

Skupina A

- (1) Definujte \cap, \times . Dokážte alebo vyvráťte: pre všetky množiny A, B, C platí:
 - (a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
 - (b) $A \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$.
- (2) Definujte pologrupu. Zistite, či je $(M, *)$ pologrupa, ak
 - (a) $M = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $*$ je násobenie reálnych čísel.
 - (b) $M = \mathbb{R}$, $a * b := 3ab$.Ak je M pologrupa, nájdite neutrálny prvok vzhľadom na $*$.
- (3) Definujte reláciu ekvivalencie na množine. Dokážte, že nasledujúca relácia na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ je ekvivalencia.

$$a \sim b : \iff \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$$

a nájdite triedu ekvivalencie prvku π .

- (4) Definujte grupu. Dokážte, že S_3 nie je komutatívna grupa. Nájdite nejakú komutatívnu podgrupu S_3 .
- (5) Matematickou indukciou dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}^+$ platí:

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} i^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$$

Skupina B

- (1) Definujte \cup, \times . Dokážte alebo vyvráťte: pre všetky množiny A, B, C platí:
 - (a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
 - (b) $A \cup (B \times C) = (A \cup B) \times (A \cup C)$.
- (2) Definujte pologrupu. Zistite, či je $(M, *)$ pologrupa, ak
 - (a) $M = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $*$ je sčítanie reálnych čísel.
 - (b) $M = \mathbb{R}$, $a * b := 4ab$.Ak je M pologrupa, nájdite neutrálny prvok vzhľadom na $*$.
- (3) Definujte reláciu ekvivalencie na množine. Dokážte, že nasledujúca relácia na \mathbb{R} je ekvivalencia.

$$a \sim b : \iff a - b \in \mathbb{Q}$$

a nájdite triedu ekvivalencie prvku π .

- (4) Definujte grupu. Dokážte, že S_3 nie je komutatívna grupa. Nájdite nejakú komutatívnu podgrupu S_3 .
- (5) Matematickou indukciou dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}^+$ platí:

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i i^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$
