

DISKRÉTNÁ MATEMATIKA A LOGIKA – PRÍKLADY

3. MATEMATICKÁ INDUKCIA

Dokážte matematickou indukciou (alebo vyvráťte) nasledujúce tvrdenia:

(1) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ platí

- (a) $8|9^n - 1$,
- (b) $4|3^{2n-1} + 1$,
- (c) $21|5^{n+1} - 4^n$,
- (d) $133|11^{n+1} + 12^{2n-1}$.

(2) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ platí

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \sqrt{n}.$$

(3) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ platí

$$\sum_{i=1}^n 2i - 1 = n^2.$$

(4) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ platí

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq 5.$$

(5) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ platí

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

(6) Súčet každých troch po sebe nasledujúcich prirodzených čísel je deliteľný číslom 6.

(7) Súčet tretích mocnín každých troch po sebe nasledujúcich prirodzených čísel je deliteľný číslom 9.

(8) Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je Fibonacciho postupnosť, daná rovnosťami

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = 1$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad \text{pre } n \in \mathbb{N}, n > 2$$

Dokážte alebo vyvráťte:

(a) Pre všetky $n > 2$, $1 < \frac{f_{n+1}}{f_n} < 2$.

(b) Pre všetky $n \geq 1$, f_{4n} je deliteľné 3.

(c) Uhádnite, čomu je pre $n \geq 1$ rovné $(f_n)^2 + (f_{n+1})^2$. Dokážte vašu hypotézu.

(d) (*) Uhádnite, čomu je pre $n \geq 1$ rovné

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n.$$

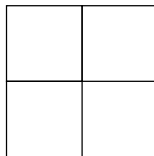
Dokážte vašu hypotézu.

(e) (*) Pre všetky $n \geq 1$ platí

$$f_n = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{(1-\phi)^n}{\sqrt{5}},$$

kde $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. (Číslo ϕ je tzv. zlatý rez.)

- (9) Každá štvorcová sieť $2^n \times 2^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$), z ktorej bol odobratý jeden (hociktorý!) jednotkový štvorček sa dá vykachličkovať „trinominami“ v tvare



Každý štvorček na obrázku je jednotkový.

- (10) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ neexistujú kladné prirodzené čísla a, b, c s vlastnosťou $a^n + b^n = c^n$.
- (11) Každé párne prirodzené číslo väčšie ako 2 sa dá napísať ako súčet dvoch prvočísel. (Kto vyrieši toto, má u mňa skúšku za A)
- (12) Dokážte pre $n \in \mathbb{N}$, že

$$\sum_{i=0}^n n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{2}.$$

- (13) Dokážte pre $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, že

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

- (14) Dokážte pre $n \in \mathbb{N}$, $n > 6$, že $n! \geq 3^n$.
- (15) Dokážte, že pre všetky $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ také, že $x > 0$ a $n \geq 1$ platí, že $(x+1)^n > nx$.