

Skupina A

- (1) (4 body) Zistite, či je operácia $*$ na \mathbb{R}^+ daná predpisom $a * b = \sqrt{a \cdot b}$ komutatívna a asociatívna.
- (2) (4 body) Nakreslite Cayleyho tabuľku podgrupy H grupy S_4 .

$$H = \{(1432)^n : n \in \mathbb{N}\}$$

Nájdite dva rôzne pravé kosety H v S_4 .

- (3) (4 body) V jazyku $\{0, 1, +, \cdot\}$ v bežnej interpretácii pomocou \mathbb{N}
- (a) definujte binárny predikát $<$;
- (b) napíšte formulu, ktorá znamená: "Každé číslo je súčtom druhých mocnín nejakých dvoch čísel."
- (4) (8 bodov)
- (a) Napíšte Turingov stroj, ktorý pre vstupné slovo tvaru $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 =$, kde $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \{0, 1\}^+$ sú bitové reťazce *rovnakej dĺžky* reprezentujúce v dvojkovej sústave *s najnižším rádom vľavo* čísla $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ dá na výstupe nejaké slovo $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}$, kde \mathbf{w} je bitový reťazec reprezentujúci súčet $n_1 + n_2$. Príklady:

Vstup:	Výstup:
01 + 10 =	01 + 10 = 11
111 + 100 =	111 + 100 = 0001

- (b) Popíšte stručne a výstižne jednotlivé fázy výpočtu vášho Turingovho stroja a jeho prechodovú funkciu.
- (c) Napíšte prvých 5 krokov výpočtu vášho Turingovho stroja na vstupnom slove $01 + 11 =$.
- (5) (4 body) Nech $\rho \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je daná takto:

$$a \rho b :\Leftrightarrow a \cdot b \notin \mathbb{Q}$$

Zistite, či je ρ reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna.

- (6) (4 body) Nech $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a nech
- $$P = \{(x_1, x_2) \in A \times A : \text{zvyšok po delení } x_1 + x_2 \text{ číslom } 3 \text{ je } 2\}.$$

Čiastočné usporiadanie na P je dané takto:

$$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) :\Leftrightarrow (x_1 \leq y_1) \wedge (x_2 \leq y_2)$$

Nakreslite diagram posetu (P, \leq) a nájdite minimálne, maximálne, najmenšie a najväčšie prvky. Pozor na A , je iná ako predtým.

- (7) Prémia: (nepovinná, 2 body) Zistite, či operácia $*$ z príkladu (1) má jednotkový prvok.

Skupina B

- (1) (4 body) Zistite, či je operácia $*$ na \mathbb{R}^+ daná predpisom $a * b = \sqrt{a + b}$ komutatívna a asociatívna.
- (2) (4 body) Nakreslite Cayleyho tabuľku podgrupy H grupy S_4 .

$$H = \{(1324)^n : n \in \mathbb{N}\}$$

Nájdite dva rôzne pravé kosety H v S_4 .

- (3) (4 body) V jazyku $\{0, 1, +, \cdot\}$ v bežnej interpretácii pomocou \mathbb{N}
- (a) definujte binárny predikát $>$;
- (b) napíšte formulu, ktorá znamená: "Každé číslo je súčtom druhých mocnín nejakých troch čísel."
- (4) (8 bodov)
- (a) Napíšte Turingov stroj, ktorý pre vstupné slovo tvaru $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 =$, kde $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \{0, 1\}^+$ sú bitové reťazce *rovnakej dĺžky* reprezentujúce v dvojkovej sústave *s najnižším rádom vľavo* čísla $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ dá na výstupe nejaké slovo $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}$, kde \mathbf{w} je bitový reťazec reprezentujúci súčet $n_1 + n_2$. Príklady:

Vstup:	Výstup:
01 + 10 =	01 + 10 = 11
111 + 100 =	111 + 100 = 0001

- (b) Popíšte stručne a výstižne jednotlivé fázy výpočtu vášho Turingovho stroja a jeho prechodovú funkciu.
- (c) Napíšte prvých 5 krokov výpočtu vášho Turingovho stroja na vstupnom slove $01 + 11 =$.
- (5) (4 body) Nech $\rho \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je daná takto:

$$a \rho b :\Leftrightarrow a + b \notin \mathbb{Q}$$

Zistite, či je ρ reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna.

- (6) (4 body) Nech $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a nech
- $$P = \{(x_1, x_2) \in A \times A : \text{zvyšok po delení } x_1 + x_2 \text{ číslom } 3 \text{ je } 1\}.$$

Čiastočné usporiadanie na P je dané takto:

$$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) :\Leftrightarrow (x_1 \leq y_1) \wedge (x_2 \leq y_2)$$

Nakreslite diagram posetu (P, \leq) a nájdite minimálne, maximálne, najmenšie a najväčšie prvky. Pozor na A , je iná ako predtým.

- (7) Prémia: (nepovinná, 2 body) Zistite, či operácia $*$ z príkladu (1) má jednotkový prvok.