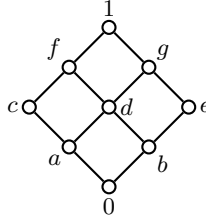


DISKRÉTNÁ MATEMATIKA A LOGIKA – PRÍKLADY

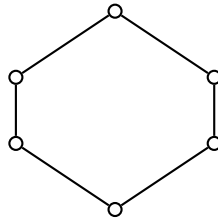
- (1) Nech  $L$  je zväz, ktorého diagram je takýto.



- (a) Zistite či relácie ekvivalencie na  $L$  prislúchajúce rozkladom
- (i)  $\{\{0\}, \{a, b\}, \{c, d, e\}, \{f, g\}, \{1\}\}$ ;
  - (ii)  $\{\{0, a, c\}, \{b, d, f\}, \{e, g, 1\}\}$ ;
  - (iii)  $\{\{0, a, b, c, d, e, f, g, 1\}\}$
- sú kongruencie. Ak áno, vždy nakreslite diagram príslušného faktorového zväzu.
- (b) Nájdite kongruencie (ak existujú)  $\Theta_i$  zväzu  $L$  také, aby
- (i)  $[d]_{\Theta_1} = \{a, b, d, 0\}$ ;
  - (ii)  $[d]_{\Theta_2} = \{1, f, g, d\}$ ;
  - (iii)  $[d]_{\Theta_3} = \{d, b\}$ ;
  - (iv)  $[d]_{\Theta_4} = \{d, e\}$ .

Vždy nakreslite aj diagram príslušného faktorového zväzu.

- (2) Nájdite všetky kongruencie 4-prvkového reťazca (stačí, ak si nakreslite rozklady podľa nich).
- (3) Nájdite zopár (aspoň 3) kongruencií zväzu



(stačí, ak si nakreslite rozklady podľa nich).

- (4) Uvažujme zväz  $(2^{\mathbb{N}}, \cap, \cup)$ . Nech  $\Theta$  je relácia na  $2^{\mathbb{N}}$  daná predpisom

$$A\Theta B :\Leftrightarrow A \cap \{1, 2, 3\} = B \cap \{1, 2, 3\}$$

Dokážte, že  $\Theta$  je kongruencia na  $2^{\mathbb{N}}$ . Koľko je tried v rozklade  $2^{\mathbb{N}}/\Theta$ ? [osem]

- (5) Nech  $L$  je zväz, vyberme ľubovoľný prvok  $q \in L$ . Nech  $\Theta_q$  je relácia daná predpisom

$$a\Theta_q b :\Leftrightarrow a \wedge q = b \wedge q.$$

- (a) Dokážte, že ak  $L$  je distributívny, potom  $\Theta_q$  je kongruencia na  $L$ .
- (b) Nájdite nedistributívny zväz  $L$  a  $q \in L$  také, že  $\Theta_q$  nebude kongruencia na  $L$ . [aký je najjednoduchší nedistributívny zväz?]

- (c) Pre zväz  $L$  z cvičenia (1) nakreslite rozklady  $L$  podľa zopár takýchto  $\Theta_q$ , kde  $q \in L$ . Skúste aj  $q = 0$ ,  $q = 1$ .
- (6) Nech  $L$  je zväz, nech  $\Theta$  je kongruencia na  $L$ . Nech  $a, b$  sú také, že  $a\Theta b$ . Dokážte, že
- (a)  $a\Theta(a \vee b)$ ,
  - (b)  $a\Theta(a \wedge b)$ .
- (7) Dokážte, že ak  $L$  je zväz a  $\Theta$  je kongruencia na  $L$ , potom každá trieda rozkladu  $L/\Theta$  je podzväzom  $L$ .
- (8) Nech  $L$  je zväz, nech  $\Theta$  je kongruencia na  $L$ . Nech  $a, b, c$  sú také, že  $a \leq b \leq c$  a zároveň  $a\Theta c$ . Dokážte, že potom  $a\Theta b$  a zároveň  $b\Theta c$ .
- (9) Dokážte, že ak  $\Theta, \Psi$  sú kongruencie na zväze  $L$ , potom  $\Theta \cap \Psi$  je kongruencia na  $L$ .