

Skupina B – riešenie.

1. $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (2 body)
 $\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3\}$ (2 body).

2. Nech $A = \{1, 2, \dots, 11\}$ a ρ je binárna relácia na množine A taká, že $\rho = \{(x, y) \in A^2; x - y = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$. Zistite či je ρ ekvivalencia, a ak áno, nájdite rozklad množiny A na triedy ekvivalencie.

ρ je ekvivalencie, lebo je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

Reflexívnosť: $(\forall x \in A) (x, x) \in \rho$.

Platí, nakoľko $(\forall x \in A) x - x = 0 = 3 \cdot 0$ (3 body).

Symetričnosť: $(\forall x, y \in A) (x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho$.

Ak $(x, y) \in \rho$, tak $\exists k \in \mathbb{Z}$ také že $x - y = 3k$, potom $y - x = 3(-k)$ a $(y, x) \in \rho$, lebo $-k \in \mathbb{Z}$ (3 body).

Tranzitívnosť: $(\forall x, y, z \in A) (x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \Rightarrow (x, z) \in \rho$.

Ak $(x, y) \in \rho$, $(y, z) \in \rho$, tak $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ také že $x - y = 3k_1$, $y - z = 3k_2$, a preto $x - z = (x - y) + (y - z) = 3(k_1 + k_2)$ a $(x, z) \in \rho$, lebo $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$ (3 body).

$[1]_\rho = \{1, 4, 7, 10\}$, $[2]_\rho = \{2, 5, 8, 11\}$, $[3]_\rho = \{3, 6, 9\}$, a preto hľadaný rozklad A je $\{\{1, 4, 7, 10\}, \{2, 5, 8, 11\}, \{3, 6, 9\}\}$ (3 body).

3. Nech $B = \{1, 2, \dots, 9\}$ a " $|$ " je binárna relácia na množine B taká, že $a|b$ značí " a delí b " (inými slovami, existuje $x \in \mathbb{Z}$ také že $b = a \cdot x$). Dokážte že $(B, |)$ je poset a nakreslite jeho diagram. Zistite či je $(B, |)$ zväz, a svoje tvrdenie odôvodnite.

$(B, |)$ je poset, lebo relácia $|$ je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.

Reflexívnosť: $(\forall x \in B) x|x$.

Platí, nakoľko $(\forall x \in B) x = 1 \cdot x$, a $1 \in \mathbb{Z}$ (3 body).

Antisymetričnosť: $(\forall x, y \in B) x|y \wedge y|x \Rightarrow x = y$.

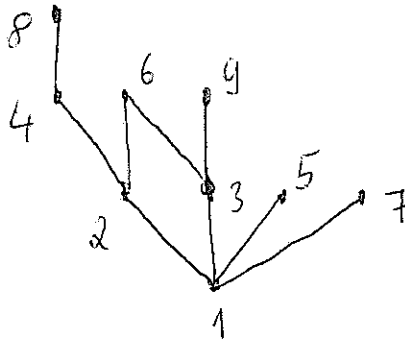
Ak $x|y$ a $y|x$, tak $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ také že $y = k_1x$ a $x = k_2y$, a preto $y = k_1k_2y$ a $k_1k_2 = 1$. Toto je možné (pre $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$) iba ak $k_1 = k_2 = 1$ alebo $k_1 = k_2 = -1$. Druhý prípad však pre $x, y \in B$ nastať nemôže, a preto $x = y$ (3 body).

Tranzitívnosť: $(\forall x, y, z \in A) x|y \wedge y|z \Rightarrow x|z$.

Ak $x|y$ a $y|z$, tak $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ také že $y = k_1x$ a $z = k_2y$, a preto $z = k_2k_1x$, odtiaľ $x|z$ (3 body).

$(B, |)$ nie je zväz, pretože nie všetky dvojice z B majú supremum, napríklad dvojica 5, 7 supremum v množine B nemá (3 body).

Diagram $(B, |)$ (2 body):



4. Nech \oplus je binárna operácia na množine celých čísel \mathbb{Z} taká, že $a \oplus b = a + b - 5$. Zistite či je (\mathbb{Z}, \oplus) komutatívna grupa. Ak áno, nájdite inverzné prvky k prvkom 4, 5, 6, 7, 8.

\oplus je binárna operácia na \mathbb{Z} , pretože $(\forall x, y \in \mathbb{Z}) x \oplus y = x + y - 5 \in \mathbb{Z}$ (nepovinné, lebo je to v zadaní).

Asociatívnosť: $(\forall x, y, z \in \mathbb{Z}) (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.

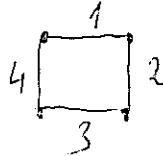
Platí, nakoľko $(x \oplus y) \oplus z = (x + y - 5) \oplus z = (x + y - 5) + z - 5 = x + y + z - 10 = x \oplus (y + z - 5) = x \oplus (y \oplus z)$ (5 bodov).

Neutrálny prvok $(\exists e \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{Z}) x \oplus e = e \oplus x = x$.
 Nakoľko $x \oplus e = e \oplus x = x + e - 5 = x$ dostaneme $e = 5$ (5 bodov).
 Inverzný prvok $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists x^{-1} \in \mathbb{Z}) x \oplus x^{-1} = e$.
 Nakoľko $x \oplus x^{-1} = x + x^{-1} - 5 = e = 5$ dostaneme $x^{-1} = 10 - x$ (5 bodov).
 Komutatívnosť: $(\forall x, y \in \mathbb{Z}) x \oplus y = y \oplus x$.
 Platí, nakoľko $x \oplus y = x + y - 5 = y + x - 5 = y \oplus x$ (5 bodov).
 (\mathbb{Z}, \oplus) je komutatívna grupa.
 Navyše $4^{-1} = 10 - 4 = 6$, $5^{-1} = 10 - 5 = 5$, $6^{-1} = 10 - 6 = 4$, $7^{-1} = 10 - 7 = 3$, $8^{-1} = 10 - 8 = 2$ (5 bodov).

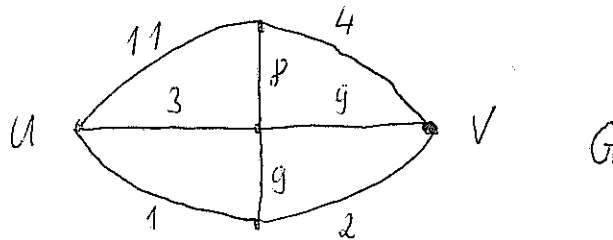
5. Na obrázku sú diagramy grafov G_1 a G_2 . Zistite a odôvodnite, ktorý z týchto grafov je Eulerovský. Pre Eulerovský graf nájdite aj Eulerovský ťah.



G_1 nie je Eulerovský, lebo má vrcholy nepárneho stupňa (2 body).
 G_2 je Eulerovský, lebo je súvislý a má všetky vrcholy párneho stupňa. Eulerovský ťah je indukovaný na obrázku (3 body).



6. Na obrázku je diagram ohodnoteného grafu G . Nájdite minimálnu kostru grafu G a najkratšiu cestu z vrchola u do vrchola v .



Minimálna kostra (5 bodov).

Najkratšia cesta (5 bodov).

