite, či sú izomorfné. Ak sú izomorfné, zostrojte zložku izomorfizmu týkajúcu sa vrcholov. Ak nie sú, dokážte, že izomorfizmus neexistuje.



Prvé dva sú. Tretí obsahuje cyklus dĺžky 3, prvé dva nie.

(5) (10 bodov) Nájdite kostru prvého grafu z predošlého príkladu prehľadávaním do hĺbky a do šírky. Poradie vrcholov je abecedné. Dokumentujte dostatočne aj výpočet algoritmu napríklad tak, ako sme to robili na cvičení. Teda nestačí iba nakresliť kostru.

Nebol problém, skoro všetci dobre

---

[1] Pre informáciu, správny dôkaz je cca toto: nech G je graf so 100 vrcholmi a najmenším možným počtom hrán. Nech K je jeho kostra. Potom K má 100 vrcholov (lebo to je kostra G a teda obsahuje všetky vrcholy G) a počet hrán K neprevyšuje počet hrán G (lebo to je podgraf G). K je strom, teda K je súvislý, jednoduchý a bezslučkový graf.

Keďže však G má najmenší možný počet hrán, musí byť počet hrán G rovný počtu hrán K. Ale to znamená, že $K = G$ a teda G je strom. Z prednášky vieme, že každý strom s n vrcholmi má $n-1$ hrán, a teda G má 99 hrán.