Diskrétna matematika

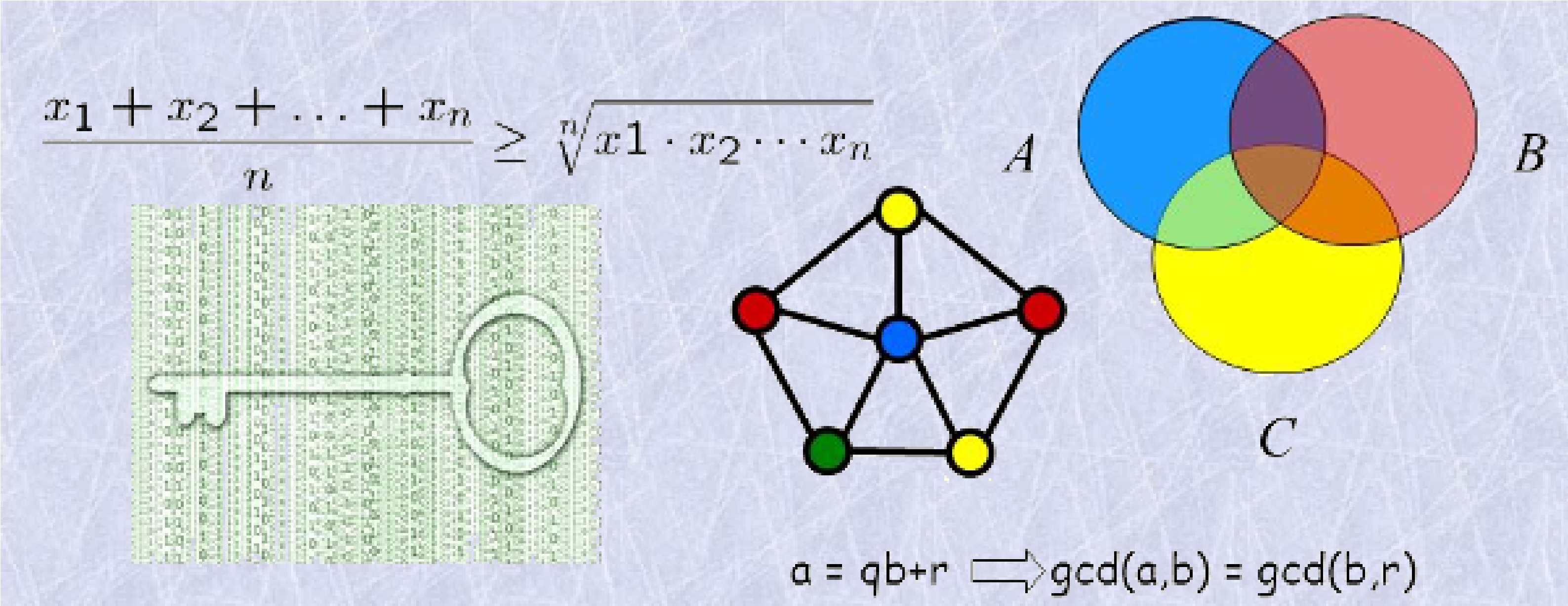
pre študentov aplikovanej informatiky FEI STU

Jozef Kollár, Marcel Polakovič

VYDANÉ LEN ELEKTRONICKY

WWW.PENGUIN.SK

1. vydanie, Marec 2019



Obsah

I Časť prvá

1 Množiny a úvod do logiky 11

1.1 Množiny 11

1.1.1 Základné číselné množiny 14

1.1.2 Vennove diagramy 16

1.1.3 Kartézsky súčin množín a usporiadané n-tice 18

1.2 Úvod do matematickej logiky 19

1.3 Cvičenia 24

2 Dôkazy v matematike 31

2.1 Priamy dôkaz 32

2.2 Nepriamy dôkaz 35

2.3 Dôkaz sporom 36

2.4 Dôkaz matematickou indukciou 37

2.5 Cvičenia 42

3 Základné pojmy teórie grafov 47

3.1 Historický úvod 47

3.2 Definícia grafu, typy grafov, základné pojmy 48

3.3 Sledy, ťahy, cesty a cykly v grafe 54

3.4 Súvislý graf, podgraf, komponent súvislosti 57

3.5 Kostra grafu 62

3.6 Cvičenia 64

4 Reprezentácia grafov, stromy, sledy 69
4.1 Reprezentácia grafov 69
4.1.1 Matica susednosti 69
4.1.2 Matica incidencie 72
4.2 Stromy 72
4.3 Koreňové stromy 77
4.3.1 Terminológia koreňových stromov 78
4.4 Binárne stromy 80
4.5 Eulerovské ťahy 83
4.5.1 Königsbergské mosty 83
4.6 Otvorené a uzavreté eulerovské ťahy 85
4.7 Cvičenia 90

5 Hamiltonovské cykly, izomorfizmus grafov, ... 95
5.1 Hamiltonovské cykly 95
5.2 Izomorfizmus grafov 98
5.2.1 Izomorfizmus stromov 103
5.2.2 Izomorfizmus koreňových stromov 105
5.2.3 Izomorfizmus binárnych stromov 106
5.3 Rovinnosť grafov 108
5.4 Katalóg špeciálnych grafov 112
5.4.1 Kompletný graf (K_n) 112
5.4.2 Kompletný bipartitný graf $(K_{m,n})$ 112
5.4.3 Cesta (P_n) 112
5.4.4 Cyklus (C_n) 112
5.4.5 Hviezda (S_n) 113
5.4.6 Koleso (W_n) 113
5.4.7 Húsenica 113
5.5 Cvičenia 114

II Časť druhá

6 Binárne relácie, ich vlastnosti a reprezentácia 123
6.1 Binárne relácie 123
6.2 Vlastnosti relácií 124
6.3 Operácie s reláciami 127
6.4 Maticová reprezentácia binárnych relácií 128
6.4.1 Reflexívnosť 129
6.4.2 Symetrickosť 129
6.4.3 Antisymetrickosť 130
6.4.4 Tranzitívnosť 130
6.5 Cvičenia 133

7 Čiastočné usporiadanie, ekvivalencie, funkcie . . . 137

7.1 Čiastočné usporiadanie 137

7.2 Rozklad množín a relácia ekvivalencie 138

7.2.1 Rozklad množiny . . . 138
7.2.2 Relácia ekvivalencie . . . 139

7.3 Funkcie 142

7.4 Cvičenia 147

8 Vytvárajúce funkcie . . . 155

8.1 Úvod 155

8.1.1 Mocninové rady . . . 156
8.1.2 Motivačné príklady . . . 157

8.2 Operácie s vytvárajúcimi funkciami 160

8.2.1 Súčet vytvárajúcich funkcií . . . 161
8.2.2 Vytvárajúca funkcia nekonečnej postupnosti posunutej doprava . . . 161
8.2.3 Súčin vytvárajúcich funkcií . . . 162
8.2.4 Vytvárajúca funkcia nekonečnej postupnosti posunutej doľava . . . 163
8.2.5 Substitúcia αx, pre $\alpha \in \mathbb{R}$, do vytvárajúcej funkcie . . . 164
8.2.6 Substitúcia x^k, pre $k \in \mathbb{N}$, do vytvárajúcej funkcie . . . 165
8.2.7 Derivovanie vytvárajúcich funkcií . . . 165
8.2.8 Integrovanie vytvárajúcich funkcií . . . 166

8.3 Príklady použitia vytvárajúcich funkcií 167

8.3.1 Fibonacciho postupnosť . . . 167
8.3.2 Fibonacciho postupnosť inak . . . 169
8.3.3 Všeobecné rekurentné postupnosti . . . 170
8.3.4 Počet binárnych stromov na n vrcholoch . . . 171

8.4 Cvičenia 175

9 Prehľadávanie grafov . . . 179

9.1 Úvod 179

9.2 Prehľadávanie grafu 180

9.2.1 Fronta (FIFO) a zásobník (LIFO) . . . 180

9.3 Prehľadávanie grafu do šírky 181

9.4 Prehľadávanie grafu do hĺbky 186

9.5 Dôkaz korektnosti algoritmov prehľadávania do šírky a do hĺbky 191

9.6 Cvičenia 192

10 Minimálne kostry, Huffmanov kód . . . 195

10.1 Ohodnotený graf 195

10.2 Minimálne kostry 196

10.2.1 Jarníkov (Primov) algoritmus . . . 197
10.2.2 Kruskalov algoritmus . . . 201
10.2.3 Borůvkov algoritmus . . . 203

10.3 Huffmanov kód 204
10.4 Cvičenia 209

11 Binárne stromy, izomorfizmus stromov, hra NIM 213
11.1 Prehľadávacie binárne stromy 213
11.2 Izomorfizmus stromov 217
11.2.1 Algoritmus overovania izomorfizmu binárnych stromov 218
11.2.2 Algoritmus overovania izomorfizmu koreňových stromov 222
11.2.3 Algoritmus overovania izomorfizmu stromov 223
11.3 Hra NIM 224
11.3.1 Pravidlá hry NIM 225
11.3.2 Hra NIM a grafy 225
11.3.3 Víťazná stratégia hry NIM 226
11.4 Cvičenia 227

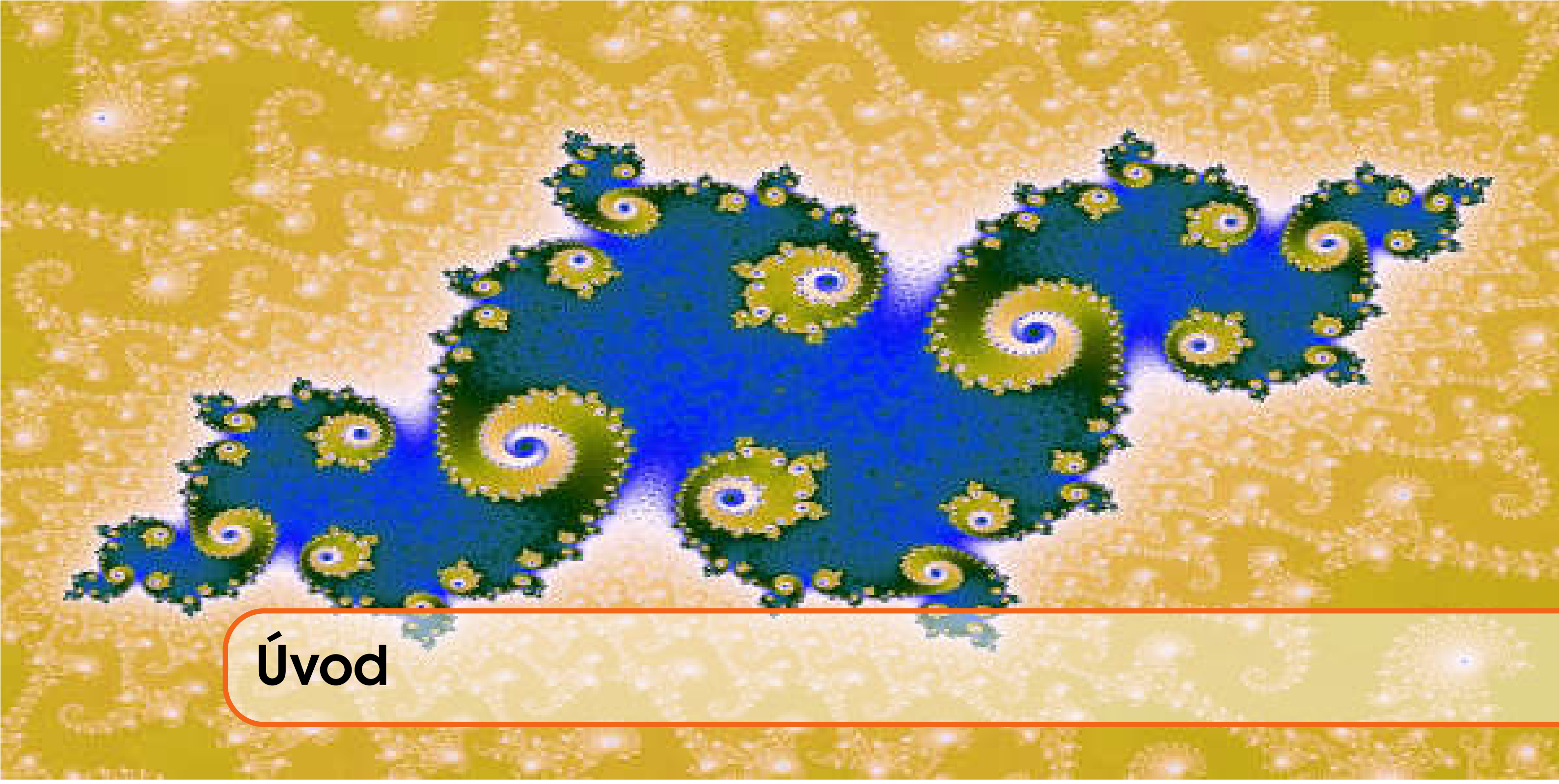
12 Dijkstrov algoritmus, Prüferov kód 229
12.1 Hľadanie najlacnejšej cesty Dijkstrovým algoritmom 229
12.1.1 Popis Dijkstrovho algorimu 230
12.2 Problém obchodného cestujúceho 234
12.3 Prüferov kód 234
12.4 Cvičenia 242

III Použitá a doporučená literatúra a zdroje

Použitá a doporučená literatúra 247

IV Index

Index 251



Úvod

Diskrétna matematika ako veľmi dôležitá súčasť matematiky je pre informatikov nepostrádateľná. Preto je kurz diskrétnej matematiky súčasťou bakalárskeho štúdia odboru *Aplikovaná informatika*. Vzhľadom na časové obmedzenia je však tento kurz okresaný na prehľad toho najnutnejšieho a témam, ktoré by si zaslúžili samostatné kurzy (teória grafov, grafové algoritmy, vytvárajúce funkcie) sú v ňom venované len 1-2-3 prednášky.

Tento text vznikol s cieľom poskytnúť študentom materiál zodpovedajúci obsahu kurzu *Diskrétna matematika*, ktorý by im uľahčil jeho úspešné absolvovanie. Jednotlivé kapitoly zodpovedajú prednáškam a na konci každej kapitoly je zoznam úloh na precvičenie k danej téme. Tieto cvičenia k témam sú uvádzané bez riešení, resp. výsledkov z viacerých dôvodov. Prvým dôvodom je to, že niektoré úlohy, napríklad dôkazové, majú mnoho správnych riešení a nie je možné všetky pokryť. Druhým dôvodom je fakt, že uvádzanie riešení, alebo aspoň výsledkov všetkých cvičení by značne zväčšilo obsah tohto už aj tak dosť rozsiahleho textu. Tretí dôvod je ten, že ku každej téme je v texte uvedený dostatočný počet kompletne vyriešených ilustračných príkladov. A napokon niektoré cvičenia, uvádzané na konci kapitol, budú preberané na cvičeniach kurzu počas semestra.

Okrem delenia na kapitoly je text rozdelený na dve časti, čo je dôsledkom toho, že súčasťou kurzu sú dve zápočtové písomky v priebehu semestra. To znamená, že na konci každej časti čaká študentov písomka z prebraných tém. Tomuto deleniu je poplatné aj nie celkom obvyklé rozdelenie tém. Našou snahou bolo rozdeliť preberané témy ich náročnosťou aj množstvom učiva čo najrovnomernejšie, aby nedošlo ku ich koncentrácii do jednej časti semestra. Samozrejme bolo pri tom treba brať ohľad aj na to, aby témy v každej z častí boli ucelené a aby boli témy počas celého semestra preberané v chronologickom poradí. Preto sa kurz začína dvoma „servisnými“ kapitolami o množinách a matematickej logike a o dôkazoch v matematike. Po nich nasledujú tri kapitoly všeobecného úvodu do teórie grafov. Týchto 5 kapitol tvorí prvú časť, po ktorej nasleduje prvá zápočtová písomka. Druhá časť sa začína dvoma kapitolami venovanými reláciám, ktoré sa obvykle v podobných kurzoch radia hneď za prednášku o množinách. My sme pre lepšiu vyváženosť tém toto obvyklé radenie porušili a kapitoly o reláciách sme zaradili až na začiatok druhej časti kurzu. Za kapitolami o reláciách nasleduje pre informatikov dôležitá kapitola o vytvárajúcich funkciách. Po tomto intermezze sa opäť vraciame ku teórii grafov a nasledujú 4 kapitoly zaoberajúce sa grafovými algoritmami a aplikáciami teórie grafov. Druhá časť je teda tvorená siedmimi kapitolami. Ale vzhľadom na to, že druhá zápočtová písomka býva obvykle 1-2 týždne pred koncom semestra, bude jej obsahom len 5 kapitol, rovnako ako v prípade prvej zápočtovej písomky. S kompletným obsahom kurzu sa študenti stretnú až na skúškovej písomke.

Na záver by sme sa chceli poďakovať študentom 1. ročníka aplikovanej informatiky v školskom roku 2018/2019, počas ktorého tento text vznikal. Študenti spomenutého ročníka boli jeho prvými čitateľmi a svojím nahlasovaním chýb a preklepov sa pričinili o skvalitnenie výsledného textu. Svojou trochou prispelo mnoho študentov, ale menovite by sme sa chceli poďakovať Richardovi Nemčovičovi, Adamovi Klimkovi a Michalovi Grznárovi, ktorí spolu nahlásili viac než 60 % všetkých chýb nájdených študentami.

V Bratislave, 1. 11. 2019 Jozef Kollár, Marcel Polakovič

Časť prvá

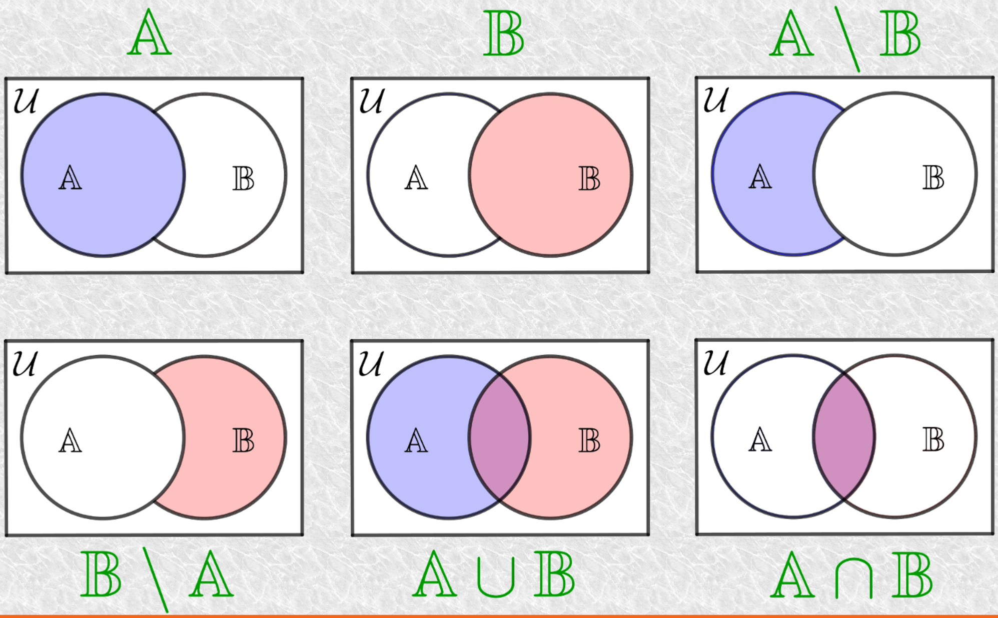
1 Množiny a úvod do logiky 11
1.1 Množiny
1.2 Úvod do matematickej logiky
1.3 Cvičenia

2 Dôkazy v matematike 31
2.1 Priamy dôkaz
2.2 Nepriamy dôkaz
2.3 Dôkaz sporom
2.4 Dôkaz matematickou indukciou
2.5 Cvičenia

3 Základné pojmy teórie grafov 47
3.1 Historický úvod
3.2 Definícia grafu, typy grafov, základné pojmy
3.3 Sledy, ťahy, cesty a cykly v grafe
3.4 Súvislý graf, podgraf, komponent súvislosti
3.5 Kostra grafu
3.6 Cvičenia

4 Reprezentácia grafov, stromy, sledy . . 69
4.1 Reprezentácia grafov
4.2 Stromy
4.3 Koreňové stromy
4.4 Binárne stromy
4.5 Eulerovské ťahy
4.6 Otvorené a uzavreté eulerovské ťahy
4.7 Cvičenia

5 Hamiltonovské cykly, izomorfizmus grafov, ... 95
5.1 Hamiltonovské cykly
5.2 Izomorfizmus grafov
5.3 Rovinnosť grafov
5.4 Katalóg špeciálnych grafov
5.5 Cvičenia



1. Množiny a úvod do logiky

1.1 Množiny

Celá moderná matematika je vybudovaná na pojme množiny. Žiaľ samotný kľúčový pojem *množina* nevieme presne definovať. Pre naše potreby si zatiaľ môžeme vypomôcť nasledovnou opisnou „definíciou“.

Definícia 1.1.1 — Množina. Pod množinou budeme rozumieť nejaký súbor objektov, pričom na poradí týchto objektov a počte opakovaní rovnakých objektov nezáleží.

P Množiny budeme väčšinou označovať pomocou veľkých písmen latinskej abecedy $(\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \ldots)$. Skutočnosť, že objekt a patrí do množiny $\mathbb{A}$ označujeme $a \in \mathbb{A}$. To, že a nepatrí do množiny $\mathbb{A}$, označujeme $a \notin \mathbb{A}$.

Uvedená definícia bude pre nás postačujúca, ale z matematického hľadiska je veľmi problematická. Problémy s takouto definíciou spôsobuje nepresnosť prirodzeného jazyka, pomocou ktorého by sme chceli „súbor objektov“ vymedziť. Viaceré príklady takto problematicky definovaných množín môžeme nájsť v knihe [29]. V teórií množín sa množiny budujú axiomaticky pomocou jazyka teórie množín, ktorý je, na rozdiel od prirodzeného jazyka, exaktný. S týmto prístupom sa môžeme bližšie zoznámiť napr. v knihe [2], samotnú definíciu množiny však ani tam nenájdeme.

Definícia 1.1.2 — Prázdna množina. Prázdna množina je množina, ktorá neobsahuje žiadne prvky. Označujeme ju symbolom $\emptyset$.

P Študenti veľmi často a radi zapisujú prázdnu množinu ako $\{\emptyset\}$, čo je chyba! To, prečo je to nesprávne, vyplýva z nasledovnej definície.

Definícia 1.1.3 — Rovnosť množín. Množiny $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ sa rovnajú práve vtedy, ak obsahujú rovnaké prvky. Ak sa uvedené dve množiny rovnajú, tak sa to zapisuje $\mathbb{A} = \mathbb{B}$. Ak sa nerovnajú, tak to zapisujeme pomocou $\mathbb{A} \neq \mathbb{B}$.

Teraz sa môžeme vrátiť ku predošlej poznámke. Z definície 1.1.3 je už zrejmé, že množiny $\mathbb{A} = \emptyset$ a $\mathbb{B} = \{\emptyset\}$ sa nerovnajú. Množina $\mathbb{A}$ neobsahuje žiadne prvky, je to prázdna množina. A množina

$\mathbb{B}$ obsahuje práve jeden prvok – prázdnu množinu. To, že množiny $\emptyset$ a $\{\emptyset\}$ sú rôzne, vyplýva aj z nasledujúcej definície.

Definícia 1.1.4 — Mohutnosť množiny. Pod mohutnosťou (veľkosťou) množiny budeme rozumieť počet jej prvkov. Mohutnosť množiny $\mathbb{M}$ budeme označovať $|\mathbb{M}|$.

P
- Ak je počet prvkov množiny konečný, tak hovoríme o *konečnej množine*.
- Ak je počet prvkov množiny nekonečný, tak hovoríme o *nekonečnej množine*.

■ **Príklad 1.1** Majme množiny $\mathbb{A} = \emptyset$ a $\mathbb{B} = \{\emptyset\}$. Potom ich mohutnosti sú $|\mathbb{A}| = 0$ a $|\mathbb{B}| = 1$, čím sa opät vraciame ku predošlej poznámke a tomu, že množiny $\emptyset$ a $\{\emptyset\}$ sú rôzne. ■

Množiny s menším počtom prvkov, podľa definície 1.1.1, môžeme zadať vymenovaním ich prvkov. Napríklad $\mathbb{A} = \{1,2,3\}$ a keďže na poradí prvkov nezáleží, tak platí zároveň $\mathbb{A} = \{2,3,1\}$.

■ **Príklad 1.2** Mohutnosť množiny $\mathbb{A} = \{1,2,3\}$ je, podľa definície 1.1.4, $|\mathbb{A}| = 3$.
Mohutnosť množiny $\mathbb{B} = \{2,3,1,3,3\}$ je, podľa definícií 1.1.1 a 1.1.4, $|\mathbb{B}| = 3$. ■

Ak je množina veľká, tak vymenovanie všetkých jej prvkov nie je praktické a v prípade nekonečných množín ani možné. V takom prípade množinu zadávame určením vlastnosti spoločnej práve pre prvky tejto množiny.

■ **Príklad 1.3** Zapíšte množiny párnych $(\mathtt{P})$ a nepárnych $(\mathtt{N})$ prirodzených čísel.
Riešenie: Môžeme použiť buď kombináciu matematického zápisu a prirodzeného jazyka

$$\mathtt{P} = \{x \in \mathbb{N};\ x \text{ je párne}\} \qquad \text{a} \qquad \mathtt{N} = \{x \in \mathbb{N};\ x \text{ je nepárne}\},$$

alebo čisto matematický zápis

$$\mathtt{P} = \{2k;\ k \in \mathbb{N}\} \qquad \text{a} \qquad \mathtt{N} = \{2k-1;\ k \in \mathbb{N}\}.$$

■

Teraz si zadefinujeme vzťahy medzi množinami a operácie s množinami a potom si pripomenieme definície základných číselných množín.

Definícia 1.1.5 — Podmnožina. Majme dve množiny $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$. Potom hovoríme, že
- $\mathbb{A}$ je *podmnožina* $\mathbb{B}$, zapisujeme to $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$, ak platí $\forall a: \ (a \in \mathbb{A} \Rightarrow a \in \mathbb{B})$. Inak povedané, množina $\mathbb{B}$ obsahuje všetky prvky množiny $\mathbb{A}$,
- $\mathbb{A}$ je *vlastná podmnožina* $\mathbb{B}$, zapisujeme to $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$, ak platí $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ a $\mathbb{A} \neq \mathbb{B}$. Inak povedané, množina $\mathbb{B}$ obsahuje všetky prvky množiny $\mathbb{A}$ a tieto dve množiny sa nerovnajú,

■ **Príklad 1.4** Majme množiny $\mathbb{A} = \{1,2\}$ a $\mathbb{B} = \{1,2,3,4\}$. Potom platí $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ a zároveň platí $\mathbb{A} \neq \mathbb{B}$, čiže platí aj $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$. ■

P Pre ľubovoľnú množinu $\mathbb{A}$ platí $\emptyset \subseteq \mathbb{A}$.

Definícia 1.1.6 — Zjednotenie množín. Majme dve množiny $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$. Potom ich zjednotením, označujeme ho $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$, je množina $\mathbb{C}$, pre ktorú platí

$$\mathbb{C} = \mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{x;\ x \in \mathbb{A} \text{ alebo } x \in \mathbb{B}\}.$$

■ **Príklad 1.5** Majme množiny $\mathbb{A} = \{1,2\}$ a $\mathbb{B} = \{1,2,3,4\}$. Potom platí $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{1,2,3,4\}$. ■

Definícia 1.1.7 — Prienik množín. Majme dve množiny $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$. Potom ich prienikom, označujeme ho $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$, je množina $\mathbb{C}$, pre ktorú platí

$$\mathbb{C} = \mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{x;\ x \in \mathbb{A} \text{ a } x \in \mathbb{B}\}\,.$$

■ **Príklad 1.6** Majme množiny $\mathbb{A} = \{1,2,3\}$ a $\mathbb{B} = \{2,3,4,5\}$. Potom platí $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{2,3\}$. ■

Definícia 1.1.8 — Disjunktné množiny. Majme dve množiny $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$. Potom hovoríme, že tieto množiny sú disjunktné, ak platí $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \emptyset$, čiže ak prienik týchto dvoch množín je prázdna množina. Inými slovami, dve množiny sú disjunktné, ak nemajú žiadne spoločné prvky.

■ **Príklad 1.7**

(a) Množiny $\mathbb{A} = \{1,4,5\}$ a $\mathbb{B} = \{2,6\}$ sú disjunktné, pretože platí $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{1,4,5\} \cap \{2,6\} = \emptyset\,.$

(b) Množiny $\mathbb{A} = \{1,4,5\}$ a $\mathbb{B} = \{2,5,6\}$ nie sú disjunktné, pretože platí $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{1,4,5\} \cap \{2,5,6\} = \{5\} \neq \emptyset\,.$

■

Definícia 1.1.9 — Rozdiel množín. Majme dve množiny $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$. Potom ich rozdiel, označujeme ho $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$, je množina $\mathbb{C}$, pre ktorú platí

$$\mathbb{C} = \mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \{x;\ x \in \mathbb{A} \text{ a } x \notin \mathbb{B}\}\,.$$

P Zjednotenie a prienik dvoch množín sú symetrické operácie, čiže platí $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \mathbb{B} \cup \mathbb{A}$ a $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \mathbb{B} \cap \mathbb{A}$. Avšak rozdiel dvoch množín nie je symetrická operácia, vo všeobecnosti neplatí $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} \neq \mathbb{B} \setminus \mathbb{A}$.

■ **Príklad 1.8** Majme množiny $\mathbb{A} = \{1,2,3,4,5\}$ a $\mathbb{B} = \{2,3\}$. Potom platí $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \{1,4,5\}$ a $\mathbb{B} \setminus \mathbb{A} = \emptyset\,.$ ■

Definícia 1.1.10 — Potenčná množina. Majme množinu $\mathbb{A}$. Potom potenčná množina množiny $\mathbb{A}$, označujeme ju $\mathscr{P}(\mathbb{A})$, bude množina

$$\mathscr{P}(\mathbb{A}) = \{\mathbb{X};\ \mathbb{X} \subseteq \mathbb{A}\}\,.$$

Čiže potenčná množina množiny $\mathbb{A}$ je množina všetkých podmnožín množiny $\mathbb{A}$.

■ **Príklad 1.9** Majme množinu $\mathbb{A} = \{a,b,c\}$. Potom

$$\mathscr{P}(\mathbb{A}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

a platí $|\mathbb{A}| = 3$ a $|\mathscr{P}(\mathbb{A})| = 8 = 2^3$. ■

Ďalší pojem, ktorý si potrebujeme zadefinovať, je *univerzum*. Avšak matematicky korektné zadefinovanie tohto pojmu, bez použitia jazyka teórie množín, nie je možné. Každý pokus o popis množinového univerza pomocou prirodzeného jazyka je vopred odsúdený na nepresnosť z matematického hľadiska, rovnako ako pokusy zadefinovať množinu pomocou prirodzeného jazyka. Pre naše obmedzené potreby sa preto pokúsime aspoň o približné vymedzenie pojmu univerzum.

Definícia 1.1.11 — Univerzum. Univerzum bude súhrn všetkých objektov, ktoré v danom kontexte prichádzajú do úvahy. Univerzum, niekedy nazývané aj *univerzálna množina*, budeme označovať symbolom $\mathscr{U}$.

P Predošlá definícia je skutočne veľmi nepresná. V našich úlohach budeme pracovať s rôznymi objektami. Najčastejšie to budú čísla. V takom prípade budú univerzum tvoriť všetky čísla. Pokiaľ by sme pracovali len s prirodzenými číslami a so žiadnymi inými, tak univerzum budú tvoriť len prirodzené čísla. Ak by sme pracovali napr. s písmenami latinskej abecedy, tak univerzum budú tvoriť všetky písmená latinskej abecedy. V iných úlohach môžeme pracovať s farbami, ľuďmi, zvieratami,. . . a vtedy príslušné univerzá budú tvorené všetkými farbami, ľuďmi, alebo zvieratami. . .

Ako vidno z definície 1.1.11, samotné univerzum je tiež množina. Je to množina všetkých, do úvahy prichádzajúcich, objektov. Keď už máme „zadefinované“ univerzum, tak všetky množiny v príkladoch budeme vyberať ako súbory objektov z príslušného univerza. Znamená to, že pre každú množinu $\mathbb{A}$ na univerze $\mathscr{U}$ platí $\mathbb{A} \subseteq \mathscr{U}$. Následne si môžeme definovať ďalší pojem.

Definícia 1.1.12 — Komplementárna množina. Majme množinu $\mathbb{A}$ na univerze $\mathscr{U}$, čiže $\mathbb{A} \subseteq \mathscr{U}$. Potom komplement, niekedy nazývaný aj doplnok, množiny $\mathbb{A}$, označujeme ho $\overline{\mathbb{A}}$, bude množina $\overline{\mathbb{A}} = \mathscr{U} \setminus \mathbb{A}$.

Inak povedané, komplementom množiny $\mathbb{A}$ na univerze $\mathscr{U}$ budú všetky tie prvky univerza $\mathscr{U}$, ktoré nepatria do množiny $\mathbb{A}$.

■ **Príklad 1.10**

(a) Majme univerzum $\mathscr{U} = \{1,2,3,4,5\}$ a množinu $\mathbb{A} = \{1,3,5\}$. Potom $\overline{\mathbb{A}} = \{2,4\}$.

(b) Majme univerzum $\mathscr{U} = \{1,2,3,4,5,6\}$ a množinu $\mathbb{A} = \{1,3,5\}$. Potom $\overline{\mathbb{A}} = \{2,4,6\}$.

■

1.1.1 Základné číselné množiny

Venujme sa teraz základným číselným množinám. Medzi bežné číselné množiny, s ktorými budeme pracovať, patria množiny prirodzených ($\mathbb{N}$), celých ($\mathbb{Z}$), racionálnych ($\mathbb{Q}$), reálnych ($\mathbb{R}$) a komplexných ($\mathbb{C}$) čísel. Ešte existujú aj iracionálne čísla (to sú tie reálne čísla, ktoré nie sú racionálne) a aj ďalšie číselné množiny, ale tie v tomto kurze potrebovať nebudeme.

Definícia 1.1.13 — Prirodzené čísla. Prirodzené čísla sú čísla používané na počítanie počtu objektov, alebo určovanie ich poradia. Množina prirodzených čísel je najmenšia nekonečná množina, označuje sa písmenom $\mathbb{N}$ a platí $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$.

P V axiomatickej teórii množín, rovnako ako aj v informatike, sa nula považuje za prirodzené číslo. Avšak v školskej matematike sa nula obvykle neradí medzi prirodzené čísla a platí $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$.

■ **Príklad 1.11** Pre $a,b \in \mathbb{N}$ riešte, na množine prirodzených čísel, rovnicu $a + x = b$.

Riešenie: V prípade, že $a < b$ nemáme žiaden problém. Vtedy bude riešením rovnice $x = b - a$, pričom $x \in \mathbb{N}$. Avšak pre $a > b$ uvedenú rovnicu vyriešiť nevieme, pretože $x = b - a$ nie je prirodzené číslo. Riešenie takýchto rovníc (obchodnícke a účtovnícke počty) si vynútilo rozšírenie množiny prirodzených čísel. ■

Definícia 1.1.14 — Celé čísla. Množina celých čísel je rozšírením množiny prirodzených čísel. Patria do nej prirodzené čísla a prirodzené čísla so znamienkom mínus. Množina celých čísel sa označuje písmenom $\mathbb{Z}$ a platí

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

■ **Príklad 1.12** Pre $a, b \in \mathbb{Z}$ riešte, na množine celých čísel, rovnicu $ax = b$.

Riešenie: Takýto typ rovníc sa opäť často vyskytuje v obchodníckych a účtovníckych počtoch. Riešením rovnice je $x = \frac{b}{a}$. Je však jasné, že pre ľubovoľné hodnoty $a, b \in \mathbb{Z}$, nemusí byť číslo $\frac{b}{a}$ celým číslo. Preto uvedená rovnica vo všeobecnosti nemá na celých číslach riešenie a množinu celých čísel potrebujeme rozšíriť. ■

Definícia 1.1.15 — Racionálne čísla. Množina racionálnych čísel je rozšírením množiny celých čísel a označujeme ju $\mathbb{Q}$. Platí

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b};\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}.$$

V staroveku sa ľudia zopár storočí domnievali, že už iné ako racionálne čísla neexistujú. Napríklad jeden zo základných článkov učenia sekty pytagorejcov bol, že všetky čísla sa dajú vyjadriť v tvare zlomku. Hippasos, jeden z členov pytagorejskej sekty žijúci v 5. storočí pred n. l. zistil, že tomu tak nie je. Podľa legendy bol za to zo sekty vylúčený a utopený v mori. Podľa iných zdrojov išlo o nehodu.

■ **Príklad 1.13** Pre $a, b \in \mathbb{Q}$ riešte, na množine racionálnych čísel, rovnicu $a^2 + b^2 = x^2$.

Riešenie: Uvedená rovnica už nemá nič spoločné s obchodnými a účtovníckymi počtami. Táto rovnica súvisí s počítaním dĺžky prepony pravouhlého trojuholníka (Pythagorova veta), ktorého odvesny majú dĺžky a a b. Ak si položíme $a = b = 1$, tak dostaneme riešenie $x^2 = 2$, pričom kladným riešením (počítame dĺžku prepony a tá nemôže byť záporná) bude $\sqrt{2}$. Už Hippasos v 5. storočí pred n. l. prišiel na to, že číslo $\sqrt{2}$ sa nedá zapísať ako zlomok. Ale až Euklides z Alexandrie ([14], str. 47) v 4. storočí pred n. l. prelomil bariéru a formálne dokázal, že číslo $\sqrt{2}$ nie je racionálne. Takýmto číslam sa potom začalo hovoriť *iracionálne*. ■

P Medzi najznámejšie iracionálne čísla patria $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ a konštanty π a e.

Ak dáme dokopy racionálne a iracionálne čísla, dostaneme ďalšiu číselnú množinu.

Definícia 1.1.16 — Reálne čísla. Množina reálnych čísel je zjednotením množín racionálnych a iracionálnych čísel a označujeme ju $\mathbb{R}$.

Podobne ako pri množine racionálnych čísel sa aj pri reálnych číslach ukázalo, že to ešte nie sú všetky „čísla“.

■ **Príklad 1.14** Pre $a \in \mathbb{R}$ riešte, na množine reálnych čísel, rovnicu $x^2 = a$.

Riešenie: Uvedená rovnica nemá vo všeobecnosti na množine reálnych čísel riešenie. Ak si napríklad položíme $a = -1$, tak dostávame rovnicu $x^2 = -1$ a riešenia $x_{1,2} = \pm\sqrt{-1}$ nie sú reálne čísla. ■

Riešením rovníc typu $x^2 = a$ sa teda dostávame ku komplexným číslam. Prvý známy náznak toho, že reálne čísla ešte nie sú všetky možné čísla, sa nachádza v úlohach Heróna Alexandrijského z 1. storočia n. l. z tzv. *Moskovského papyrusu* ([14], str. 113). Definitívne boli komplexné čísla do matematiky zavedené až v 15. storočí, v súvislosti s riešením kubických rovníc.

Definícia 1.1.17 — Komplexné čísla. Množina komplexných čísel, označujeme ju $\mathbb{C}$, je množina

$$\mathbb{C} = \{a + i.b;\ a, b \in \mathbb{R}\},$$

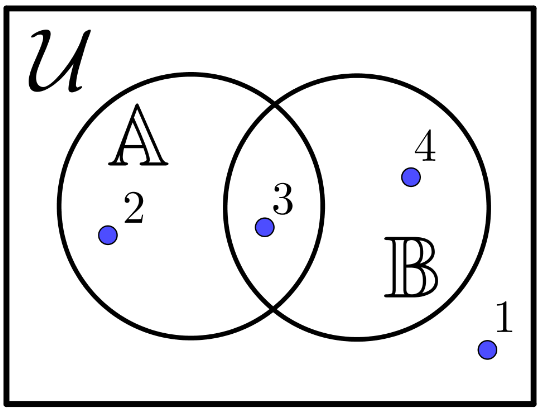
kde i sa nazýva imaginárna jednotka a definuje sa ako $i = \sqrt{-1}$.

Komplexnými číslami sa náš exkurz do číselných množín končí. Vďaka *Základnej vete algebry* vieme, že každá algebraická rovnica s komplexnými koeficientami má všetky riešania v komplexných číslach. Z hľadiska algebraických rovníc je preto množina komplexných čísel úplná. Avšak ani komplexné čísla ešte nie sú „všetky“ čísla ([14] str. 121–123). V 40. rokoch 19. storočia najskôr Hamilton rozšíril komplexné čísla na *kvaterniony*, čo sú čísla s reálnou a troma *kvaternionovými jednotkami*. Hamilton takto vlastne objavil prvú nekomutatívnu algebru. Kvaterniony sa neskôr ukázali byť viac, než len čisto abstraktné matematické cvičenie. V súčasnosti majú široké využitie v matematickej fyzike, v astronómii, vo vyššej geometrii a v počítačovej grafike. Krátko po Hamiltonovi jeho priateľ Graves a nezávisle od neho ešte Arthur Cayley rozšírili kvaterniony na *oktoniony*, čo sú čísla s reálnou a siedmimi *oktonionovými jednotkami*. Množina oktonionov je už kompletná. Zjednodušene povedané, žiadne ďalšie číselné množiny už neexistujú. Na dôkaz tejto skutočnosti si matematici museli počkať viac než 100 rokov od objavu oktonionov. Až v roku 1958 dokázali Michel André Kervaire a John Milnor, že existujú práve štyri algebraické štruktúry, v ktorých sa dá zmysluplne zaviesť delenie medzi ich prvkami. Sú nimi 1-, 2-, 4- a 8- rozmerné štruktúry. Tieto štruktúry, interpretované ako čísla, zodpovedajú reálnym a komplexným číslam, kvaternionom a oktonionom ([14], str. 123). Žiadne ďalšie druhy čísel už hľadať nemusíme, pretože neexistujú.

1.1.2 Vennove diagramy

Vennove diagramy sú grafický spôsob vyjadrenia príslušnosti objektov z daného univerza do množín a vzťahov medzi týmito množinami. Samotné univerzum sa zvykne kresliť ako obdĺžnik a jednotlivé množiny ako v ňom ležiace kruhy. Vennove diagramy a ich využitie si ilustrujeme na niekoľkých príkladoch.

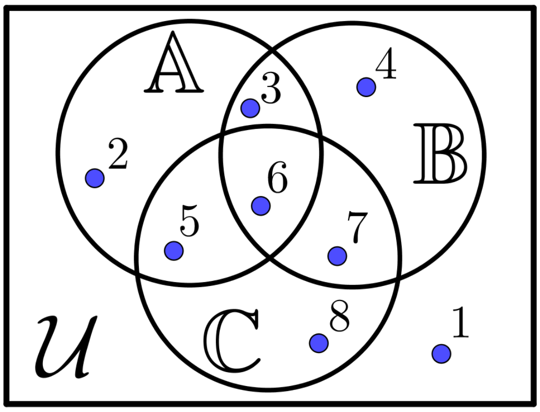
■ **Príklad 1.15** Majme dané univerzum $\mathscr{U} = \{1,2,3,4\}$ a v ňom dve množiny $\mathbb{A} = \{2,3\}$ a $\mathbb{B} = \{3,4\}$. Túto situáciu potom zakreslíme nasledovným Vennovým diagramom, z ktorého hneď vidno, že platia uvedené vzťahy



- $\emptyset = (\mathbb{A} \setminus \overline{\mathbb{B}}) \setminus (\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$
- $\{1\} = \overline{\mathbb{A} \cup \mathbb{B}} = \overline{\mathbb{A}} \cap \overline{\mathbb{B}}$
- $\{2\} = \mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \mathbb{A} \cap \overline{\mathbb{B}}$
- $\{3\} = \mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \overline{\overline{\mathbb{A}} \cup \overline{\mathbb{B}}}$
- $\{4\} = \mathbb{B} \setminus \mathbb{A} = \overline{\mathbb{A}} \cap \mathbb{B}$

■

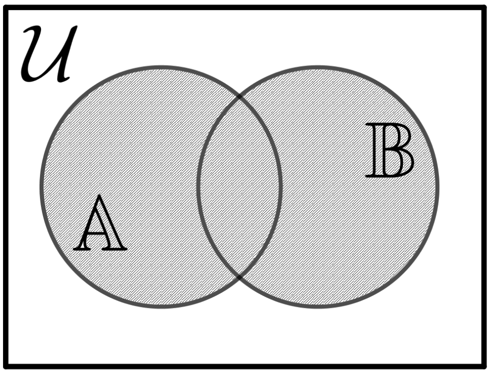
■ **Príklad 1.16** Dané je univerzum $\mathscr{U} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ a v ňom tri množiny $\mathbb{A} = \{2,3,5,6\}$, $\mathbb{B} = \{3,4,6,7\}$ a $\mathbb{C} = \{5,6,7,8\}$. Túto situáciu potom zakreslíme nasledovným Vennovým diagramom, z ktorého hneď vidno, že platia uvedené vzťahy



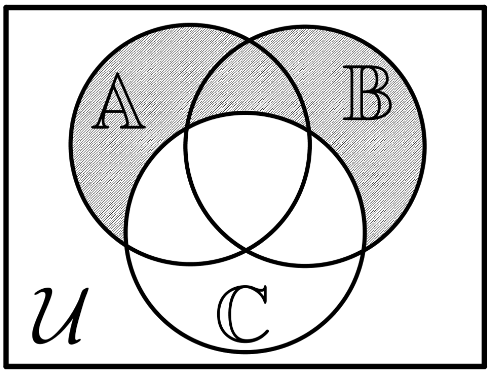
- $\{1\} = \overline{\mathbb{A} \cup \mathbb{B} \cup \mathbb{C}} = \overline{\mathbb{A}} \cap \overline{\mathbb{B}} \cap \overline{\mathbb{C}}$
- $\{2\} = \mathbb{A} \setminus (\mathbb{B} \cup \mathbb{C}) = \mathbb{A} \cap \overline{\mathbb{B}} \cap \overline{\mathbb{C}}$
- $\{3\} = (\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) \setminus \mathbb{C} = \mathbb{A} \cap \mathbb{B} \cap \overline{\mathbb{C}}$

■

■ **Príklad 1.17** Ak máme dané univerzum $\mathscr{U}$ a na ňom tri množiny $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ a $\mathbb{C}$, tak zťahy $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ a $(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) \setminus \mathbb{C}$ medzi týmito množinami, zakreslíme pomocou Vennových diagramov takto



$\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$



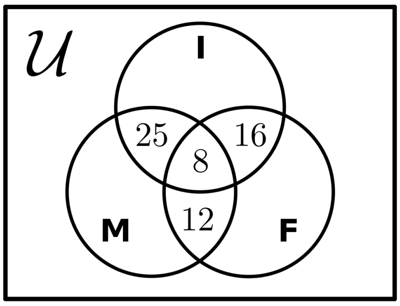
$(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) \setminus \mathbb{C}$

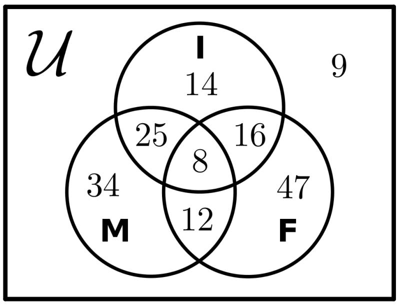
■

■ **Príklad 1.18** V 1. ročníku je 165 študentov. Všetci títo študenti by mali navštevovať prednášky z matematiky, fyziky aj informatiky. Avšak len 8 študentov navštevuje všetky tri prednášky z matematiky, fyziky aj informatiky, 33 študentov navštevuje prednášky z matematiky a informatiky, 20 študentov navštevuje prednášky z matematiky a fyziky, 24 študentov navštevuje prednášky z fyziky a informatiky, 79 študentov navštevuje prednášky z matematiky, 83 študentov navštevuje prednášky z fyziky a 63 študentov navštevuje prednášky z informatiky. Koľko študentov nenavštevuje žiadnu z uvedených prednášok?

<u>Riešenie:</u> Situáciu popísanú v zadaní si zakreslíme pomocou Vennovho diagramu. Treba si však uvedomiť, že študenti, navštevujúci všetky tri prednášky, sú zarátaní aj medzi študentami, ktorí navštevujú dve, alebo jednu prednášku. Napríklad sa v zadaní hovorí, že matematiku navštevuje 79 študentov. Niektorí z nich však môžu navštevovať aj prednášky z fyziky, a /alebo informatiky. Preto si uvedené počty zo zadania musíme upraviť. Najskôr do obrázku zapíšeme len počty študentov, ktorí navštevujú všetky tri prednášky a počty študentov, ktorí navštevujú práve dve z uvedených troch prednášok.

Na obrázku vpravo máme zapísané počty študentov, ktorí navštevujú všetky tri prednášky a počty študentov, navštevujúcich práve dve z uvedených troch prednášok. Teraz si podľa zadania úlohy môžeme dopočítať počty študentov, ktorí navštevujú práve jednu prednášku.



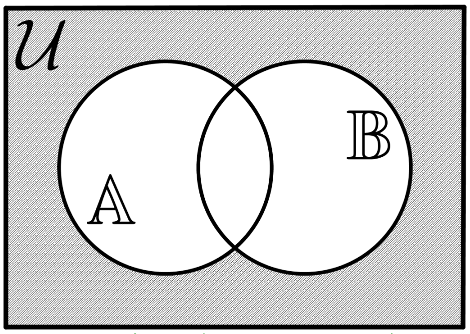


Na obrázku vľavo máme zapísané počty študentov, ktorí navštevujú všetky tri prednášky, počty študentov, navštevujúcich práve dve z uvedených troch prednášok a počty študentov navštevujúcich práve jednu z uvedených troch prednášok. Keď si všetky tieto počty zrátame, tak zistíme koľkí študenti nenavštevujú žiadnu z uvedených troch prednášok (koľko študentov chýba do celkového počtu 165). Takých študentov je 9.

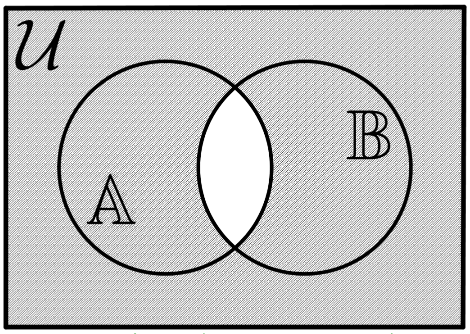
Uvedený postup sa nazýva *princíp zapojenia-vypojenia* a pre viac než 2–3 množiny sa dá realizovať aj menej ťažkopádnym spôsobom než je kreslenie Vennových diagramov. ∎

∎ **Príklad 1.19** Ak máme dané univerzum $\mathscr{U}$ a na ňom množiny, napr. $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$, tak pomocou Vennových diagramov vieme zakresliť rôzne vzťahy medzi týmito množinami. Napríklad

$$\overline{\mathbb{A}\cup\mathbb{B}} = \overline{\mathbb{A}}\cap\overline{\mathbb{B}} = \mathscr{U}\setminus(\mathbb{A}\cup\mathbb{B}) \qquad \text{alebo} \qquad \overline{\mathbb{A}\cap\mathbb{B}} = \overline{\mathbb{A}}\cup\overline{\mathbb{B}} = \mathscr{U}\setminus(\mathbb{A}\cap\mathbb{B}).$$



$\mathcal{U}\setminus(\mathbb{A}\cup\mathbb{B})$



$\mathcal{U}\setminus(\mathbb{A}\cap\mathbb{B})$

∎

1.1.3 Kartézsky súčin množín a usporiadané n-tice

Definícia 1.1.1 hovorí, že v množine nezáleží na poradí jej objektov. Niekedy však potrebujeme, aby na poradí objektov záležalo. Zavedieme si preto nasledovný pojem.

Definícia 1.1.18 — Usporiadaná dvojica. Pod usporiadanou dvojicou, budeme rozumieť dvojicu objektov a a b, na ktorých poradí záleží. Označovať ju budeme (a,b).

Pokiaľ $a \neq b$, tak $(a,b) \neq (b,a)$. Rovnosť dvoch usporiadaných dvojíc je definovaná predpisom

$$(a,b) = (c,d) \iff \big((a=c) \;\wedge\; (b=d)\big).$$

P Analogicky ako usporiadanú dvojicu, môžeme definovať aj usporiadanú trojicu, štvoricu a vo všeobecnosti n-ticu.

Pomocou usporiadaných dvojíc následne môžeme definovať kartézsky (karteziánsky) súčin dvoch množín.

Definícia 1.1.19 — Kartézsky súčin. Majme dve množiny $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$. Potom ich kartézsky súčin, označujeme ho $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, sa definuje ako

$$\mathbb{X} \times \mathbb{Y} = \{(x,y);\, x \in \mathbb{X} \text{ a } y \in \mathbb{Y}\}\,.$$

P Podobne ako pri usporiadaných dvojiciach, aj pri kartézskom súčine môžeme analogicky definovať kartézsky súčin troch, štyroch a vo všeobecnosti n množín.

■ **Príklad 1.20** Dané sú dve množiny $\mathbb{A} = \{1,2\}$ a $\mathbb{B} = \{a,b\}$. Potom

$$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\} \qquad \mathbb{B} \times \mathbb{A} = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}\,.$$

Vidíme teda, že vo všeobecnosti platí $\mathbb{A} \times \mathbb{B} \neq \mathbb{B} \times \mathbb{A}$. Platí však nasledujúca veta. ■

Veta 1.1.1 — Veta o mohutnosti kartézskeho súčinu. Majme dve konečné množiny $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$. Potom platí $|\mathbb{A} \times \mathbb{B}| = |\mathbb{A}| \cdot |\mathbb{B}|$.

P Kartézsky súčin množiny samej so sebou, budeme označovať aj ako mocninu množiny. Napríklad

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2 \quad \text{alebo} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 \quad \ldots$$

1.2 Úvod do matematickej logiky

Úlohou tejto časti nie je nahradiť prednášky z matematickej logiky, ale len zopakovať si základné pojmy, definície logických spojok a ich vlastností a pripomenúť si význam kvantifikátorov. Ako dobrý zdroj informácií o matematickej logike môžu poslúžiť skriptá [9], ktoré sú voľne stiahnuteľné, prípadne kniha [27]. Základným pojmom, s ktorým v matematickej logike pracujeme je *logický výrok*.

Definícia 1.2.1 — Logický výrok. Logický výrok je oznamovacia veta, o ktorej pravdivosti sa vieme presvedčiť, t. j. poznáme jej pravdivostnú hodnotu.

P V prípade logického výroku musí byť rozhodnuteľné, či je pravdivý, alebo nepravdivý. Každý logický výrok má jednoznačnú pravdivostnú hodnotu: buď `PRAVDA` alebo `NEPRAVDA`. Podľa toho potom hovoríme o pravdivých alebo nepravdivých výrokoch.

Logické výroky budeme obvykle označovať veľkými písmenami latinskej abecedy, napr. $A,B,\ldots$. Okrem toho budeme používať aj logické premenné a označovať ich malými písmenami latinskej abecedy, napr. $p,q,\ldots$ Logická premenná bude taká premenná, za ktorú môžeme dosadiť nejaký logický výrok. Pravdivostnú (logickú) hodnotu logických výrokov budeme označovať písmenami `P` (pravda) a `N` (nepravda), alebo číslami 1 alebo 0, pričom 1 označuje pravdu a 0 nepravdu. Logické výroky môžeme pomocou logických spojok spájať do zložitejších výrokových formúl. To ako sa to robí popisuje jazyk výrokovej logiky, ktorým sa tu my zaoberať nebudeme a čitateľov len odkazujeme na už spomenuté skriptá [9]. Logické spojky sa zvyknú nazývať aj operátory, alebo logické funkcie.

Definícia 1.2.2 — Logické spojky. Medzi základné logické spojky sa radia:
- ▷ *negácia*, označujeme ju symbolom $\neg$, je unárna logická spojka,
- ▷ *konjunkcia*, logické „a“, označujeme ju symbolom $\wedge$, je binárna logická spojka,
- ▷ *disjunkcia*, logické „alebo“, označujeme ju symbolom $\vee$, je binárna logická spojka,
- ▷ *implikácia*, označujeme ju symbolom $\Rightarrow$, je binárna logická spojka a
- ▷ *ekvivalencia*, označujeme ju symbolom $\Leftrightarrow$, je binárna logická spojka.

Pomocou logických spojok môžeme buď nejakým spôsobom meniť hodnotu logického výroku, v prípade unárnej spojky $\neg$, alebo spájať dva logické výroky, v prípade binárnej spojky. Napríklad ak A a B sú dva logické výroky, tak ich spojením, napr. implikáciou $A \Rightarrow B$, dostávame tiež logický výrok, ktorý sa navýva *výroková formula*. Pôvodné logické výroky tejto formuly, t. j. A a B sa nazývajú *prvotné formuly*, alebo aj *atomické formuly*.

My si teraz postupne definujeme uvedených päť logických spojok pomocou ich pravdivostných tabuliek. Avšak nie všetky uvedené spojky sú potrebné. Napríklad posledné dve sa dajú zapísať pomocou prvých troch. Pri axiomatickom prístupe k matematickej logike (viď [9]) používame jazyk matematickej logiky, ktorý využíva z uvedených spojok len negáciu a implikáciu. Všetky ostatné spojky sa dajú zapísať pomocou týchto dvoch. Ale s uvedenými piatimi spojkami sa väčšinou stretávajú už žiaci stredných škôl, pokiaľ preberajú logiku, a preto sa medzi základné spojky obvykle zaraďujú. Okrem toho sa pri konštrukcii logických obvodov často stretávame aj s logickými spojkami xor, nand a nor.

Pravdivostné tabuľky, pomocou ktorých budeme definovať logické spojky, sú tabuľky, v ktorých pre všetky možné hodnoty prvotných formúl budú uvedené pravdivostné hodnoty zložených výrokových formúl. Ešte skôr než sa pustíme do definícií logických spojok, uvedieme si definície *tautológie* a *kontradikcie*.

Definícia 1.2.3 — Tautológia a kotradikcia. Tautológie a kontradikcie sú dva špeciálne typy výrokových formúl.
- ▷ *Tautológia* je taká výroková formula, ktorá je vždy pravdivá, bez ohľadu na pravdivostné hodnoty svojich prvotných formúl.
- ▷ *Kontradikcia* je taká výroková formula, ktorá je vždy nepravdivá, bez ohľadu na pravdivostné hodnoty svojich prvotných formúl.

A teraz sľúbené logické spojky.

Definícia 1.2.4 — Negácia ($\neg$). Negácia je unárna logická spojka, čiže vzťahuje sa len na jeden logický výrok. Tabuľka pravdivostných hodnôt pre negáciu je nasledovná

p	$\neg p$
0	1
1	0

Z pravdivostnej tabuľky vidíme, že negácia mení (neguje) pravdivostnú hodnotu logického výroku. Pravdivé výroky mení na nepravdivé a naopak.

Definícia 1.2.5 — Konjunkcia ($\wedge$). Konjunkcia, alebo aj logické „a“, je binárna logická spojka, čiže spája dva logické výroky. Tabuľka pravdivostných hodnôt pre konjunkciu je nasledovná

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ak konjunkciou spojíme dva logické výroky, tak výsledný výrok bude pravdivý len ak oba pôvodné výroky sú pravdivé. Čiže musí byť pravdivý prvý a druhý výrok súčasne.

Definícia 1.2.6 — Disjunkcia ($\vee$). Disjunkcia, alebo aj logické „alebo“, je binárna logická spojka, čiže spája dva logické výroky. Tabuľka pravdivostných hodnôt pre disjunkciu je nasledovná

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Disjunkcia, logické „alebo“, nie je vylučovacie „alebo“, ako sa to často používa v bežnej hovorovej reči. Ak v bežnom rozhovore niekto povie: „*Večer pôjdem do divadla, alebo do kina.*“ tak tým obvykle chce povedať, že pôjde buď do divadla, alebo do kina, ale nie súčasne do oboch. Ak ale disjunkciou spojíme dva logické výroky, tak výsledný výrok bude pravdivý ak aspoň jeden z pôvodných výrokov je pravdivý. Čiže výsledný výrok je pravdivý aj keď sú oba pôvodné výroky súčasne pravdivé. Preto ak sa matematika, novopečeného otca, opýtate: „*Je to chlapec, alebo dievčatko?*“, tak od neho dostanete matematicky korektnú, správnu a zároveň nič nehovoriacu[1] odpoveď „*Áno*“.

Definícia 1.2.7 — Implikácia ($\Rightarrow$). Implikácia je binárna logická spojka, čiže spája dva logické výroky. Tabuľka pravdivostných hodnôt pre implikácia je nasledovná

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Implikácia je vyjadrovaná slovnou konštrukciou „ak ... tak ... “, je intuitívne zrejme najťažšie pochopiteľná logická spojka. Bežným ľuďom, v rôznych logických hlamolamových úlohach, robí spomedzi všetkých logických spojok najväčšie problémy, o čom sa môžeme sami presvedčiť v úlohách na konci kapitoly. Problém s implikáciou je v tom, že ak ňou spojíme dva logické výroky, tak výsledný výrok bude pravdivý ak prvý výrok je nepravdivý alebo druhý výrok je pravdivý (opäť tu nie je použité vylučovacie „alebo“). Takže výrok

„*Ak päť plus päť je dva, tak* xyz“

[1] „nič nehovoriacu“ – dvojitá negácia, čo je špecialita mnohých slovanských jazykov a logický nezmysel.

bude pravdivý, nech by sme xyz nahradili akýmkoľvek výrokom.

Definícia 1.2.8 — Ekvivalencia ($\Leftrightarrow$). Ekvivalencia je binárna logická spojka, čiže spája dva logické výroky. Tabuľka pravdivostných hodnôt pre ekvivalenciu je nasledovná

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ekvivalencia sa vyjadruje konštrukciou „... práve vtedy keď ...“. Ak dva výroky spojíme ekvivalenciou, tak výsledný výrok bude mať pravdivú hodnotu práve vtedy, keď oba pôvodné výroky budú mať rovnakú pravdivostnú hodnotu. Čiže keď oba pôvodné výroky sú súčasne pravdivé, alebo sú oba súčasne nepravdivé.

Spôsob, akým môžeme z prvotných formúl a logických spojok konštruovať komplexnejšie výrokové formuly, nie je ľubovoľný. Napríklad konštrukcie $A \Leftrightarrow$, alebo $\Rightarrow \neg A$, alebo $A \Rightarrow B \Rightarrow C$, nie sú výrokové formuly. Takže teraz si uvedieme definíciu toho, čo výroková formula je.

Definícia 1.2.9 — Výroková formula. Majme množinu prvotných formúl, označme si ju $\mathbb{P}$. Potom pomocou prvotných formúl a logických spojok výrokovú formulu skonštruujeme, ak konečný počet krát aplikujeme nasledovne pravidlá

1. Každá prvotná formula z množiny $\mathbb{P}$, čiže každé $p \in \mathbb{P}$, je výroková formula.
2. Ak A a B sú výrokové formuly, tak potom aj
$$(\neg A) \quad , \quad (A \wedge B) \quad , \quad (A \vee B) \quad , \quad (A \Rightarrow B) \quad \text{a} \quad (A \Leftrightarrow B)$$
sú výrokové formuly.

P Pri definícii výrokovej formuly sme použili aj zátvorky, symboly ( ), ktoré dovtedy neboli spomenuté. Pomocou zátvoriek sa určuje priorita operácií, aplikovania logických spojok, pretože táto nie je vždy jednoznačná. V istých situáciach možno zátvorky vynechať, ale pokiaľ si nie sme istí, je lepšie ich písať. Napríklad

- Vonkajšie zátvorky výrokovej formuly možno vždy vynechať. Napríklad $(A \wedge (B \Rightarrow C))$ môžeme a budeme zapisovať ako $A \wedge (B \Rightarrow C)$.
- $A \wedge B \wedge C$ bude výroková formula aj bez použitia zátvoriek, pretože $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$. Čiže bez ohľadu na to, akým spôsobom zátvorky zapíšeme, výsledok bude mať vždy rovnakú pravdivostnú hodnotu.
- $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ nie je výroková formula, pretože do úvahy prichádzajú dve výrokové formuly $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ a $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$. Tieto dve výrokové formuly sú rôzne, majú rôzne pravdivostné hodnoty a nie je jasné, ktorá z týchto dvoch výrokových formúl je zápisom $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ myslená.

Definícia 1.2.10 — Tautologicky ekvivalentné formuly. Majme dve výrokové formuly A a B. Tieto dve formuly sa nazývajú tautologicky ekvivalentné, alebo stručne len ekvivalentné, ak výroková formula $A \Leftrightarrow B$ je tautológia.

Pojmy, ktoré sme si doteraz definovali, t. j. výroky, prvotné formuly, logické spojky a výrokové formuly, sú súčasťou tzv. *výrokovej logiky*. My však budeme potrebovať viac než len výrokovú logiku. Výroky často budú hovoriť o objektoch z istej množiny, napr. čísla, ľudia atď., ktoré budú alebo nebudú mať nejaké vlastnosti. Objekty, s ktorými budeme pracovať budú patriť do nejakého univerza. Bude to napríklad množina všetkých prirodzených, celých, alebo reálnych čísel, prípadne všetci ľudia, alebo všetci muži, alebo všetky ženy atď. V našich výrokových formulách budeme potrebovať vyjadriť aj to, koho alebo akej skupiny objektov sa daný výrok týka. Na to potrebujeme zaviesť pojem kvantifikátoru a vlastností (predikátov), ktoré objekty môžu nadobúdať. Kvantifikátory budeme používať dva – všeobecný a existenčný.

Definícia 1.2.11 — Kvantifikátory. Majme univerzum objektov $\mathbb{P}$ a nech premenná p vyjadruje objekt z tohto univerza. Toto budeme označovať pomovou $p \in \mathbb{P}$. Potom

- Symbol $\forall$ sa nazýva *všeobecný kvantifikátor* a zápis $\forall p \in \mathbb{P}$ znamená *pre všetky objekty z univerza* $\mathbb{P}$.
- Symbol $\exists$ sa nazýva *existenčný kvantifikátor* a zápis $\exists p \in \mathbb{P}$ znamená *existuje (nejaký) objekt z univerza* $\mathbb{P}$.

P Ak by sme si zobrali za univerzum $\mathbb{P}$ všetkých žijúcich ľudí, tak potom výroková formula

$$\forall p \in \mathbb{P} : \text{„}p \text{ dýcha“}$$

hovorí o tom, že každý žijúci človek dýcha a bude to pravdivá formula. Takže uvedené tvrdenie musí byť pravdivé pre každého jedného žijúceho človeka. Druhý príklad bude výroková formula

$$\exists p \in \mathbb{P} : \text{„}p \text{ má hnedé oči“}$$

hovorí o tom, že existuje človek, ktorý má hnedé oči a táto formula je tiež pravdivá. Pritom stačí ak spomedzi všetkých žijúcich ľudí existuje jeden konkrétny človek, pre ktorého je uvedené tvrdenie pravdivé.

Výroková logika rozšírená o kvantifikátory a predikáty (vlastnosti objektov) tvorí tzv. *predikátovú logiku* a jej jazyk sa nazýva *jazyk prvého rádu*. Pre podrobnejšie informácie viď [9].

Pri výrokových formulách predikátovej logiky si treba dať pozor práve pri práci s kvantifikátormi. V dôsledku nepresností vo vyjadrovaní sa pomocou bežného hovorového jazyka, často dochádza ku chybám. Ak napríklad máme výrok:

„Všetky okná sú špinavé.“

tak jeho negáciou nie je výrok: *„Všetky okná sú čisté.“*, ale jeho negáciou je výrok

„Existuje okno, ktoré nie je špinavé.“

Čiže negáciu kvantifikovaných výrokových formúl dostaneme tak, že zmeníme kvantifikátor ($\forall \leftrightarrow \exists$) a negujeme výrok.

$$\neg(\forall p \in \mathbb{P} : \textit{výrok}) \Leftrightarrow (\exists p \in \mathbb{P} : \neg\textit{výrok}) \quad \text{a} \quad \neg(\exists p \in \mathbb{P} : \textit{výrok}) \Leftrightarrow (\forall p \in \mathbb{P} : \neg\textit{výrok})$$

■ **Príklad 1.21** Uvedieme si niekoľko pravdivých (P) a nepravdivých (N) výrokových formúl predikátovej logiky. Všetky tieto formuly budú hovoriť o reálnych číslach. Univerzom preto bude množina reálnych čísel $\mathbb{R}$.

a) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ (P)
b) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$ (N)
c) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ (P)
d) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$ (N)
e) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x^2 + y^2 \geq 4$ (N)
f) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x^2 + y^2 < 4$ (P)
g) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x^2 + y^2 > 4$ (P)
h) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x^2 + y^2 \leq 4$ (N)
i) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\exists z \in \mathbb{R}) : x + y = z$ (P)
j) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R}) : x + y \neq z$ (N)

V uvedených príkladoch sú dvojice a)$\leftrightarrow$b), c)$\leftrightarrow$d), ..., i)$\leftrightarrow$j) vzájomné negácie. ■

1.3 Cvičenia

Cvičenie 1.1 Dokážte, že ak $|\mathbb{A}| = n$, tak $|\mathscr{P}(\mathbb{A})| = 2^n$. ■

Cvičenie 1.2 Vypíšte všetky prvky množiny

(a) $\mathbb{A} = \{x;\ x \leq 100,\ x \text{ je prvočíslo}\}$
(b) $\mathbb{A} = \{x;\ x \leq 100,\ x \text{ je prvočíslo},\ x \text{ je párne}\}$
(c) $\mathbb{A} = \{x;\ x \leq 100,\ 7 \mid (x+2),\ x \text{ je prvočíslo}\}$
(d) $\mathbb{A} = \{x;\ x \leq 100,\ 7 \mid (x+1),\ x \text{ je prvočíslo}\}$ ■

Cvičenie 1.3 Majme dané $\mathscr{U} = \{1,2,3,\dots,9,10\}$, $\mathbb{A} = \{1,4,7,10\}$, $\mathbb{B} = \{1,2,3,4,5\}$ a $\mathbb{C} = \{2,4,6,8\}$. Nájdite

(a) $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$
(b) $\mathbb{B} \cap \mathbb{C}$
(c) $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$
(d) $\mathbb{B} \setminus \mathbb{A}$
(e) $\overline{\mathbb{A}}$
(f) $\mathscr{U} \setminus \mathbb{C}$
(g) $\overline{\mathscr{U}}$
(h) $\mathbb{A} \cup \emptyset$
(i) $\mathbb{B} \cap \emptyset$
(j) $\mathbb{A} \cup \mathscr{U}$
(k) $\mathbb{B} \cap \mathscr{U}$
(l) $\mathbb{A} \cap (\mathbb{B} \cup \mathbb{C})$
(m) $\overline{\mathbb{A}} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{B})$
(n) $\overline{\mathbb{B}} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{A})$
(o) $\underline{(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})} \setminus \mathbb{C}$
(p) $\overline{(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})} \cup \mathbb{C}$
(q) $(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) \setminus \overline{(\mathbb{C} \setminus \mathbb{B})}$
(r) $(\mathbb{A} \cap \overline{\mathbb{B}}) \cup (\mathscr{U} \setminus (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{A}}))$ ■

Cvičenie 1.4 Určte mohutnosť množiny

(a) $\emptyset$
(b) $\{\emptyset\}$
(c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
(d) $\big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\big\}$
(e) $\Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \big\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\big\}\Big\}$
(f) $\{a,b,a,c\}$
(g) $\{a, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, b\}$
(h) $\{\emptyset, a, \{\emptyset\}, \{a\}\}$ ■

Cvičenie 1.5 Dokážte, že $\mathbb{A} \neq \mathbb{B}$

(a) $\mathbb{A} = \{1,2,3\}$, $\mathbb{B} = \emptyset$
(b) $\mathbb{A} = \{1,3,5\}$, $\mathbb{B} = \{n;\ n \in \mathbb{Z}^+,\ n^2 - 1 < n\}$
(c) $\mathbb{A} = \{1,2\}$, $\mathbb{B} = \{x;\ x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0\}$
(d) $\mathbb{B} = \{1,2,3,4\}$, $\mathbb{C} = \{2,4,6,8\}$ a $\mathbb{A} = \mathbb{B} \cap \mathbb{C}$ ■

Cvičenie 1.6 Zistite, ktoré dvojice množín $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ sa rovnajú

(a) $\mathbb{A} = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}$, $\mathbb{B} = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \emptyset\big\}$
(b) $\mathbb{A} = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \emptyset, \{\emptyset\}\big\}$, $\mathbb{B} = \big\{\{\emptyset\}, \emptyset, \{\emptyset\}, \emptyset\big\}$
(c) $\mathbb{A} = \{x;\ x \in \mathbb{N},\ -2 \leq x \leq 3\}$, $\mathbb{B} = \{1,2,3\}$
(d) $\mathbb{A} = \{x;\ x \in \mathbb{R},\ -2 \leq x \leq 3\}$, $\mathbb{B} = \{1,2,3\}$ ■

Cvičenie 1.7 Dokážte, že $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$

(a) $\mathbb{A} = \{1,2\}$, $\mathbb{B} = \{3,2,1\}$
(b) $\mathbb{A} = \{1\} \times \{1,2\}$, $\mathbb{B} = \{1\} \times \{1,2,3\}$
(c) $\mathbb{A} = \{2n;\ n \in \mathbb{Z}^+\}$, $\mathbb{B} = \{n;\ n \in \mathbb{Z}^+\}$
(d) $\mathbb{A} = \{n;\ n \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{B} = \{n+1;\ n \in \mathbb{Z}\}$ ■

Cvičenie 1.8 Dokážte, že $\mathbb{A} \not\subseteq \mathbb{B}$

(a) $\mathbb{A} = \{1,2,3\}$, $\mathbb{B} = \{1,2\}$
(b) $\mathbb{A} = \{1,2,3\}$, $\mathbb{B} = \emptyset$
(c) $\mathbb{A} = \{x;\ x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0\}$, $\mathbb{B} = \{1,2\}$ ■

Cvičenie 1.9 Majme dané univerzum $\mathscr{U}$ a v ňom tri množiny $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ a $\mathbb{C}$. Nakreslite Vennov diagram a vyšráfujte danú množinu

(a) $\mathbb{A} \cap \overline{\mathbb{B}}$
(b) $\overline{\mathbb{A}} \setminus \mathbb{B}$
(c) $\mathbb{B} \cup (\mathbb{B} \setminus \mathbb{A})$
(d) $(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) \setminus \mathbb{B}$
(e) $\mathbb{B} \cap \overline{(\mathbb{A} \cup \mathbb{C})}$
(f) $(\overline{\mathbb{A}} \cup \mathbb{B}) \cap (\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{A})$
(g) $(\mathbb{C} \cap \mathbb{A}) \setminus (\overline{\mathbb{B} \setminus \mathbb{A}} \cap \mathbb{C})$
(h) $(\mathbb{B} \setminus \overline{\mathbb{C}}) \cup ((\mathbb{B} \setminus \overline{\mathbb{A}}) \cap (\mathbb{C} \cup \mathbb{B}))$ ■

Cvičenie 1.10 V skupine 191 študentov

— 10 študuje francúzštinu, ekonómiu a hudbu,
— 36 francúzštinu a ekonómiu,
— 20 francúzštinu a hudbu,
— 18 ekonómiu a hudbu,
— 65 francúzštinu,
— 76 ekonómiu a
— 63 hudbu.

Koľko študentov

(a) študuje francúzštinu a hudbu, ale nie ekonómiu?
(b) študuje ekonómiu, ale nie francúzštinu, ani hudbu?
(c) študuje francúzštinu alebo ekonómiu?
(d) neštuduje žiaden z uvedených troch predmetov? ■

Cvičenie 1.11 Študenti študujú matematiku alebo informatiku. Jedna pätina z tých, ktorí študujú matematiku, študuje aj informatiku. Jedna osmina z tých, ktorí študujú informatiku, študuje aj matematiku. Rozhodnite, či viac než tretina spomedzi týchto študentov študuje matematiku. ■

Cvičenie 1.12 Majme dané množiny $\mathbb{X} = \{1,2\}$ a $\mathbb{Y} = \{a,b,c\}$. Zapíšte množinu

(a) $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ (b) $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ (c) $\mathbb{Y} \times \mathbb{X}$ (d) $\mathbb{Y} \times \mathbb{Y}$ ■

Cvičenie 1.13 Majme dané množiny $\mathbb{X} = \{1,2\}$, $\mathbb{Y} = \{a\}$ a $\mathbb{Z} = \{\alpha,\beta\}$. Zapíšte množinu

(a) $\mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \mathbb{Z}$ (b) $\mathbb{X} \times \mathbb{Y} \times \mathbb{Y}$ (c) $\mathbb{X} \times \mathbb{X} \times \mathbb{X}$ (d) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Y} \times \mathbb{Z}$ ■

Cvičenie 1.14 Uveďte geometrický popis každej z nasledovných číselných množín

(a) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
(b) $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$
(c) $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$
(d) $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^+$
(e) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
(f) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
(g) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$
(h) $\mathbb{R} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ■

Cvičenie 1.15 Nech $\mathscr{P}(\mathbb{A})$ je potenčná množina množiny $\mathbb{A}$. Rozhodnite, či sú pravdivé tvrdenia

(a) $\{\mathbb{X}\} \subseteq \{\mathbb{X}\}$
(b) $\{\mathbb{X}\} \in \{\mathbb{X}\}$
(c) $\{\mathbb{X}\} \in \{\mathbb{X}, \{\mathbb{X}\}\}$
(d) $\{\mathbb{X}\} \subseteq \{\mathbb{X}, \{\mathbb{X}\}\}$
(e) $\{2\} \subseteq \mathscr{P}(\{1,2\})$
(f) $\{2\} \in \mathscr{P}(\{1,2\})$

■

Cvičenie 1.16 Vypíšte všetky podmnožiny $\mathscr{P}(\{a,b\})$. Koľko ich je a ktoré sú vlastné podmnožiny množiny $\{a,b\}$? ■

Cvičenie 1.17 Vypíšte všetky podmnožiny $\mathscr{P}(\{a,b,c,d\})$. Koľko ich je a ktoré sú vlastné podmnožiny množiny $\{a,b,c,d\}$? ■

Cvičenie 1.18 Ak $|\mathbb{X}| = n$, koľko prvkov má $\mathscr{P}(\mathbb{X})$? Koľko vlastných podmnožín má $\mathbb{X}$? ■

Cvičenie 1.19 Aký je vzťah medzi množinami $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$, ak platí

(a) $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \mathbb{A}$
(b) $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \mathbb{A}$
(c) $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \emptyset$
(d) $\overline{\mathbb{A} \cap \mathbb{B}} = \overline{\mathbb{B}}$

■

Cvičenie 1.20 Zistite, ktorá z nasledujúcich množín je prázdna

(a) $\{a;\ a$ je nepárne celé číslo a $a^2 = 4\}$
(b) $\{a;\ a$ je celé číslo a $a + 9 = 9\}$
(c) $\{a;\ a$ je kladné celé číslo a $a^2 < 1\}$
(d) $\{a;\ a$ je celé číslo a $a < 1\}$

■

Cvičenie 1.21 Nájdite príklad množín, pre ktoré platí $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \mathbb{A} \cup \mathbb{C}$ a $\mathbb{B} \neq \mathbb{C}$. ■

Cvičenie 1.22 Nakreslite Vennove diagramy znázorňujúce situácie

(a) $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} \subset \mathbb{A} \cup \mathbb{C}$, ale $\mathbb{B} \not\subseteq \mathbb{C}$
(b) $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \mathbb{C} \cup \mathbb{B}$, ale $\mathbb{A} \neq \mathbb{C}$
(c) $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \subset \mathbb{A} \cap \mathbb{C}$, ale $\mathbb{B} \not\subseteq \mathbb{C}$
(d) $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \mathbb{C} \cap \mathbb{B}$, ale $\mathbb{A} \neq \mathbb{C}$

■

Cvičenie 1.23 Pomocou Vennových diagramov dokážte

(a) $\mathbb{A} \cup (\mathbb{B} \setminus \mathbb{A}) = \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$
(b) $(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) \setminus \mathbb{A} = \mathbb{B} \setminus \mathbb{A}$
(c) $\mathbb{A} \cup (\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) = \mathbb{A}$

■

Cvičenie 1.24 Nájdite príklady množín $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ a $\mathbb{C}$, tak aby platilo

(a) $(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) \subset (\mathbb{A} \cup \mathbb{C})$ a $\mathbb{B} \not\subseteq \mathbb{C}$
(b) $(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) \subset (\mathbb{A} \cap \mathbb{C})$ a $\mathbb{B} \not\subseteq \mathbb{C}$
(c) $(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = (\mathbb{C} \cup \mathbb{B})$ a $\mathbb{A} \neq \mathbb{C}$
(d) $(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) = (\mathbb{C} \cap \mathbb{B})$ a $\mathbb{A} \neq \mathbb{C}$

■

Cvičenie 1.25 Dokážte, že pre $\forall n \in \mathbb{N}$ platí rovnosť

$$\mathbb{A} \cup (\mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2 \cap \ldots \cap \mathbb{B}_n) = (\mathbb{A} \cup \mathbb{B}_1) \cap (\mathbb{A} \cup \mathbb{B}_2) \cap \ldots \cap (\mathbb{A} \cup \mathbb{B}_n).$$

■

Cvičenie 1.26 Dokážte vetu 1.1.1 (strana 19).

Cvičenie 1.27 Máme dvojičky Romana a Sanyho, ktorí sú si na nerozoznanie podobní. Rozdiel je len v tom, že jeden z nich vždy hovorí pravdu (volajme ho pravdovravný) a druhý vždy klame (volajme ho klamár). Pravdovravný nemôže nikdy povedať nepravdivý výrok a klamár nemôže nikdy povedať pravdivý výrok. Žiaľ nevieme ktorý z nich hovorí pravdu a ktorý klame a ani nevieme na pohľad rozlíšiť, ktorý je Roman a ktorý Sany. Raz ich oboch stretneme spolu na ulici.

(a) Môžeme jedinou otázkou (na jedného z nich), na ktorú existuje odpoveď typu ÁNO/NIE, zistiť, ktorý z nich je Roman?
(b) Môžeme jedinou otázkou (na jedného z nich), na ktorú existuje odpoveď typu ÁNO/NIE, zistiť, či je Roman pravdovravný alebo klamár?

Cvičenie 1.28 Existuje ostrov, na ktorom všetci obyvatelia buď vždy hovoria pravdu (nazývajme ich pravdovravní), alebo vždy klamú (nazývajme ich klamári). Pravdovravní teda nemôžu nikdy povedať nepravdivý výrok a klamári nemôžu nikdy povedať pravdivý výrok. Okolo ostrova sú zátoky, v niektorých z nich sa nachádzajú perly a v niektorých sa nenachádzajú perly. Všetci domorodci pritom presne vedia, v ktorej zátoke sú a v ktorej nie sú perly. K jednej zo zátok príde turista a opýta sa domorodca, ktorého tam stretne.
Turista: *„Sú v tejto zátoke perly?“*
Domorodec: *„Ak som pravdovravný, tak v tejto zátoke sú perly.“*

(a) Môže turista z uvedenej odpovede zistiť, či v zátoke sú perly? Ak sa to dá zistiť, tak oplatí sa mu šnorchlovať a hľadať perly?
(b) Môže turista z uvedenej odpovede zistiť, či je domorodec klamár alebo pravdovravný? Ak sa to dá zistiť, tak akého typu je domorodec?

Cvičenie 1.29 Napíšte výrokovú formulu vyjadrujúcu stavbu výroku a utvorte negáciu:

(a) Dva plus tri je viac než šesť.
(b) Do školy pôjdem pešo alebo autobusom.
(c) Dva je menšie, nanajvýš rovné než štyri, štyri je menšie než päť.
(d) Prirodzené číslo je deliteľné tromi práve vtedy, keď jeho ciferný súčet je deliteľný tromi.
(e) Ak má graf práve jeden vrchol nepárneho stupňa, tak sa nedá nakresliť jedným ťahom.
(f) V predpovedi počasia dnes hovorili, že zajtra bude pršať, alebo bude snežiť.
(g) Keď sa vonku zotmie, zapne sa pouličné osvetlenie.
(h) Prídeš neskoro na prednášku, ak okamžite nevstaneš a nevyrazíš.
(i) Na večeru zjem zvyšky zo včera, ak ešte niečo zostalo, a ak nie, tak budem musieť navariť, alebo si objednám pizzu.

Cvičenie 1.30 Ktoré z nasledujúcich výrokov sú pravdivé?

(a) $\{1,2,3\} = \{3,1,2\}$
(b) $\{1,2,3\} = (1,2,3)$
(c) $(1,2) = (2,1)$
(d) $\emptyset \in \{1,2\}$
(e) $\emptyset \subseteq \{1,2\}$
(f) $\emptyset \subset \{1,2\}$
(g) $1 \in \{1\}$
(h) $\{1\} \in \{1\}$
(i) $\{1\} \subseteq \{1\}$
(j) $\{1\} \subset \{1\}$
(k) $2 \in \{1,2,3\}$
(l) $2 \subseteq \{1,2,3\}$

Cvičenie 1.31 Jankovi nechutil špenátový prívarok, čo dostal na obed, a tak mu mama povedala: „Ak nezješ celý obed, nedostaneš potom zmrzlinu." Janko teda zjedol celý obed, ale zmrzlinu napriek tomu nedostal. Oklamala ho mama, alebo nie? ■

Cvičenie 1.32 Nasledujúce výroky vyjadrite len pomocou implikácie a negácie. Potom utvorte negácie týchto výrokov.

(a) Ak bude pekné počasie, Martin pôjde na túru.
(b) Ak som smädný, dám si čaj.
(c) Voda začína vrieť práve vtedy, keď dosiahne teplotu 100° Celzia pri normálnom atmosférickom tlaku.
(d) Dočítam knihu, alebo si pozriem film.
(e) Ráno vstanem a naraňajkujem sa.
(f) Pôjdem tam iba v tom prípade, ak tam pôjdeš aj ty.

■

Cvičenie 1.33

(a) Zistite, koľko existuje rôznych binárnych logických spojok.
(b) Zistite koľko binárnych logických spojok je takých, že sa len pomocou tejto jednej spojky dajú definovať všetky ostatné logické spojky.

■

Cvičenie 1.34 Určte či nasledujúce zápisy sú výrokové formuly. Vysvetlite prečo sú, resp. ak nie sú doplňte do zápisov zátvorky tak, aby to boli výrokové formuly. Koľkými spôsobmi sa to dá spraviť v jednotlivých prípadoch? Dajú sa zátvorky doplniť tak, aby vzniknutá výroková formula bola tautológia? Ak áno, ako?

(a) $A \wedge A \vee \neg A$
(b) $A \vee B \implies \neg\neg A \wedge B \vee A$
(c) $A \wedge B \wedge C \iff \neg A \vee \neg B \vee \neg C$

■

Cvičenie 1.35 Vyjadrite implikáciu ($\Rightarrow$) pomocou konjunkcie, disjunkcie a negácie a svoj výsledok dokážte pomocou pravdivostnej tabuľky. ■

Cvičenie 1.36 Pomocou negácie a implikácie zapíšte konjunkciu a disjunkciu a svoj výsledok dokážte pomocou pravdivostnej tabuľky. ■

Cvičenie 1.37 Zapíšte nand pomocou konjunkcie, disjunkcie a negácie a svoj výsledok dokážte pomocou pravdivostnej tabuľky. ■

Cvičenie 1.38 Zapíšte nor pomocou negácie a implikácie a svoj výsledok dokážte pomocou pravdivostnej tabuľky. ■

Cvičenie 1.39 Zapíšte „exkluzívne alebo" xor ($\oplus$) pomocou konjunkcie, disjunkcie a negácie a svoj výsledok dokážte pomocou pravdivostnej tabuľky. ■

Cvičenie 1.40 Zapíšte negáciu, konjunkciu, disjunkciu, implikáciu a ekvivalenciu pomocou nand a svoj výsledok dokážte pomocou pravdivostnej tabuľky. ■

Cvičenie 1.41 Zapíšte negáciu, konjunkciu, disjunkciu, implikáciu a ekvivalenciu pomocou nor a svoj výsledok dokážte pomocou pravdivostnej tabuľky. ■

Cvičenie 1.42 Pomocou konjunkcie, disjunkcie a negácie zapíšte takú logickú funkciu dvoch premenných $f(p,q)$, ktorá je pravdivá vtedy a len vtedy keď práve jedna zo vstupných premenných má pravdivú hodnotu. Svoj výsledok dokážte pomocou pravdivostnej tabuľky. ■

Cvičenie 1.43 Pomocou konjunkcie, disjunkcie a negácie zapíšte takú logickú funkciu troch premenných $f(p,q,r)$, ktorá je pravdivá vtedy a len vtedy keď práve dve zo vstupných premenných majú pravdivú hodnotu. Svoj výsledok dokážte pomocou pravdivostnej tabuľky. ■

Cvičenie 1.44 Pomocou konjunkcie, disjunkcie a negácie zapíšte takú logickú funkciu troch premenných $f(p,q,r)$, ktorá je pravdivá vtedy a len vtedy keď práve jedna zo vstupných premenných má pravdivú hodnotu. Svoj výsledok dokážte pomocou pravdivostnej tabuľky. ■

Cvičenie 1.45 Dokážte, že nasledovné výrokové formuly sú tautológie

(a) $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
(b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
(c) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
(d) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

■

Cvičenie 1.46 Rozhodnite o pravdivosti nasledovných výrokových formúl a napíšte ich negácie

(a) $\forall x \in \mathbb{R}:\ x^2 > 3$
(b) $\forall x \in \mathbb{R}:\ x^2 \geq 5$
(c) $(\forall x \in \mathbb{R}),\ (\forall y \in \mathbb{R}):\ x+y=4$
(d) $(\forall x \in \mathbb{R}),\ (\exists y \in \mathbb{R}):\ x+y=4$
(e) $(\exists x \in \mathbb{R}),\ (\forall y \in \mathbb{R}):\ x+y=4$
(f) $(\exists x \in \mathbb{R}),\ (\exists y \in \mathbb{R}):\ x+y=4$
(g) $(\exists x \in \mathbb{R}),\ (\forall y \in \mathbb{R}),\ (\exists z \in \mathbb{R}):\ x+y+z=3$

■

Cvičenie 1.47 Sformulujte výroky, ktoré možno reprezentovať výrokovými formulami

(a) $A \vee \neg B$
(b) $(A \wedge B) \Rightarrow C$
(c) $A \Rightarrow (B \vee C)$
(d) $\neg A \Leftrightarrow B$

■

Cvičenie 1.48 Pomocou pravdivostných tabuliek zistite, či sú nasledovné tvrdenia tautológie

(a) $(A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)$
(b) $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$
(c) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
(d) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$
(e) $A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B))$
(f) $(A \wedge B) \Rightarrow A$
(g) $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$
(h) $A \Rightarrow (A \wedge (A \vee B))$
(i) $(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$
(j) $A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$

■

Fragment Euklidových „Základov“
(približne 3. storočie pred n.l.)

2. Dôkazy v matematike

Matematika je jediná exaktná veda. To znamená, že všetky tvrdenia, ktoré sa v matematike nazývajú *vety*, sa musia dokazovať pomocou nástrojov matematickej logiky a jazyka príslušnej teórie[1]. Takéto dokázané tvrdenia, vety, potom majú v medziach svojej teórie univerzálnu platnosť. Medzi najznámejšie matematické vety, s ktorými sme sa už určite stretli, patria napríklad Pythagorova veta a Euklidova veta, ktoré obe postulujú tvrdenia o pravouhlom trojuholníku. Dokázali ich už starí Gréci a my sme sa s nimi stretli najneskôr na strednej škole. Inou známou vetou, s ktorou sme sa mohli stretnúť v rámci matematickej analýzy, je napríklad Newton-Leibnizova veta o určitom integráli.

Pri budovaní matematickej teórie sa vždy vychádza z *axióm*. Axióma je nejaké základné tvrdenie, ktoré sa považuje za platné a nedokazuje sa. Prvou podmienkou pri výbere axióm je obmedziť ich počet na nevyhnutné minimum. Nie je totiž žiaduce stavať teóriu na veľkom počte nedokázaných tvrdení. Snažíme sa preto vybrať vždy len minimálny počet axióm, ktoré nám umožnia odvodiť pravdivé tvrdenia príslušnej teórie. Druhou podmienkou pri výbere axióm je brať za axiómy len jednoduché tvrdenia, ktoré si vieme overiť nástrojmi mimo príslušnej teórie a o ktorých platnosti málokto pochybuje a väčšina ľudí ich považuje za samozrejmé. Treťou a veľmi dôležitou podmienkou pri výbere axióm je to, že vybrané axiómy nesmú byť sporné, t. j. nedá sa z nich odvodiť výrok a zároveň jeho negácia. Ak by totiž nejaká teória obsahovala sporné axiómy, tak potom v tejto teórii sú dokázateľné (pravdivé) všetky tvrdenia.

Ako prvý príklad si môžeme uviesť výrokovú logiku. Tam nám na dokázanie všetkých možných pravdivých výrokov stačia 3 axiómy (viď [9], str. 14). Jednou z nich je napr. výrok $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$, o ktorého pravdivosti sa môžeme presvedčiť napr. pravdivostnou tabuľkou, čo sa však nepovažuje za dôkaz v jazyku výrokovej logiky. V prípade výrokovej logiky existujú aj iné axiomatické systémy, než je ten, ktorý je uvedený v [9]. Všetky tieto axiomatické systémy sú navzájom ekvivalentné a v [9] boli uvedené tri axiómy zvolené z toho dôvodu, že sa pomocou nich pomerne ľahko dokazujú pravdivé výroky.

[1] matematická logika, teória množín, matematická analýza, geometria, . . .

Druhým príkladom môže byť teória množín, ktorá sa axiomaticky začala budovať koncom 19. a začiatkom 20. storočia. V tejto teórii taktiež existuje viacero rôznych axiomatických systémov, napríklad Zermelov, alebo Zermel-Frankelov. Na vybudovanie celej teórie množín nám stačí 9 axióm (viď [2], str. 35). Prvou z týchto axióm je axióma existencie množín, ktorá hovorí $(\exists x)(x = x)$. Písmeno x tu označuje množinu a s tým, že existuje nejaká množina, ktorá sa rovná sama sebe, bude zrejme súhlasiť väčšina ľudí.

Posledným príkladom, ktorý si tu uvedieme, je Euklidovská geometria. Je to najstaršia matematická teória postavená a budovaná na axiomatických základoch. Táto teória používa 5 axióm, ktoré sformuloval Euklides v prvej knihe svojich *Základov*. Prvá z axióm Euklidovskej geometrie hovorí: *Ľubovoľné dva body sa dajú spojiť úsečkou.* To je triviálne tvrdenie, s ktorého platnosťou bude zrejme súhlasiť väčšina ľudí. Až v 19. storočí vznikli aj iné než euklidovské geometrie, s konzistentnými axiomatickými systémami. Sú to napríklad Lobačevského (hyperbolická) geometria, Riemannova geometria a ďalšie. Tieto neeuklidovské geometrie sa využívajú napr. v Einsteinovej teórii relativity, v kozmológii, v kartografii, pri navigácii, ...

Komplexnejšie pojmy sa v matematických teóriach zavádzajú pomocou *definícií*. V definícii popisujeme nový pojem pomocou už známych pojmov. Definícia presne vymedzuje obsah definovaného pojmu.

Tvrdenie v matematickej teórii je pravdivé len vtedy, pokiaľ sa dá dokázať vychádzajúc z axióm, už predtým dokázaných tvrdení a pomocou nástrojov matematickej logiky a jazyka príslušnej teórie. Čiže tvrdenie sa stáva vetou až potom, keď existuje jeho dôkaz. Dovtedy je to len *hypotéza*, ktorá môže, ale nemusí, byť pravdivá. V matematike existuje viacero základných typov dôkazov. Niektoré z nich si tu preberieme a ilustrujeme na príkladoch.

2.1 Priamy dôkaz

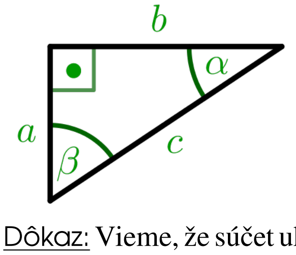
Priamy dôkaz je postup, pri ktorom je dokazované tvrdenie odvodené priamou aplikáciou predpokladov, axióm, definícií a už dokázaných viet. V priamych dôkazoch sa často využíva pravidlo *modus ponens*, postavené na implikácii.

Definícia 2.1.1 — Modus ponens. Majme dve tvrdenia A a B. Pravidlo modus ponens hovorí, že ak platia tvrdenia A a $A \Rightarrow B$, tak potom platí aj tvrdenie B.

Logická pravdivosť pravidla modus ponens sa dá dokázať pomocou pravdivostných tabuliek a toto pravidlo je súčasťou jazyka výrokovej logiky. V skutočnosti je to jediné odvodzovacie pravidlo jazyka výrokovej logiky a pomocou neho sa z axióm dokazujú a dajú dokázať všetky pravdivé výrokové formuly výrokovej logiky. Ako však bolo spomenuté, pravidlo modus ponens sa v priamych dôkazoch, najmä komplexnejších tvrdení, často, ale nie vždy, využíva.

Na úvod si uvedieme priamy geometrický dôkaz Pythagorovej vety. Takéto „geometrické“ dôkazy obľubovali starí Gréci.

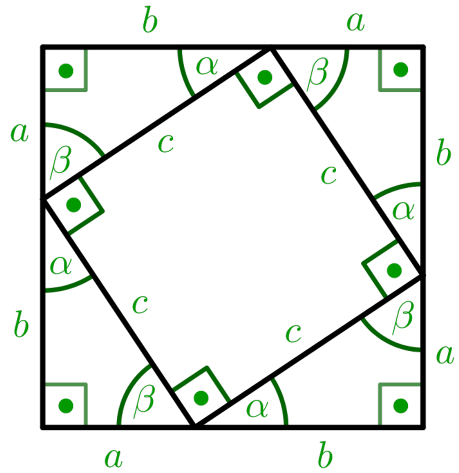
■ **Príklad 2.1**



V pravouhlom trojuholníku sa plocha štvorca zostrojeného nad preponou rovná súčtu plôch štvorcov zostrojených nad odvesnami. Dokážte!

<u>Dôkaz:</u> Vieme, že súčet uhlov trojuholníka je 180°. To znamená, že v pravouhlom trojuholníku bude súčet uhlov $\alpha + \beta = 90^\circ$. Nakreslime si teraz daný pravouhlý trojuholník štyrikrát nasledovným spôsobom.

Prepony štyroch kópií daného trojuholníka tvoria vnútorný štvorec a jeho odvesny tvoria vonkajší štvorec. To, že útvar tvorený odvesnami je tiež štvorec, vyplýva z faktu, že $\alpha+\beta=90^\circ$. Poďme teraz spočítať plochu vonkajšieho štvorca. Tú môžeme vypočítať dvoma spôsobmi. Najskôr ako druhú mocninu strany štvorca



$$P=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

a potom ako súčet štyroch pravouhlých trojuholníkov a vnútorného štvorca

$$P=4\cdot\frac{ab}{2}+c^2=2ab+c^2\,.$$

Keďže sa tieto plochy musia rovnať, platí

$$a^2+2ab+b^2=2ab+c^2 \quad\Longleftrightarrow\quad a^2+b^2=c^2\,.$$

Tým sme ukázali, že súčet obsahov štvorcov nad odvesnami pravouhlého trojuholníka sa rovná obsahu štvorca nad preponou tohto trojuholníka. Q.E.D.[2] ■

V ďalšom si ukážeme tri príklady priamych dôkazov z oblasti teórie čísel.

■ **Príklad 2.2** Ak $m,n\in\mathbb{Z}$, m je párne a n je nepárne, tak potom číslo $m+n$ je nepárne. Dokážte!

Dôkaz: Číslo m je celé a párne. To znamená, že existuje číslo $k\in\mathbb{Z}$ také, že $m=2k$. Číslo n je celé a nepárne, čo znamená, že musí existovať číslo $l\in\mathbb{Z}$ také, že $n=2l+1$. Potom platí

$$m+n=(2k)+(2l+1)=2(k+l)+1\,.$$

Číslo $k+l$ je celé, čo znamená, že číslo $2(k+l)$ je párne číslo a číslo $m+n=2(k+l)+1$ je nepárne číslo. Tým je dokázané, že súčet párneho a néparneho čísla je nepárne číslo. Q.E.D. ■

■ **Príklad 2.3** Druhá mocnina párneho čísla n je párne číslo. Dokážte!

Dôkaz: Číslo n je párne (a teda samozrejme aj celé), čiže existuje číslo $k\in\mathbb{Z}$ také, že $n=2k$. Potom platí

$$n^2=(2k)^2=4k^2\,.$$

Číslo $4k^2$ je párne, čiže druhá mocnina párneho čísla je párne číslo. Q.E.D. ■

■ **Príklad 2.4** Štvorec súčtu dvoch nepárnych čísel $m,n\in\mathbb{Z}$ je párne číslo. Dokážte!

Dôkaz: budeme robiť postupne.

- Najskôr ukážeme, že súčet dvoch nepárnych čísel je párne číslo. Ak čísla $m,n\in\mathbb{Z}$ sú nepárne, tak musia existovať čísla $k,l\in\mathbb{Z}$ také, že platí $m=2k+1$ a $n=2l+1$. Potom platí

$$m+n=(2k+1)+(2l+1)=2(k+l)+2=2(k+l+1)\,.$$

Číslo $2(k+l+1)$ je párne a tým sme dokázali, že súčet dvoch nepárnych čísel je párne číslo.

[2] Q.E.D.= *quod erat demonstrandum* = „čo bolo treba dokázať“

- V príklade 2.3 sme dokázali, že druhá mocnina párneho čísla je párne číslo. Označme si tvrdenie „*Ak $\underbrace{\text{číslo je párne}}_{A}$, tak $\underbrace{\text{jeho druhá mocnina je párna}}_{B}$*“ (skrátene $A \Rightarrow B$).
- V prvom kroku sme ukázali, že súčet dvoch nepárnych čísel je párny. Čiže súčtom dvoch nepárnych čísel dostaneme číslo x a označne si tvrdenie „*Číslo x je párne.*“ pomocou A.
- Teraz už vieme, že platí tvrdenie A a platí tvrdenie $A \Rightarrow B$. Podľa pravidla modus ponens potom platí aj tvrdenie B. Q.E.D. ■

P Treba však priznať, že vo vyššieuvedenom postupe sme trochu „švindlovali“. V tvrdení A, z tretieho bodu, je totiž ukrytá implikácia. Je to implikácia hovoriaca „*Ak sú dve čísla nepárne, tak ich súčet je párny.*“ Ak by sme túto implikáciu neskryli do jedného tvrdenia A, ale nechali ju v pôvodnom tvare, tak by sa nejednalo o pravidlo modus ponens, ale o pravidlo *sylogizmu*.

Veta 2.1.1 — Pravidlo sylogizmu. Majme tri tvrdenia A, B a C. Pravidlo sylogizmu hovorí, že ak platia tvrdenia $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow C$, tak potom platí aj tvrdenie $A \Rightarrow C$.

P Pravidlo sylogizmu sme neuviedli ako definíciu, ako v prípade pravidla modus ponens, preto, lebo to je odvodené pravidlo. Znamená to, že samotné pravidlo sylogizmu sa vo výrokovej logike dá dokázať z axióm len pomocou pravidla modus ponens. Keďže sa jedná o tvrdenie matematickej logiky a je mimo rámec tohto kurzu, dokazovať ho tu nebudeme. Dôkaz pravidla sylogizmu môžete nájsť v skriptách [9].

Teraz si ukážeme priamy dôkaz jedného tvrdenia z teórie množín.

■ **Príklad 2.5** Pre ľubovoľné dve množiny $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ platí $\mathbb{A} \cup (\mathbb{B} \setminus \mathbb{A}) = \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$. Dokážte!

Dôkaz: Z definíce 1.1.3 vieme, že dve množiny $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ sa rovnajú ($\mathbb{X} = \mathbb{Y}$), ak majú rovnaké prvky. Potrebujeme preto dokázať ekvivalenciu $(x \in \mathbb{X}) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{Y})$, čo je to isté ako dokázať dve implikácie $(x \in \mathbb{X}) \Rightarrow (x \in \mathbb{Y})$ a $(x \in \mathbb{Y}) \Rightarrow (x \in \mathbb{X})$. Konkrétne, v zadanej úlohe, to musíme dokázať pre $\mathbb{X} = \mathbb{A} \cup (\mathbb{B} \setminus \mathbb{A})$ a $\mathbb{Y} = \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$.

1. $(x \in \mathbb{X}) \Rightarrow (x \in \mathbb{Y})$ – Nech je $x \in \mathbb{X}$. Z definície zjednotenia vyplýva, že musí platiť $x \in \mathbb{A}$ alebo $x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{A}$. Ak ale $x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{A}$, tak z definície rozdielu množín vyplýva, že $x \in \mathbb{B}$. Platí teda, že $x \in \mathbb{A}$, alebo $x \in \mathbb{B}$. Potom však z definície zjednotenia platí, že $x \in \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$.
2. $(x \in \mathbb{Y}) \Rightarrow (x \in \mathbb{X})$ – Nech je $x \in \mathbb{Y}$. Z definície zjednotenia vyplýva, že musí platiť $x \in \mathbb{A}$ alebo $x \in \mathbb{B}$. Ak je $x \in \mathbb{A}$, tak musí platiť aj $x \in \mathbb{A} \cup (\mathbb{B} \setminus \mathbb{A})$. Ak ale $x \notin \mathbb{A}$, tak potom musí platiť $x \in \mathbb{B}$ a súčasne $x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{A}$. Z toho opäť dostávame $x \in \mathbb{A} \cup (\mathbb{B} \setminus \mathbb{A})$.

Tým je dokázané tvrdenie $\mathbb{A} \cup (\mathbb{B} \setminus \mathbb{A}) = \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$. Q.E.D. ■

V matematike málokedy existuje len jediný spôsob ako možno vyriešit danú úlohu, alebo dokázať nejaké tvrdenie. Takmer vždy existuje viacero ciest k správnemu riešeniu. Ukážeme si to na predošlom príklade. Tvrdenie z príkladu 2.5 si dokážeme ešte aj iným spôsobom.

■ **Príklad 2.6** Pre ľubovoľné dve množiny $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ platí $\mathbb{A} \cup (\mathbb{B} \setminus \mathbb{A}) = \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$. Dokážte!

Dôkaz: Nech $\mathscr{U}$ je univerzum množín $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$, čiže $\mathbb{A}, \mathbb{B} \subseteq \mathscr{U}$. Potom, podľa definície rozdielu množín, platí $\mathbb{B} \setminus \mathbb{A} = \mathbb{B} \cap \overline{\mathbb{A}}$. Takže

$$\mathbb{A} \cup (\mathbb{B} \setminus \mathbb{A}) = \mathbb{A} \cup (\mathbb{B} \cap \overline{\mathbb{A}}) = (\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) \cap (\mathbb{A} \cup \overline{\mathbb{A}}) = (\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) \cap \mathscr{U} = \mathbb{A} \cup \mathbb{B}. \qquad \text{Q.E.D.}$$

■

Na záver časti o priamom dôkaze si ešte ukážeme dôkaz jedného triviálneho tvrdenia, využívajúci tranzitívnosť relácie „$\leq$“. O reláciach sa potom dozvieme viac v 6. kapitole.

■ **Príklad 2.7** Definujeme si funkciu *„minimum z dvoch čísel“* takto

$$\min(a,b) = \begin{cases} a\,, & \text{ak } a < b \\ a\,, & \text{ak } a = b \\ b\,, & \text{ak } b < a\,. \end{cases}$$

Nech $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$. Ak $d = \min(d_1, d_2)$ a $x \leq d$, tak $x \leq d_1$ a $x \leq d_2$.

<u>Dôkaz:</u> Najskôr ukážeme, že platí $d \leq d_1$ a $d \leq d_2$. To vyplýva priamo z definície funkcie *minimum*. Vieme, že $d = \min(d_1, d_2)$. Čiže $d = d_1$ ak $d_1 \leq d_2$ alebo $d = d_2$ ak $d_2 < d_1$. V oboch prípadoch platí $d \leq d_1$ a $d \leq d_2$. Ak máme $x \in \mathbb{R}$ a platí $x \leq d \leq d_1$ a $x \leq d \leq d_2$, tak musí platiť aj $x \leq d_1$ a $x \leq d_2$. Q.E.D. ■

2.2 Nepriamy dôkaz

Niekedy sa stáva, že tvrdenie v tvare *„Ak platí . . . , tak platí . . . “* nevieme dokázať priamo, t. j. odvodiť ho jednoduchým spôsobom z axióm a už dokázaných tvrdení. Uvedený tvar tvrdenia je implikácia $A \Rightarrow B$. Podľa vety o obmenenej (obrátenej) implikácii ([9], str. 18) platí, že výrokové formuly $A \Rightarrow B$ a $\neg B \Rightarrow \neg A$ sú tautologicky ekvivalentné, čiže pre rovnaké ohodnotenia prvotných formúl A a B budú mať rovnaké pravdivostné hodnoty. Na tejto tautologickej ekvivalencii je postavený *nepriamy dôkaz*.

Ak tvrdenie v tvare $A \Rightarrow B$ nevieme jednoduchým spôsobom dokázať priamo, ale vieme priamo dokázať jemu tautologicky ekvivalentné tvrdenie $\neg B \Rightarrow \neg A$, tak takýto dôkaz sa nazýva *nepriamy dôkaz* tvrdenia $A \Rightarrow B$.

■ **Príklad 2.8** Pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že ak 9 nedelí n^2, tak 3 nedelí n. Dokážte!

<u>Dôkaz:</u> Uvedené tvrdenie nevieme jednoduchým spôsobom dokázať priamo. Problém sa ukrýva v slovíčku „nedelí“. Negatívne tvrdenia sa obvykle dokazujú ťažšie, než ich pozitívne modifikácie. Napríklad je ťažšie dokázať, že *číslo a nedelí číslo b*, než dokázať, že *číslo a delí číslo b*. Takže pomôžeme si nepriamym dôkazom. Obmenená implikácia ku tvrdeniu zo zadania úlohy je nasledovná

Pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že ak 3 delí n, tak 9 delí n^2.

Toto tvrdenie je tautologicky ekvivalentné s pôvodným a jeho priamy dôkaz je triviálny.

Ak 3 delí prirodzené číslo n, tak existuje $k \in \mathbb{N}$ také, že $n = 3k$. Potom $n^2 = 9k^2$ a z toho je zrejmé, že 9 delí číslo n^2. Q.E.D. ■

Podobne jednoducho sa dá dokázať ďalšie tvrdenie z teórie čísel.

■ **Príklad 2.9** Pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že ak n^2 je párne, tak n je párne. Dokážte!

<u>Dôkaz:</u> Obmenená implikácia ku tvrdeniu zo zadania úlohy je nasledovná

$\forall n \in \mathbb{N}$ platí, že ak n je nepárne, tak n^2 je nepárne.

Toto tvrdenie je tautologicky ekvivalentné s pôvodným a jeho priamy dôkaz je triviálny.

Ak prirodzené číslo n je nepárne, tak to znamená, že existuje $k \in \mathbb{N}$ také, že $n = 2k+1$. Potom $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, čo je zjavne nepárne číslo. Q.E.D. ■

Nasledujúce tvrdenie, ktoré dokážeme nepriamo, bude hovoriť o racionálnych číslach.

■ **Príklad 2.10** Pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí, že ak $x^2 \notin \mathbb{Q}$, tak aj $x \notin \mathbb{Q}$. Dokážte!

Dôkaz: Obmenená implikácia ku tvrdeniu zo zadania úlohy je nasledovná

$$\forall x \in \mathbb{R} \textit{ platí, že ak } x \in \mathbb{Q}, \textit{ tak aj } x^2 \in \mathbb{Q}.$$

Toto tvrdenie je tautologicky ekvivalentné s pôvodným a jeho priamy dôkaz je triviálny.
Ak reálne číslo $x \in \mathbb{Q}$, tak to znamená, že existujú čísla $a, b \in \mathbb{Z}$ také, že $x = \frac{a}{b}$. Potom $x^2 = \frac{a^2}{b^2}$, čo je zjavne racionálne číslo, a preto $x^2 \in \mathbb{Q}$. Q.E.D. ■

Posledný príklad nepriameho dôkazu bude znova z teórie čísel.

■ **Príklad 2.11** Pre každé $(x \in \mathbb{R}), (\forall y \in \mathbb{R}): \ (x + y \geq 2) \ \Rightarrow \ (x \geq 1 \ \vee \ y \geq 1)$. Dokážte!

Dôkaz: Obmenená implikácia ku tvrdeniu zo zadania úlohy je nasledovná

$$(\forall x \in \mathbb{R}), (\forall y \in \mathbb{R}): \ (x < 1 \ \wedge \ y < 1) \ \Rightarrow \ (x + y < 2).$$

Toto tvrdenie je tautologicky ekvivalentné s pôvodným a jeho priamy dôkaz je viac než triviálny.
Ak máme reálne čísla $x < 1$ a $y < 1$, tak platí $x + y < 1 + 1 = 2$. Q.E.D. ■

2.3 Dôkaz sporom

Niektoré tvrdenia nevieme jednoduchým spôsobom dokázať ani priamo, ani nepriamo. V takom prípade nám môže pomôcť *dôkaz sporom* nazývaný aj *reductio ad absurdum*. Dôkaz sporom je založený na tom, že namiesto dokazovaného tvrdenia predpokladáme platnosť jeho negácie a odvodzujeme dôsledky, ktoré z toho vyplývajú. Táto naša snaha nás dovedie ku sporu, čiže k nejakému tvrdeniu, ktoré je v rozpore s už známymi a dokázanými tvrdeniami, alebo predpokladmi. Z toho vyplýva, že negácia pôvodného tvrdenia je nepravdivá, a preto musí byť pôvodné tvrdenie pravdivé.

Ako príklad si uvedieme dôkaz tvrdenia, že číslo $\sqrt{2}$ nie je racionálne. Ako už bolo spomenuté pri racionálnych číslach, na strane 15, starí Gréci sa dlho domnievali, že všetky čísla sú buď celé, alebo sa dajú vyjadriť ako zlomok. Až v 5. storočí pred n. l. sa Hippasovi podarilo zistiť, že existujú aj čísla, ktoré sa nedajú vyjadriť ako zlomok. K tomuto svojmu objavu dospel nechtiac a úplnou náhodou, keď sa snažil presne vyjadriť dĺžku uhlopriečky štvorca so stranou dĺžky 1. Hippasos bol členom sekty pytagorejcov a na zverejnenie svojho objavu kruto doplatil, pretože tvrdenie, že všetky čísla sa dajú zapísať ako zlomok, bol jeden z ústredných bodov ich učenia. Dôkaz sporom toho, že $\sqrt{2}$ nie je racionálne číslo, si tu teraz uvedieme.

■ **Príklad 2.12** Číslo $\sqrt{2}$ nie je racionálne. Dokážte!

Dôkaz: Takéto tvrdenie nevieme dokázať priamo, ani nepriamo. Skúsme preto na chvíľu predpokladať, že uvedené tvrdenie neplatí a odvodíme dôsledky, ktoré z toho vyplývajú. Negácia tvrdenia zo zadania úlohy bude

$$\textit{Číslo } \sqrt{2} \textit{ je racionálne.}$$

Ak $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, tak musia existovať čísla $p, q \in \mathbb{Z}$ také, že $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Bez straty na všeobecnosti môžeme predpokladať, že čísla p a q sú nesúdeliteľné, čo znamená že zlomok $\frac{p}{q}$ je vo vykrátenom tvare. Ak by totiž čísla p a q neboli nesúdeliteľné, tak ich vykrátime ich najväčším spoločným deliteľom, dostaneme čísla $p', q' \in \mathbb{Z}$ a platilo by $\sqrt{2} = \frac{p'}{q'} = \frac{p}{q}$. Takže máme nesúdeliteľné čísla $p, q \in \mathbb{Z}$ a platí

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \Longrightarrow \quad 2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \Longrightarrow \quad 2q^2 = p^2.$$

Z poslednej rovnosti a príkladu 2.9 (str. 35) vyplýva, že číslo p je párne. Čiže existuje $m \in \mathbb{Z}$ také, že $p = 2m$. Potom ale $p^2 = 4m^2$ a poslednú rovnosť si môžeme upraviť

$$2q^2 = p^2 \quad \Longrightarrow \quad 2q^2 = 4m^2 \quad \Longrightarrow \quad q^2 = 2m^2.$$

Opäť z poslednej rovnosti a z príkladu 2.9 vyplýva, že číslo q je párne. Takže ukázali sme, že obe čísla p a q sú párne. Tieto čísla potom nie sú nesúdeliteľné, pretože sú obe deliteľné číslom 2, čo je v spore s predpokladom na začiatku dôkazu. Takže z predpokladu, že tvrdenie zo zadania úlohy neplatí, sme dospeli k sporu. Z toho vyplýva, že tvrdenie zo zadania úlohy musí platiť. Q.E.D. ■

Uvedieme si ešte jeden príklad dôkazu sporom. Tento dôkaz tiež pochádza od starých Grékov, rovnako ako Hippasov dôkaz z predošlého príkladu. Jedná sa o klasický Euklidov dôkaz neexistencie najväčšieho prvočísla.

■ **Príklad 2.13** Neexistuje najväčšie prvočíslo. Dokážte!

Dôkaz: priamy ani nepriamy dôkaz tohto tvrdenia spraviť nevieme. Na priamy dôkaz by sme museli vymenovať všetky prvočísla, ktorých je nekonečne mnoho a o nepriamom dôkaze vôbec nemôžeme uvažovať, pretože tvrdenie zo zadania úlohy nie je implikácia. Takže ideme sa pokúsiť o dôkaz sporom. Negácia uvedeného tvrdenia je

Existuje najväčšie prvočíslo.

Budeme teda predpokladať, že existuje najväčšie prvočíslo a označíme si ho p_n. Všetky existujúce prvočísla potom môžeme zoradiť podľa veľkosti do konečnej postupnosti $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Zostrojme si teraz číslo N ako súčin všetkých existujúcich prvočísel, zväčšený o 1

$$N = p_1.p_2 \dots p_n + 1 \,.$$

Základná veta aritmetiky hovorí, že každé prirodzené číslo väčšie než 1 sa dá jednoznačne zapísať ako súčin mocnín prvočísel, t. j. napríklad $168 = 2^3.3.7$. Preto, podľa základnej vety aritmetiky, aj číslo N sa musí dať zapísať ako súčin mocnín prvočísel. Ale akých prvočísel? Číslo N sme predsa zostrojili ako súčin všetkých existujúcich prvočísel zväčšený o 1. Takže ak ho budeme deliť lubovoľným prvočíslom z množiny $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, tak dostaneme zvyšok 1 a predpokladali sme, že iné prvočísla už neexistujú. Preto N nie je deliteľné žiadnym prvočíslom, a teda sa ani nedá zapísať ako súčin mocnín prvočísel, čo je spor so základnou vetou aritmetiky. Predpokladom, že existuje najväčšie prvočíslo sme sa, ako vidíme, dostali ku sporu. Takže tento predpoklad je nesprávny a platí jeho negácia, t. j. neexistuje najväčšie prvočíslo. Q.E.D. ■

2.4 Dôkaz matematickou indukciou

Matematická indukcia je metóda, pomocou ktorej sa dokazujú tvrdenia platiace pre prirodzené čísla, alebo pre spočítateľné (nekonečné) množiny. *Spočítateľné množiny* sú také množiny, ktorých všetky prvky sa dajú očíslovať pomocou navzájom rôznych prirodzených čísel. Princíp matematickej indukcie sa dá ilustrovať nasledovným spôsobom.

1. Na nekonečnej tabuli majme postupnosť kruhov, očíslovaných číslami $1, 2, 3, \dots, n, \dots$
2. Nech je 1. kruh zafarbený.
3. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ nech platí, že ak je n. kruh zafarbený, tak je aj $(n+1)$. kruh zafarbený.

Asi každý bude súhlasiť s tým, že z uvedených troch bodov vyplýva, že všetky kruhy sú zafarbené. A toto je práve princíp matematickej indukcie a veľmi významná vlastnosť prirodzených čísel. Tento princíp sa používa pri dokazovaní pravdivosti výrokov, závisiacich od parametra $n \in \mathbb{N}$.

■ **Príklad 2.14** Nech $S_n = 1+2+\cdots+n$. Potom pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Dokážte!

Dôkaz: budeme robiť v dvoch krokoch.

1. Najskôr si platnosť tvrdenia overíme pre malé hodnoty n.

$$\begin{aligned} S_1 = 1 &= 1 = \frac{1.2}{2} \\ S_2 = 1+2 &= 3 = \frac{2.3}{2} \\ S_3 = 1+2+3 &= 6 = \frac{3.4}{2} \\ \ldots \text{ atď.} \end{aligned}$$

   Vo všeobecnosti nie je potrebné overovať tvrdenie pre viacero hodnôt. Nám by úplne stačilo overiť tvrdenie pre S_1. Toto sa nazýva *prvý krok matematickej indukcie*.

2. V ďalšom kroku dokážeme, že ak tvrdenie platí pre nejaké číslo $n \in \mathbb{N}$, tak platí aj pre číslo $(n+1) \in \mathbb{N}$. Predpoklad, že tvrdenie platí pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ sa nazýva *indukčný predpoklad*. Dôkaz, že z platnosti tvrdenia pre číslo n, vyplýva platnosť tvrdenia pre číslo $(n+1)$ sa nazýva *indukčný krok*. V našom prípade musíme dokázať že

$$\text{ak } S_n = 1+2+\cdots+n = \frac{n.(n+1)}{2}, \text{ tak platí } S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

   V bode č. 1 sme overili, že tvrdenie platí pre S_1 a ak teraz ukážeme, že z platnosti tvrdenia pre S_n vyplýva platnosť tvrdenia pre S_{n+1}, tak podľa princípu matematickej indukcie tvrdenie platí pre všetky prirodzené čísla n. Ideme teda dokázať, že z platnosti tvrdenia pre S_n vyplýva platnosť tvrdenia pre S_{n+1}.

$$S_{n+1} = \underbrace{1+2+\cdots+n}_{S_n}+(n+1) = \frac{n.(n+1)}{2}+(n+1) = \frac{n.(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

   Tým je dokázané, že ak platí tvrdenie pre S_n, tak platí aj pre S_{n+1} a potom, podľa princípu matematickej indukcie, platí aj $\forall n \in \mathbb{N}$. Q.E.D.

■

P Tvrdenie z predošlého príkladu dokázal Carl Friedrich Gauss už ako 9 ročný školák. Nerobil to však matematickou indukciou, ale priamym dôkazom. Tento geniálny matematik z prelomu 18. a 19. storočia bol už ako malý chlapec veľmi bystrý. Učiteľ v škole, do ktorej chodil, sa raz chcel venovať nejakej svojej práci a aby ho žiaci nejaký čas nerušili, potreboval ich „zabaviť". Prikázal im preto vypočítať súčet čísel od 1 po 100 mysliac si, že im sčítavanie 100 čísel potrvá dosť dlho. Gauss si však všimol nasledovnú vec

$$\underbrace{1+\overbrace{2+\underbrace{3+\cdots+(n-2)}_{=(n+1)}+(n-1)}^{=(n+1)}+n}_{=(n+1)},$$

t. j. ak v súčte prvých n prirodzených čísel sčíta prvé s posledným, druhé s predposledným atď., tak vždy dostane výsledok $(n+1)$. Keď takto spáruje každé z daných n čísel a spočíta súčet všetkých párov, dostane hodnotu $n.(n+1)$. V tejto hodnote je ale každé číslo pôvodného súčtu zarátané dvakrát (napr. $1+n$ a $n+1$), takže výsledok ešte treba vydeliť dvoma. A Gaussov učiteľ bol veľmi prekvapený, keď správny výsledok súčtu čísel od 1 po 100 dostal už po pár sekundách.

Sformulujeme teraz princíp matematickej indukcie ako vetu.

Veta 2.4.1 — Matematická indukcia. Nech pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $V(n)$ výrok. Nech

1. *Prvý krok* – Výrok $V(1)$ je pravdivý.
2. *Indukčný krok* – Nech pre každé $n \in \mathbb{N}$: $V(n) \implies V(n+1)$.

Potom $\forall n \in \mathbb{N}$ je výrok $V(n)$ pravdivý.

S faktoriálom sa skoro určite všetci stretli už na strednej škole, napr. pri kombinatorike. Avšak pre úplnosť si tu uvedieme jeho formálnu definíciu.

Definícia 2.4.1 — Faktoriál. Nech $n \in \mathbb{N}$. Faktoriál čísla n, označujeme $n!$, vypočítame ako

$$n! = \begin{cases} 1\,, & \text{ak } n = 0 \\ n.(n-1).(n-2)\dots 2.1\,, & \text{ak } n \geq 1\,. \end{cases}$$

■ **Príklad 2.15** Napr. $0! = 1$, $3! = 3.2.1 = 6$, $6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$ atď. ■

Teraz si pomocou matematickej indukcie dokážeme ďalšie tvrdenie.

■ **Príklad 2.16** Pre každé $n \in \mathbb{N}$: $n \geq 1$ platí $n! \geq 2^{n-1}$. Dokážte!

Dôkaz: Toto tvrdenie, na rozdiel od príkladu 2.14, hovorí o nerovnosti. Rovnako ho však budeme dokazovať matematickou indukciou.

1. Prvý krok indukcie – overíme si tvrdenie pre $n = 1$

$$1! = 1 \geq 1 = 2^{1-1}.$$

2. Indukčný krok – z predpokladu, že platí $n! \geq 2^{n-1}$ musíme dokázať, že platí $(n+1)! \geq 2^n$.

$$(n+1)! = (n+1).n! \geq (n+1).2^{n-1}\,. \tag{2.1}$$

Keďže $n \geq 1$, platí $(n+1) \geq 2$ a z nerovnosti (2.1) potom dostávame $(n+1)! \geq 2^n$. Q.E.D. ■

Niekedy pomocou matematickej indukcie dokazujeme platnosť výrokov

$$V(n_0)\,,\; V(n_0+1)\,,\; V(n_0+2)\,,\dots\,,\; \text{kde } n_0 \neq 1\,.$$

V takom prípade bude prvý krok indukcie dôkaz pravdivosti výroku $V(n_0)$ a indukčným krokom bude dôkaz, že pre každé $n \in \mathbb{N}$: $n \geq n_0$ z pravdivosti výroku $V(n)$ vyplýva pravdivosť výroku $V(n+1)$.

■ **Príklad 2.17 [Súčet prvých n členov geometrickej postupnosti.]**
Majme $a \in \mathbb{R}$ a $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$. Potom pre všetky prirodzené čísla $n \geq 0$ platí

$$\text{Nech} \quad S_n = a + aq^1 + aq^2 + \dots + aq^n\,, \quad \text{potom} \quad S_n = \frac{a\left(q^{n+1}-1\right)}{q-1}\,. \text{ Dokážte!}$$

Dôkaz: budeme robiť matematickou indukciou, pričom prvý krok spravíme pre $n = 0$.

1. Prvý krok – overenie pre $n = 0$.

$$\text{Rovnosť} \qquad S_0 = a = \frac{a\left(q^{0+1}-1\right)}{q-1} \qquad \text{platí.}$$

2. Indukčný krok – ukážeme, že z platnosti rovnosti pre n vyplýva platnosť rovnosti pre $(n+1)$.

$$S_{n+1} = \underbrace{a + aq^1 + aq^2 + \cdots + aq^n}_{S_n} + aq^{n+1} = \frac{a\left(q^{n+1}-1\right)}{q-1} + aq^{n+1} =$$

$$= \frac{aq^{n+1} - a + aq^{n+2} - aq^{n+1}}{q-1} = \frac{a\left(q^{n+2}-1\right)}{q-1}. \quad \text{Q.E.D.}$$

■

P Špeciálne pre $a=1$ a $q=2$ podľa predošlého príkladu dostávame

$$1+2+2^2+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1.$$

■ **Príklad 2.18** Pre každé $n \in \mathbb{N}$ 4 delí číslo $5^n - 1$. Dokážte!

<u>Dôkaz:</u> budeme opäť robiť matematickou indukciou.

1. Prvý krok – pre $n=1$: 4 delí číslo $5^1 - 1 = 4$.
2. Indukčný krok – nech 4 delí číslo $5^n - 1$ (zapisuje sa to $4 \mid (5^n-1)$). Ukážeme, že z toho vyplýva, že $4 \mid \left(5^{n+1}-1\right)$. Ak $4 \mid (5^n - 1)$, tak musí existovať $k \in \mathbb{Z}$ také, že $5^n - 1 = 4k$. Potom
$$5^{n+1} - 1 = 5^{n+1} - 5^n + 5^n - 1 = 5^n(5-1) + 4k = 4(5^n + k).$$
Keďže $4 \mid [4(5^n + k)]$, je pôvodné tvrdenie dokázané. Q.E.D.

■

P Tvrdenie z predošlého príkladu sa dá ľahko dokázať aj priamym výpočtom – viď cvičenie 2.7.

Nech $\mathbb{X}$ je množina. Pripomeňme si, že $\mathscr{P}(\mathbb{X})$ označuje potenčnú množinu množiny $\mathbb{X}$. Podľa definície 1.1.10 je to množina všetkých podmnožín množiny $\mathbb{X}$. napríklad

$$\begin{aligned} \mathscr{P}(\{a,b\}) &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}, \\ \mathscr{P}(\{a,b,c\}) &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}. \end{aligned}$$

Dokážeme teraz vetu

Veta 2.4.2 — O potenčnej množine. Nech $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$. Ak $\mathbb{X}$ je množina, $|\mathbb{X}| = n$, potom platí $|\mathscr{P}(\mathbb{X})| = 2^n$.

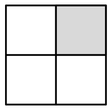
<u>Dôkaz:</u> sa dá spraviť priamo, alebo matematickou indukciou. My tu samozrejme spravíme dôkaz indukciou.

1. Prvý krok – pre $n=0$ musí byť $\mathbb{X} = \emptyset$ a jediná podmnožina $\mathbb{X}$ je $\emptyset$. Takže $\mathscr{P}(\mathbb{X}) = \{\emptyset\}$ a $|\mathscr{P}(\mathbb{X})| = 1 = 2^0$.
2. Indukčný krok – Nech tvrdenie platí pre n a množina $\mathbb{X}$ má $(n+1)$ prvkov. Zvoľne si nejaký prvok $x \in \mathbb{X}$. Podmnožín množiny $\mathbb{X}$, ktoré obsahujú prvok x, je presne toľko ako podmnožín množiny $\mathbb{X}$, ktoré neobsahujú prvok x. Každej podmnožine $\mathbb{X}$ obsahujúcej prvok x totiž vieme jednoznačne priradiť podmnožinu neobsahujúcu prvok x tak, že prvok x z nej vynecháme. Opačne to platí tiež (pridáme prvok x).
Vynechaním prvku x z množiny $\mathbb{X}$ dostaneme množinu $\mathbb{Y} = \mathbb{X} \setminus \{x\}$, pre ktorú platí $|\mathbb{Y}| = n$ a $|\mathscr{P}(\mathbb{Y})| = 2^n$. Takže podmnožín množiny $\mathbb{X}$, ktoré neobsahujú prvok x je, podľa indukčného predpokladu, 2^n a presne toľko isto je aj podmnožín množiny $\mathbb{X}$, ktoré obsahujú prvok x. Platí teda $|\mathscr{P}(\mathbb{X})| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$. Q.E.D.

■ **Príklad 2.19** Tromino je plošný útvar zložený z troch štvorcov so stranou jednotkovej dĺžky . Ak zo šachovnice s rozmermi $2^k \times 2^k$ odstránime ľuvoboľné políčko, tak zvyšok šachovnice sa bude dať pokryť trominami tak, aby sa tieto neprekrývali. Dokážte!

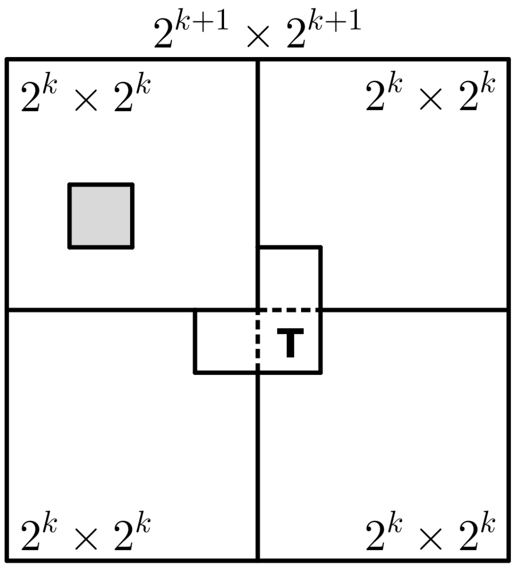
Dôkaz: budeme robiť matematickou indukciou vzhľadom na k.

1. Prvý krok – Ukážeme, že tvrdenie platí pre $k = 1$.



Ak zo šachovnice s rozmermi $2^1 \times 2^1$ odstránime ľubovoľné políčko, tak to, čo nám zostane, je tromino. Takže po odstránení ľubovoľného políčka sa zvyšok šachovnice určite bude dať pokryť trominom.

2. Indukčný krok – predpokladajme, že tvrdenie platí pre k a ukážeme, že potom musí platiť aj pre $(k+1)$.



Šachovnicu s rozmermi $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ si rozdelíme na 4 šachovnice rozmerov $2^k \times 2^k$. Zo šachovnice odstránime ľubovoľné políčko. Na obrázku je toto vyznačené šedou farbou. Do stredu šachovnice potom umiestnime jedno tromino tak, aby pokrývalo práve jedno políčko v každej zo zvyšných troch štvrtín šachovnive. Teraz v každej štvrtine šachovnice chýba, alebo je pokryté, práve jedno políčko. Podľa indukčného predpokladu môžeme zvyšok každej zo štvrtín šachovnice pokryť trominami, čiže šachovnica $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ sa, po odstránení ľubovoľného políčka, dá pokryť trominami. Tým je tvrdenie dokázané. Q.E.D.

■

Predtým, ako sa pustíme do cvičení, si zadefinujeme funkciu *modulo* a funkciu *symetrickej diferencie dvoch množín*. Pomôže nám to zostručniť zápis niektorých úloh.

Definícia 2.4.2 — Modulo – zvyšok po delení. Majme čísla $a \in \mathbb{Z}$ a $0 \neq p \in \mathbb{N}$. Potom funkcia „*a modulo p*“, označujeme ju $a \pmod p$, je zvyšok, ktorý dáva číslo a po delení číslom p. Platí

$$r = a \pmod p \quad \Longleftrightarrow \quad \big((0 \leq r < p) \wedge (\exists k \in \mathbb{Z}: \ a = k.p + r)\big).$$

Definícia 2.4.3 — Symetrická diferencia množín. Majme dve množiny $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$. Potom ich symetrická diferencia, označujeme ju $\mathbb{A} \triangle \mathbb{B}$, sa definuje ako

$$\mathbb{A} \triangle \mathbb{B} = (\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) \setminus (\mathbb{A} \cap \mathbb{B}).$$

2.5 Cvičenia

Priamy dôkaz

Cvičenie 2.1 Dokážte, že uvedená postupnosť je klesajúca

(a) $\left\{\frac{n+2}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (b) $\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ■

Cvičenie 2.2 Dokážte, že uvedená postupnosť je ohraničená

(a) $\left\{\frac{2n}{n+1}+\frac{n+1}{3n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (b) $\left\{3+\frac{1}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (c) $\left\{\frac{n^2}{n^2+2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ■

Cvičenie 2.3 Dokážte, že pre každú aritmetickú postupnosť platí vzťah

$$a_{k-1}^2+8a_k.a_{k+1}=(2a_k+a_{k+1})^2\,.$$

■

Cvičenie 2.4 Dokážte, že ak čísla a,b,c sú tri po sebe idúce členy aritmetickej postupnosti, tak platí vzťah $(a+b+c)^2-3(a^2+b^2+c^2)+6(a-b)^2=0$. ■

Cvičenie 2.5 Dokážte, že $\forall x\in\mathbb{Z}$ platí: buď $x^2 \pmod 4 = 0$, alebo $x^2 \pmod 4 = 1$. Inak povedané, štvorec ľubovoľného celého čísla dáva po delení 4 zvyšok buď 0, alebo 1. ■

Cvičenie 2.6 Dokážte, že $\forall x\in\mathbb{Z}$ platí: $(3\mid x^2)\ \Rightarrow\ (3\mid x)$. ■

Cvičenie 2.7 Dokážte, že platí $\forall n\in\mathbb{N}:\ 4\mid(5^n-1)$. ■

Cvičenie 2.8 Dokážte, že $\forall m,n\in\mathbb{Z}$ platí

(a) ak m,n sú párne, tak $m+n$ je párne
(b) $(2\mid m\ \wedge\ 2\mid n)\ \Rightarrow\ (2\mid m.n)$
(c) $(2\nmid m\ \wedge\ 2\mid n)\ \Rightarrow\ (2\mid m.n)$
(d) $(2\nmid m\ \wedge\ 2\nmid n)\ \Rightarrow\ (2\mid(m+n))$
(e) $(2\nmid m\ \wedge\ 2\nmid n)\ \Rightarrow\ (2\nmid m.n)$
(f) $(2\mid m\ \wedge\ 2\mid(m+n))\ \Rightarrow\ (2\mid n)$ ■

Cvičenie 2.9 Dokážte, že $\forall x\in\mathbb{Q}$ platí $(x\neq 0)\Rightarrow\left(\frac{1}{x}\in\mathbb{Q}\right)$. ■

Cvičenie 2.10 Dokážte, že $\forall x,y\in\mathbb{Q}$ platí

(a) $x.y\in\mathbb{Q}$ (b) $(x+y)\in\mathbb{Q}$ ■

Cvičenie 2.11 Nech $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ sú neprázne množiny, pre ktoré platí $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}=\mathbb{Y}\times\mathbb{X}$. Čo vieme povedať o množinách $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$? Dokážte to! ■

Cvičenie 2.12 Dokážte, že pre ľubovoľné dve množiny $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ platí

(a) $\mathbb{X} \cap \mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$
(b) $\mathbb{X} \subseteq (\mathbb{X} \cup \mathbb{Y})$ ■

Cvičenie 2.13 Dokážte, že pre ľubovoľné dve množiny $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ platí

(a) $\mathscr{P}(\mathbb{X}) \cup \mathscr{P}(\mathbb{Y}) \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{X} \cup \mathbb{Y})$
(b) $\mathscr{P}(\mathbb{X} \cap \mathbb{Y}) = \mathscr{P}(\mathbb{X}) \cap \mathscr{P}(\mathbb{Y})$
(c) $(\mathscr{P}(\mathbb{X}) \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{Y})) \Rightarrow (\mathbb{X} \subseteq \mathbb{Y})$ ■

Cvičenie 2.14 Dokážte, že pre ľubovoľné dve množiny $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ platí

(a) $\mathbb{A} \triangle \mathbb{B} = (\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \cup (\mathbb{B} \setminus \mathbb{A})$
(b) $(\mathbb{A} \triangle \mathbb{B}) \triangle \mathbb{A} = \mathbb{B}$ ■

Cvičenie 2.15 Dokážte, že pre ľubovoľné tri množiny $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ a $\mathbb{Z}$ platí

(a) $(\mathbb{X} \subseteq \mathbb{Y}) \Rightarrow (\mathbb{X} \cup \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Y} \cup \mathbb{Z})$
(b) $(\mathbb{X} \subseteq \mathbb{Y}) \Rightarrow (\mathbb{X} \cap \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Y} \cap \mathbb{Z})$
(c) $(\mathbb{X} \subseteq \mathbb{Y}) \Rightarrow (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Y} \subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{X})$
(d) $(\mathbb{X} \subseteq \mathbb{Y}) \Rightarrow (\mathbb{Y} \setminus (\mathbb{Y} \setminus \mathbb{X}) = \mathbb{X})$
(e) $((\mathbb{X} \cap \mathbb{Y} = \mathbb{X} \cap \mathbb{Z}) \wedge (\mathbb{X} \cup \mathbb{Y} = \mathbb{X} \cup \mathbb{Z})) \Rightarrow (\mathbb{Y} = \mathbb{Z})$ ■

Cvičenie 2.16 Nech $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ a $\mathbb{Z}$ sú tri množiny z univerza $\mathscr{U}$ a univerzum pre kartézky súčin je $\mathscr{U} \times \mathscr{U}$. Dokážte nasledujúce tvrdenia ak sú pravdivé. Inak nájdite kontrapríklad.

(a) $\forall \mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathscr{U}: \ (\mathbb{X} \subseteq \mathbb{Y}) \vee (\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X})$
(b) $\forall \mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathscr{U}: \ \overline{\mathbb{Y} \setminus \mathbb{X}} = \mathbb{X} \cup \overline{\mathbb{Y}}$
(c) $\forall \mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathscr{U}: \ \overline{\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}} = \overline{\mathbb{Y} \setminus \mathbb{X}}$
(d) $\forall \mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathscr{U}: \ \overline{\mathbb{X} \cap \mathbb{Y}} \subseteq \mathbb{X}$
(e) $\forall \mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathscr{U}: \ \overline{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}} = \overline{\mathbb{X}} \times \overline{\mathbb{Y}}$
(f) $\forall \mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathscr{U}: \ (\mathbb{X} \cap \mathbb{Y}) \cup (\mathbb{Y} \setminus \mathbb{X}) = \mathbb{Y}$
(g) $\forall \mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z} \in \mathscr{U}: \ \mathbb{X} \times (\mathbb{Y} \setminus \mathbb{Z}) = (\mathbb{X} \times \mathbb{Y}) \setminus (\mathbb{X} \times \mathbb{Z})$
(h) $\forall \mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z} \in \mathscr{U}: \ \mathbb{X} \cap (\mathbb{Y} \times \mathbb{Z}) = (\mathbb{X} \cap \mathbb{Y}) \times (\mathbb{X} \cap \mathbb{Z})$
(i) $\forall \mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z} \in \mathscr{U}: \ \mathbb{X} \cup (\mathbb{Y} \setminus \mathbb{Z}) = (\mathbb{X} \cup \mathbb{Y}) \setminus (\mathbb{X} \cup \mathbb{Z})$
(j) $\forall \mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z} \in \mathscr{U}: \ \mathbb{Y} \setminus \mathbb{Z} = (\mathbb{X} \cup \mathbb{Y}) \setminus (\mathbb{X} \cup \mathbb{Z})$
(k) $\forall \mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z} \in \mathscr{U}: \ \mathbb{X} \setminus (\mathbb{Y} \cup \mathbb{Z}) = (\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}) \cup \mathbb{Z}$
(l) $\forall \mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z} \in \mathscr{U}: \ (\mathbb{X} \times \mathbb{Y}) \cup (\mathbb{X} \times \mathbb{Z}) = \mathbb{X} \times (\mathbb{Y} \cup \mathbb{Z})$
(m) $\forall \mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z} \in \mathscr{U}: \ \mathbb{X} \setminus (\mathbb{Y} \times \mathbb{Z}) = (\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}) \times (\mathbb{X} \setminus \mathbb{Z})$ ■

Cvičenie 2.17 Pre ľubovoľné tri množiny $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ a $\mathbb{C}$ dokážte alebo vyvráťte tvrdenia

(a) $\star$ $(\mathbb{A} \triangle \mathbb{C} = \mathbb{B} \triangle \mathbb{C}) \Rightarrow (\mathbb{A} = \mathbb{B})$
(b) $\star$ $(\mathbb{A} \triangle \mathbb{B}) \triangle \mathbb{C} = \mathbb{A} \triangle (\mathbb{B} \triangle \mathbb{C})$
(c) $\mathbb{A} \triangle (\mathbb{B} \cap \mathbb{C}) = (\mathbb{A} \triangle \mathbb{B}) \cap (\mathbb{A} \triangle \mathbb{C})$
(d) $\mathbb{A} \cap (\mathbb{B} \triangle \mathbb{C}) = (\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) \triangle (\mathbb{A} \cap \mathbb{C})$
(e) $\mathbb{A} \triangle (\mathbb{B} \cup \mathbb{C}) = (\mathbb{A} \triangle \mathbb{B}) \cup (\mathbb{A} \triangle \mathbb{C})$
(f) $\mathbb{A} \cup (\mathbb{B} \triangle \mathbb{C}) = (\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) \triangle (\mathbb{A} \cup \mathbb{C})$
(g) $\mathbb{A} \triangle \mathbb{B} = \mathbb{B} \triangle \mathbb{A}$ ■

Cvičenie 2.18 Dokážte, že pre ľubovoľné množiny $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}_i$ platí

$$\mathbb{A} \cup (\mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2 \cap \ldots \cap \mathbb{B}_n) = (\mathbb{A} \cup \mathbb{B}_1) \cap (\mathbb{A} \cup \mathbb{B}_2) \cap \ldots \cap (\mathbb{A} \cup \mathbb{B}_n).$$ ■

Nepriamy dôkaz

Cvičenie 2.19 Dokážte: $\forall x \in \mathbb{R}: \ (x^2 \notin \mathbb{Q}) \Rightarrow (x \notin \mathbb{Q})$. ■

Cvičenie 2.20 Dokážte: $\forall x \in \mathbb{R}: \ (x^3 \notin \mathbb{Q}) \Rightarrow (x \notin \mathbb{Q})$. ■

Cvičenie 2.21 Dokážte tvrdenia

(a) $\forall n \in \mathbb{Z}: \ (2 \nmid n^2) \Rightarrow (2 \nmid n)$
(b) $\forall x,y,z \in \mathbb{R}: \ (x+y+z \geq 3) \Rightarrow (x \geq 1 \ \vee \ y \geq 1 \ \vee \ z \geq 1)$
(c) $\forall x,y \in \mathbb{R}: \ (x.y \leq 2) \Rightarrow (x \leq \sqrt{2} \ \vee \ y \leq \sqrt{2})$ ■

Dôkaz sporom

Cvičenie 2.22 Dokážte, že $\sqrt[3]{2}$ nie je racionálne číslo. ■

Cvičenie 2.23 Dokážte, že $\sqrt{3}$ nie je racionálne číslo.
(Pomôcka: najskôr vyriešte cvičenia 2.5 a 2.6.) ■

Cvičenie 2.24 Dokážte, že nasledujúce čísla nie sú racionálne

(a) $\log 2$ (b) $\log 5$ (c) $\log 15$ (d) $\log 21$ ■

Cvičenie 2.25 Dokážte, že pre ľubovoľné dve množiny $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ platí $(\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \cap (\mathbb{B} \setminus \mathbb{A}) = \emptyset$. ■

Cvičenie 2.26 Dokážte, že pre ľubovoľnú množinu $\mathbb{A}$ platí $\mathbb{A} \times \emptyset = \emptyset$. ■

Cvičenie 2.27 Dokážte, že prvočísel je nekonečne veľa. ■

Cvičenie 2.28 Dokážte, že ak 100 lôpt rozmiestnime do 9 krabíc, tak v aspoň jednej krabici bude aspoň 12 lôpt. ■

Cvičenie 2.29 Dokážte, že ak 40 lôpt rozmiestnime do 9 krabíc, pričom v každej krabici bude aspoň 1 lopta, tak aspoň dve krabice budú obsahovať rovnaký počet lôpt. ■

Cvičenie 2.30 Nech $A = \frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n}$ je aritmetický priemer čísel $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathbb{R}$. Dokážte

(a) $\exists i \in \mathbb{N}: \ s_i \leq A$ (b) $\exists i \in \mathbb{N}: \ s_i \geq A$ ■

Cvičenie 2.31 Dokážte tvrdenia

(a) $\forall x,y \in \mathbb{R}: \ (x \in \mathbb{Q} \ \wedge \ y \notin \mathbb{Q}) \Rightarrow (x+y) \notin \mathbb{Q}$
(b) $\forall x,y \in \mathbb{R}: \ (x \in \mathbb{Q} \ \wedge \ y \notin \mathbb{Q}) \Rightarrow (x.y) \notin \mathbb{Q}$
(c) $(\forall x,y \in \mathbb{R}): \ ((\forall \varepsilon > 0): \ x - y \leq \varepsilon) \Rightarrow (x \leq y)$ ■

Dôkaz matematickou indukciou

Cvičenie 2.32 Dokážte, že každé celé číslo vieme zapísať ako súčin mocnín prvočísel. ■

Cvičenie 2.33 Dokážte, že n bodov v rovine, z ktorých žiadne tri nie sú kolineárne, vieme spojiť práve $\frac{n(n-1)}{2}$ priamkami, ak každý bod spájame s každým práve jednou priamkou. ■

Cvičenie 2.34 Dokážte, že $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

(a) $6 \mid (7^n - 1)$
(b) $4 \mid (6.7^n - 2.3^n)$
(c) $31 \mid \left(5^{n+1} + 6^{2n-1}\right)$
(d) $5 \mid (11^n - 1)$
(e) $11 \mid \left(2^{2n-1} + 3^{4n-2}\right)$
(f) $30 \mid \left(7^{4n+1} - 7\right)$

■

Cvičenie 2.35 Dokážte, že $\forall n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosť $\frac{1}{2n} \leq \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}$. ■

Cvičenie 2.36 Pre každé $n \in \mathbb{N}$ dokážte rovnosti

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i.(i+1) = \frac{n.(n+1).(n+2)}{3}$

(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i.(i+1).(i+2) = \frac{n.(n+1).(n+2).(n+3)}{4}$

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i.(i!) = (n+1)! - 1$

(e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$

(f) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} i^2 = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n.(n+1)}{2}$

(g) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = \frac{n.(2n-1)(2n+1)}{3}$

(h) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n.(n+1)}{2}\right)^2$

(i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i.(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

(j) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$

(k) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

(l) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

(m) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+1)^2 - 1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}$

■

Cvičenie 2.37 Dokážte, že pre $2 \leq n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosť $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{n}{n+1} < \frac{n^2}{n+1}$. ■

Cvičenie 2.38 Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}$ platia nerovnosti

(a) pre $n \geq 0:\ 2^n > n$
(b) pre $n \geq 3:\ 2^n > 2n+1$
(c) pre $n \geq 5:\ 2^n > n^2$

■

Cvičenie 2.39 Nech $\mathbb{A}, \mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \ldots, \mathbb{B}_n$ sú ľubovoľné množiny. Dokážte, že platí

(a) $\mathbb{A} \cap (\mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2 \cup \ldots \cup \mathbb{B}_n) = (\mathbb{A} \cap \mathbb{B}_1) \cup (\mathbb{A} \cap \mathbb{B}_2) \cup \ldots \cup (\mathbb{A} \cap \mathbb{B}_n)$

(b) $\overline{\mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2 \cap \ldots \cap \mathbb{B}_n} = \overline{\mathbb{B}}_1 \cup \overline{\mathbb{B}}_2 \cup \ldots \cup \overline{\mathbb{B}}_n$

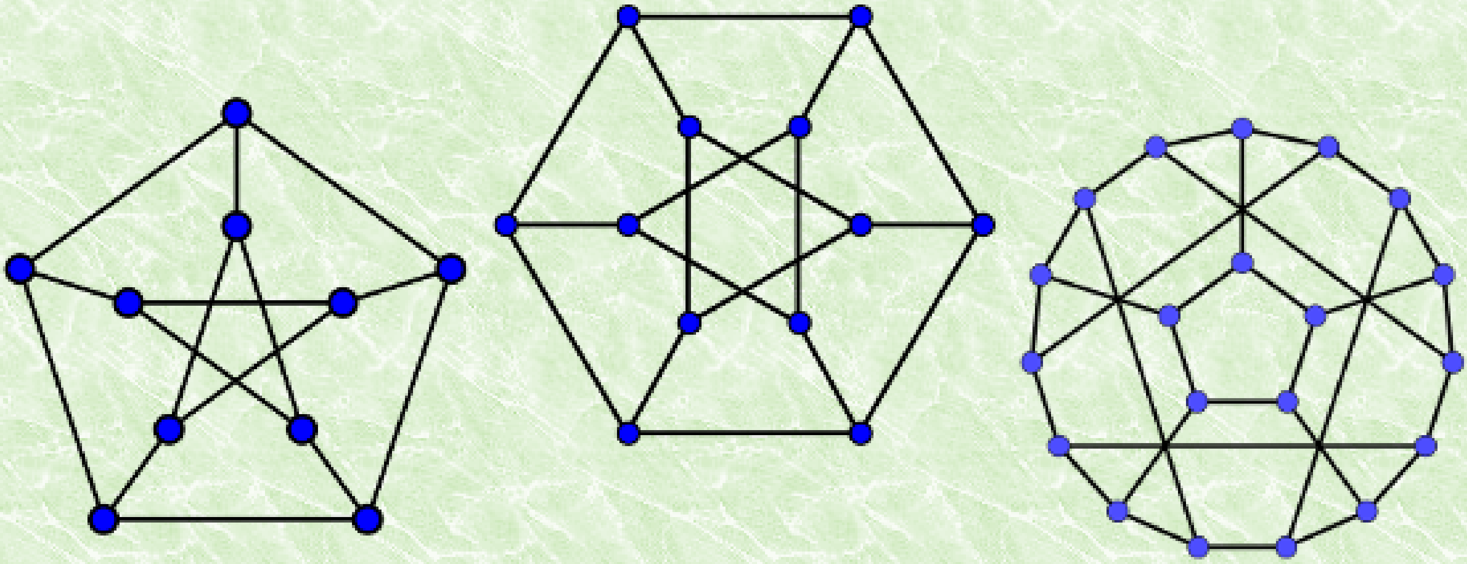
(c) $|\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2 \times \ldots \times \mathbb{B}_n| = |\mathbb{B}_1|.|\mathbb{B}_2| \ldots |\mathbb{B}_n|$

■

Cvičenie 2.40 Dokážte, že nasledujúce logické výroky sú tautológie

(a) $(\dots(\underbrace{(A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow \dots) \Rightarrow A}_{2k\ A\text{-čiek}}$

(b) $(\dots((\neg A \Rightarrow \underbrace{A) \Rightarrow A) \Rightarrow \dots) \Rightarrow A}_{2k\ A\text{-čiek}}$



3. Základné pojmy teórie grafov

3.1 Historický úvod

Teória grafov je pomerne mladá matematická disciplína, má však veľmi vážne praktické uplatnenie. Prvopočiatky teórie grafov siahajú do začiatku 18. storočia a sú spojené s menom švajčiarskeho matematika a fyzika Leonharda Eulera, ktorý po väčšinu svojho života pôsobil v Rusku, kde je aj pochovaný. V roku 1736 Euler publikoval prácu s názvom *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, v ktorej riešil problém prechádzky po mostoch mesta Königsberg (dnešný Kaliningrad). Jednalo sa, z dnešného pohľadu, o hlavolamovú úlohu. Až oveľa neskôr sa ukázalo, že problém,

Obr. 3.1: Problém mostov mesta Königsberg

ktorý Euler vyriešil, má významné uplatnenia v doprave, elektrotechnike, informatike a v mnohých ďalších technických disciplínach. Euler pri svojom riešení abstrahoval podstatu problému. Mapu mesta previedol do jej topologickej podoby, tú ďalej reprezentoval pomocou grafu a pomocou grafu potom problém vyriešil.

Ďalších takmer 200 rokov sa teória grafov rozvíjala v „ilegalite“. To znamená, že matematici riešili problémy, ktoré dnes patria do teórie grafov, ale teória grafov ešte neexistovala ako samostatná matematická disciplína. Medzi slávne a veľmi známe problémy teórie grafov, ktorými sa matematici zaoberali už v 19. storočí, patria napríklad *problém obchodného cestujúceho* a *problém štyroch farieb*. Problém obchodného cestujúceho[1] ako prvý matematicky sformuloval írsky mate-

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Travelling_salesman_problem`

matik W. R. Hamilton v roku 1800 a odvtedy sa ním zaoberali a stále zaoberajú mnohí významní matematici. Tento problém sa radí medzi problémy kombinatorickej optimalizácie a je to NP-úplný problém súvisiaci s plánovaním, logistikou, mikroelektronikou, operačným výskumom a informatikou. Problém štyroch farieb[2] ako prvý sformuloval F. Guthrie, žiak známeho matematika Augusta de Morgana, v roku 1852. Týmto problémom sa tiež zaoberali mnohí slávni matematici, okrem iného aj Arthur Cayley, ktorý sa považuje za jedného z otcov teórie grafov. Problém štyroch farieb veľmi dlho odolával pokusom o vyriešenie. Už v 19. storočí prišli matematici s jeho „dôkazmi“. S najúspešnejšími pokusmi prišli A. Kempe v roku 1879 a P. Tait v roku 1880. Oba tieto „dôkazy“ odolávali vyše 11 rokov, ale nakoniec sa ukázali ako chybné v rokoch 1890 a 1891. Okrem týchto dvoch nasledovala ešte celá rada viac či menej úspešných pokusov o vyriešenie problému štyroch farieb. Na jeho vyriešenie bola dokonca vypísaná aj veľká finančná odmena. Avšak až v roku 1976 sa dvom matematikom, K. Appelovi a W. Hakenovi, podarilo vyriešiť tento problém za pomoci počítačov. Ich dôkaz spočíval v overovaní 1936[3] možností pomocou počítača. Bol to prvý významný matematický problém dokázaný s podporou počítačov. Formálny matematický dôkaz problému štyroch farieb sa, síce bez overovania možností, ale taktiež s pomocou programu *Coq*, podaril až v roku 2005 matematikom B. Wernerovi a G. Gonthierovi.

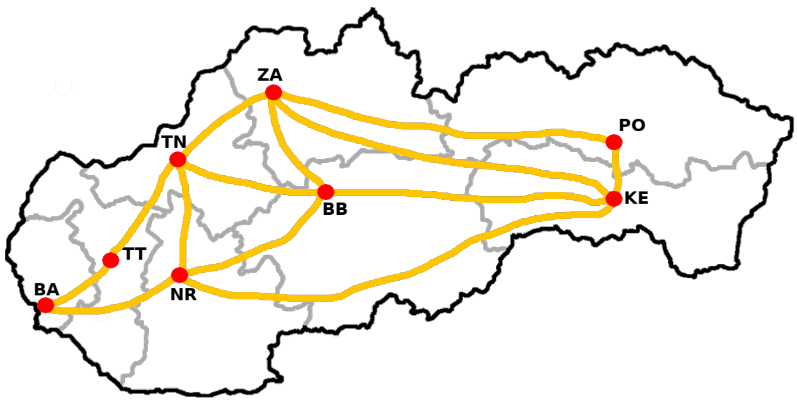
Oba spomenuté problémy boli spočiatku sformulované ako hlavolamové úlohy. Až o desaťročia neskôr sa ukázalo, že majú obrovský význam pre mnohé nové odvetvia techniky aj prírodných vied, ktoré v čase formulácie týchto problémov ešte ani neexistovali. To isté platí aj o ďalších problémoch teórie grafov a matematických problémoch všeobecne. To, čo dnes vyzerá ako od života odtrhnutá teória, sa o pár desaťročí môže ukázať ako pre technickú prax podstatná vec.

Prvú monografiu o teórii grafov napísal až v roku 1936 maďarský matematik Dénes Kőnig. Odvtedy patrí teória grafov medzi najrýchlejšie sa rozvíjajúce matematické disciplíny s množstvom praktických aplikácii v informatike, technike, prírodných vedách, v ekonómii a dokonca aj v tzv. humanitných vedách.

Okrem prednášok a tohto textu sú veľmi dobrým zdrojom informácií z teórie grafov, kniha [15], prípadne dvoje voľne dostupné skriptá [10] a [18], knihy [6], [4], [5], [17] atď.

3.2 Definícia grafu, typy grafov, základné pojmy

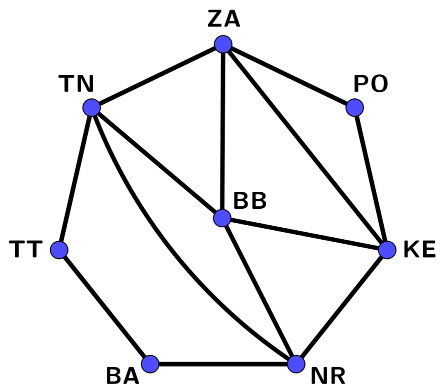
V praxi sa často stretávame s rôznymi typmi diagramov. Môžu to byť napríklad mapy cestnej alebo železničnej siete, rozvody plynu, elektriny alebo vody, výrobné plány, plošné spoje alebo návrhy mikroprocesorov, chemické väzby, štruktúra DNA atď. Napríklad môžeme mať cestnú mapu medzi



8 slovenskými krajskými mestami, ktorá vyzerá tak, ako je to znázornené na obrázku vyššie. Červené kruhy predstavujú krajské mestá a žlté čiary predstavujú cesty, ktoré ich spájajú. Predpokladajme, že máme za úlohu naplánovať trasu zásobovacieho auta, ktoré má vyštartovať z Bratislavy,

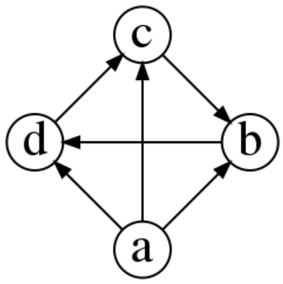
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem

[3] Neskôr sa tento počet podarilo zredukovať.



po každej z ciest má prejsť práve raz a má skončiť opäť v Bratislave. Pri takomto type úlohy nie je podstatné ako dlhé a kľukaté sú cesty, ani ako sú veľké mestá a dokonca ani na tom, ako sú tieto mestá rozložené. Takže cestnú sieť medzi mestami môžeme abstrahovať od týchto, pre danú úlohu nepodstatných detailov a môžeme si ju znázorniť grafom, ktorý vidíme na obrázku vpravo. Body na grafe zodpovedajú mestám a budeme ich nazývať *vrcholy grafu*. Čiary spájajúce vrcholy grafu zodpovedajú cestám a budeme ich nazývať *hrany grafu*. Na grafe potom budeme riešiť popísanú úlohu. Podrobnejšie sa takýmito úlohami budeme zaoberať až v ďalších častiach. Nateraz sme si na uvedenej úlohe len ilustrovali pojem *neorientovaného grafu*. Ako vidíme, pojem graf v teórii grafov sa líši od pojmu graf v matematickej analýze.

Okrem neorientovaných grafov existujú ešte aj orientované grafy. Na predošlej úlohe by sme to mohli predstaviť tak, že cesty medzi mestami sú jednosmerné, čiže autá po nich môžu jazdiť len jedným predpísaným smerom. Pojem orientovaného grafu si, pre väčšiu názornosť, ilustrujeme ešte aj na úplne odlišnom type úlohy. Na športovom turnaji hrajú štyri mužstvá **a, b, c, d** systémom „každý s každým“. Mužstvo **a** porazilo mužstvá **b, c** a **d**, mužstvo **b** porazilo mužstvo **d**, mužstvo **c** porazilo mužstvo **b** a napokon mužstvo **d** porazilo mužstvo **c**. Toto možeme znázorniť pomocou orientovaného grafu, ktorý vidíme na obrázku vľavo. Vrcholy grafu predstavujú mužstvá a šípky, nazývané *orientované hrany grafu*, znázorňujú kto koho porazil.



Pojmy, ktoré sme si neformálne ilustrovali na predošlých príkladoch, si teraz definujeme aj formálne. Najskôr si definujeme neorientovaný a potom orientovaný graf. Pojem orientovaného grafu však budeme, v rámci predmetu *Diskrétna matematika*, používať len na prednáškach o reláciách. Na prednáškach, zaoberajúcich sa teóriou grafov a jej aplikáciami v informatike, sa budeme zaoberať len neorientovanými grafmi.

Definícia 3.2.1 — Neorientovaný graf. Neorientovaný graf, alebo stručne len graf, je usporiadaná dvojica $G = (V, E)$. Prvky množiny V sa nazývajú *vrcholy* (vertices) grafu G. Prvky množiny E sa nazývajú *hrany* (edges) grafu G a zodpovedajú jedno a dvojprvkovým podmnožinám množiny V.

P Treba si uvedomiť, že na množinu V sa v definícii 3.2.1 nekladú žiadne požiadavky. Uvedená definícia preto zahŕňa aj *prázdny graf*, t. j. graf, ktorý nemá žiadne vrcholy ani hrany. Prázdny graf dostaneme, ak bude $V = \emptyset$. Ďalej uvedená definícia pripúšťa aj *nekonečný graf*, t. j. graf, ktorý má nekonečný počet vrcholov, napríklad ak bude $V = \mathbb{Z}$. My sa budeme zaoberať len *konečnými grafmi*, t. j. grafmi s konečným počtom vrcholov a hrán.

Vrcholy grafu obvykle označujeme písmenami $u, v, v_1, v_2, \ldots$ avšak môžeme ich označiť aj inak, ako sme to videli na príklade s krajskými mestami Slovenska. Hrany grafu budeme obvykle označovať písmenami $h, h_1, h_2, \ldots$ a ak to bude potrebné, budeme ich zapisovať ako jednoprvkové alebo dvojprvkové množiny. Napríklad $h_1 = \{u, v\}$ bude označovať hranu spájajúcu vrcholy u a v a $h_2 = \{u\}$ bude označovať hranu spájajúcu vrchol u sám so sebou.

P Definícia 3.2.1 pripúšťa aj možnosť, že medzi dvoma vrcholmi grafu G je aj viac než len jedna hrana. Majme napríklad graf s vrcholmi $V = \{u, v, \ldots\}$ a hranami $E = \{h_1, h_2, \ldots\}$, pričom $h_1 = \{u, v\}$ a $h_2 = \{u, v\}$. Uvedený zápis znamená, že vrcholy u a v sú spojené aspoň dvoma hranami. V definícii 3.2.1 je v slove „zodpovedajú“ ukryté priradenie medzi hranami grafu a podmnožinami množiny V. Takže správne by sme mali písať $h_1 \to \{u, v\}$ a $h_2 \to \{u, v\}$. Pre jednoduchosť však aj naďalej budeme používať symbol „=“.

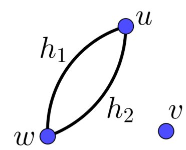
Teraz si ešte definujeme pojmy týkajúce sa vrcholov a hrán grafu a potom si tieto nové pojmy ilustrujeme na príkladoch.

Definícia 3.2.2 — Vrcholy a hrany grafu.

- **Incidencia –** Ak $h = \{u, v\}$, čiže hrana h spája vrcholy u a v, tak potom hovoríme, že tieto vrcholy *incidujú* s hranou h a aj naopak, hrana h *inciduje* s vrcholmi u a v.
- **Susednosť –** Ak máme hranu $h = \{u, v\}$, t. j. vrcholy u a v sú spojené hranou, tak tieto vrcholy sa nazývajú *susedné vrcholy*.
- **Násobné hrany –** Ak sú dva vrcholy spojené viac než jednou hranou, tak hrany, ktoré ich spájajú, sa nazývajú *násobné hrany*.
- **Slučka –** Ak je vrchol u spojený hranou (susedí) sám so sebou, napríklad $h = \{u\}$, potom sa taká hrana sa nazýva *slučka*.
- **Izolovaný vrchol –** Vrchol, ktorý neinciduje so žiadnou hranou sa nazýva *izolovaný vrchol*.

■ **Príklad 3.1**

V grafe, ktorý vidíme na obrázku vpravo, je vrchol v izolovaný vrchol a hrany h_1 a h_2, ktoré spájajú vrcholy u a w, sú násobné hrany. Vrcholy u a w sú susedné vrcholy a oba incidujú s hranami h_1 aj h_2.

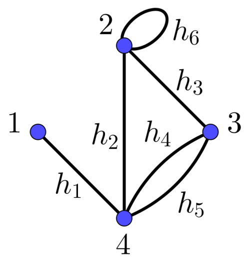


■

P Vzťah medzi vrcholom a hranou, alebo hranou a vrcholom, sa vždy bude nazývať incidencia a vzťah medzi vrcholom a vrcholom sa vždy bude nazývať susednosť.

■ **Príklad 3.2** Daný je neorientovaný graf $G = (V, E)$ s vrcholovou množinou $V = \{1, 2, 3, 4\}$ a s hranami $E = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$, pričom hrany sú definované predpisom

$$h_1 = \{1,4\}, \quad h_2 = \{2,4\}, \quad h_3 = \{2,3\}, \quad h_4 = \{3,4\}, \quad h_5 = \{3,4\}, \quad h_6 = \{2\}$$



Graf G je zobrazený na obrázku vľavo. Hrana h_6 je slučka, inciduje len s vrcholom 2. Hrany h_4 a h_5 sú násobné hrany, spájajúce vrcholy 3 a 4. Hrana h_2 inciduje s vrcholmi 2 a 4 a rovnako aj tieto vrcholy incidujú s hranou h_2.

■

Formálna definícia orientovaného grafu je podobná definícii neorientovaného grafu, len naviac ešte musíme definovať orientáciu hrán.

Definícia 3.2.3 — Orientovaný graf. Orientovaný graf, alebo *digraf* (directed graph), je usporiadaná dvojica $G = (V, E)$. Prvky množiny V sa nazývajú *vrcholy* grafu G. Prvky množiny E sa nazývajú *orientované hrany* grafu G a zodpovedajú usporiadaným dvojiciam prvkov množiny V.

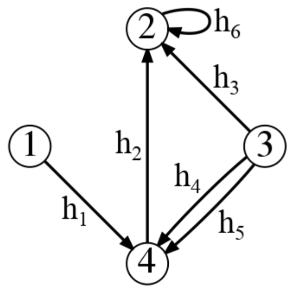
Ak $h = (u, v)$ kde $u \neq v$, tak hovoríme, že orientovaná hrana h spája vrcholy u a v, pričom vrchol u je *počiatočný* a vrchol v je *koncový* vrchol hrany h. Ak $h = (u, u)$, tak hovoríme, že orientovaná hrana h je *slučka*.

Ostatné pojmy z definície 3.2.2 platia rovnako pre neorientované aj pre orientované grafy.

■ **Príklad 3.3** Daný je orientovaný graf $G = (V, E)$ s vrcholovou množinou $V = \{1, 2, 3, 4\}$ a s hranami $E = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$, pričom hrany sú definované predpisom

$$h_1 = (1,4)\,, \quad h_2 = (4,2)\,, \quad h_3 = (3,2)\,, \quad h_4 = (3,4)\,, \quad h_5 = (3,4)\,, \quad h_6 = (2,2)$$

Graf G je zobrazený na obrázku vpravo. Všetky hrany tohto grafu majú orientáciu. Hrana $h_6 = (2,2)$ je slučka, inciduje len s vrcholom 2. Hrany h_4 a h_5 sú násobné hrany. Obe majú počiatočný vrchol 3 a koncový vrchol 4.

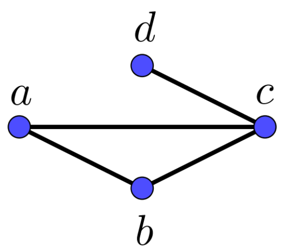


■

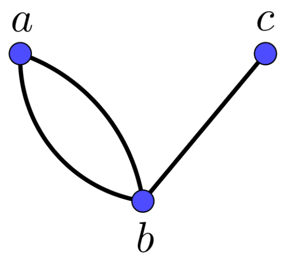
Teraz si definujeme pojem *obyčajný graf*. Väčšina grafov, s ktorými sa na predmete *Diskrétna matematika* budeme stretávať, budú obyčajné grafy.

Definícia 3.2.4 — Obyčajný graf. Obyčajný graf, nazývaný aj jednoduchý graf, je graf bez slučiek a násobných hrán.

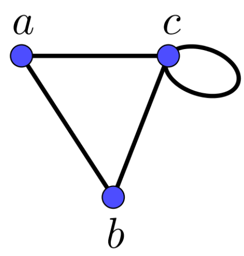
■ **Príklad 3.4** Graf na obrázku 3.2 je obyčajný graf. Graf na obrázku 3.3 má násobné hrany, a preto nie je obyčajný. Rovnako ani graf na obrázku 3.4 nie je obyčajný, pretože má slučku.



Obr. 3.2: Obyčajný graf



Obr. 3.3: Násobné hrany



Obr. 3.4: Graf so slučkou

■

Ďalším dôležitým pojmom, s ktorým sa často budeme stretávať, je *stupeň vrcholu*. Jeho formálna definícia je nasledovná.

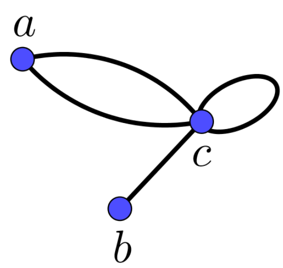
Definícia 3.2.5 — Stupeň vrcholu. Stupeň vrcholu u v grafe G je počet hrán, ktoré s vrcholom u incidujú, pričom slučky sa počítajú dvakrát. Stupeň vrcholu u označujeme $\mathrm{st}(u)$.

■ **Príklad 3.5**

Stupne vrcholov grafu na obrázku vpravo sú

$$\mathrm{st}(a) = 2\,, \quad \mathrm{st}(b) = 1\,, \quad \mathrm{st}(c) = 5\,.$$

Slučka pri vrchole c inciduje s týmto vrcholom dvakrát, a preto sa do stupňa vrcholu c aj započítavá dvojnásobne.



■

Pre súčet stupňov vrcholov v grafe, platí nasledujúca, veľmi jednoduchá, ale zároveň aj veľmi dôležitá a často využívaná veta.

Veta 3.2.1 — Súčet stupňov vrcholov v grafe. Nech G je graf a $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sú jeho vrcholy. Potom platí rovnosť

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{st}\,(v_i) = 2e\,,$$

kde e je počet hrán grafu G.

Dôkaz: Tvrdenie budeme dokazovať matematickou indukciou vzhľadom na počet hrán grafu.

1. Overenie pre $e = 0$: Ak graf G nemá žiadnu hranu, tak potom $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{st}\,(v_i) = 2 \cdot 0 = 0$, takže tvrdenie platí.
2. Indukčný krok: Predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky grafy s $e = (k-1)$ hranami. Potom ukážeme, že tvrdenie platí aj pre grafy s $e = k$ hranami. Zoberme si graf G s $e = k$ hranami. Vynechaním jednej jeho hrany dostaneme graf G' s $e' = (k-1)$ hranami, pre ktorý podľa indukčného predpokladu tvrdenie platí. Takže

$$G' : \qquad \sum_{i=1}^{n} \mathrm{st}\,(v_i) = 2e' = 2k - 2\,.$$

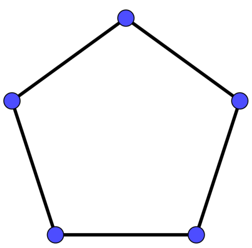
Ak do grafu G' vrátime odobratú hranu, tak táto súčet stupňov vrcholov zvýši o 2. Každá hrana má 2 konce a buď inciduje s jedným vrcholom dvakrát a je to slučka, alebo inciduje s dvoma rôznymi vrcholmi, s každým práve raz. V každom prípade do súčtu stupňov vrcholov prispeje číslom 2. Preto pre graf G platí

$$G : \qquad \sum_{i=1}^{n} \mathrm{st}\,(v_i) = 2k - 2 + 2 = 2k = 2e\,. \qquad \text{Q.E.D.}$$

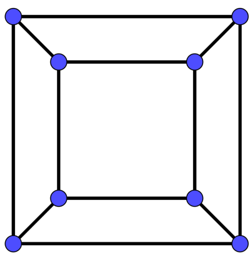
Veta 3.2.1 je síce veľmi jednoduchá ale fakt, že súčet stupňov vrcholov grafu je vždy párny má vážne praktické dôsledky, o ktorých sa môžeme presvedčiť napríklad aj v cvičeniach 3.3 až 3.6 na konci kapitoly. Pomocou stupňa vrcholov môžeme definovať pojem *pravidelný graf*. Pravidelné grafy majú množstvo aplikácií v praktických úlohách a patria medzi najviac skúmané grafy.

Definícia 3.2.6 — Pravidelný graf. Graf nazývame pravidelný stupňa s, ak všetky jeho vrcholy sú stupňa s.

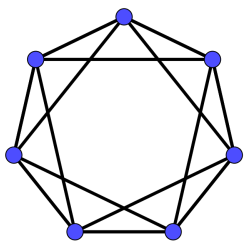
■ **Príklad 3.6** Pravidelné sú napríklad grafy na nasledovných obrázkoch



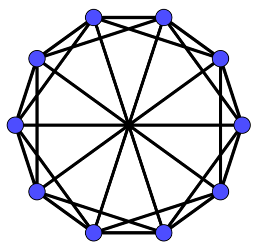
Obr. 3.5: Stupeň 2



Obr. 3.6: Stupeň 3



Obr. 3.7: Stupeň 4



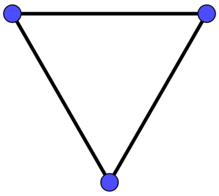
Obr. 3.8: Stupeň 5

■

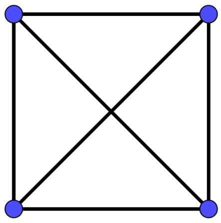
Ďalším dôležitým pojmom teórie grafov je *kompletný graf*.

Definícia 3.2.7 — Kompletný graf. Kompletný (úplný) graf na n vrcholoch sa označuje K_n a je to obyčajný graf s n vrcholmi, ktorý obsahuje hranu medzi ľubovoľnými dvoma rôznymi vrcholmi.

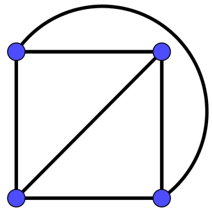
■ **Príklad 3.7** Na obrázku 3.9 je kompletný graf na 3 vrcholoch (K_3). Na obrázkoch 3.10 a 3.11 je kompletný graf na 4 vrcholoch (K_4), nakreslený dvoma rôznymi spôsobmi. Graf K_4 je na obrázku 3.10 nakreslený s pretínajúcimi sa hranami a na obrázku 3.11 bez pretínajúcich sa hrán.



Obr. 3.9: Graf K_3



Obr. 3.10: Graf K_4



Obr. 3.11: Graf K_4

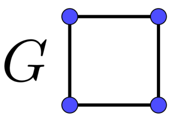
■

Pomocou kompletného grafu vieme jednoducho definovať pojem *komplementárny graf*, ktorý sa využíva v niektorých aplikáciach. Stretneme sa s ním napríklad v cvičeniach 3.7, 3.8.

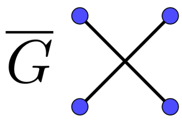
Definícia 3.2.8 — Komplementárny graf. Nech G je obyčajný graf na n vrcholoch. Potom komplementárny (doplnkový) graf ku grafu G budeme označovať $\overline{G}$ a dostaneme ho tak, že z grafu K_n vynecháme všetky hrany, ktoré patria do grafu G.

P Predošlá definícia vlastne hovorí, že $\overline{G}$ má rovnaku množinu vrcholov ako graf G a hranou sú v grafe $\overline{G}$ spojené práve tie vrcholy, ktoré nie sú spojené hranou v grafe G.

■ **Príklad 3.8** Na nasledujúcich dvoch obrázkoch je príklad grafu G a jeho komplementu $\overline{G}$.



Obr. 3.12: Graf G



Obr. 3.13: Komplementárny graf $\overline{G}$

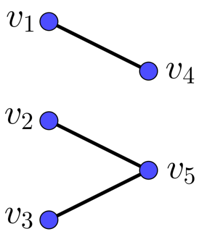
■

Nasledujúcou dôležitou kategóriou grafov sú *bipartitné grafy*.

Definícia 3.2.9 — Bipartitný graf. Graf G s množinou vrcholov V sa nazýva bipartitný, ak existujú podmnožiny V_1 a V_2 množiny V také, že platí $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = V$ a každá hrana grafu G inciduje s jedným vrcholom z množiny V_1 a s jedným vrcholom z množiny V_2.

P Bipartitné grafy sú také grafy, v ktorých množinu vrcholov môžeme rozdeliť na dve časti tak, že ľubovoľné dva vrcholy, patriace do rovnakej časti, nie sú navzájom spojené hranou.

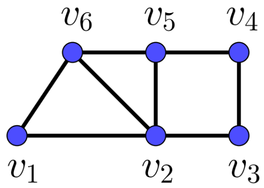
■ **Príklad 3.9**



Graf na obrázku vľavo je bipartitný. Jeho množinu vrcholov V môžeme rozdeliť na dve podmnožiny $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ a $V_2 = \{v_4, v_5\}$ tak, že $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = V$ a každá hrana tohto grafu inciduje s jedným vrcholom z množiny V_1 a s jedným vrcholom z množiny V_2. Pritom, ako môžeme vidieť, tento graf neobsahuje všetky hrany medzi V_1 a V_2. Napríklad medzi vrcholmi v_1 a v_5 nie je hrana.

■

■ Príklad 3.10

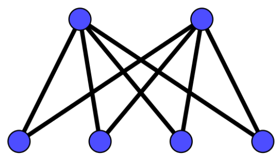


Dokážeme, že graf na obrázku vpravo nie je bipartitný. Dôkaz budeme robiť sporom. Budeme preto predpokladať, že graf na obrázku vpravo bipartitný je. Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $v_1 \in V_1$, pretože úvaha pre prípad $v_1 \in V_2$ by bola identická. Vrcholy v_2 a v_6 sú susedné vrcholu v_1, pretože incidujú s hranami vychádzajúcimi z vrcholu v_1. To znamená, že vrcholy v_2 a v_6 musia patriť do V_2. To však je spor s tým, že daný graf je bipartitný, pretože vrcholy v_2 a v_6 sú spojené hranou. V bipartitnom grafe každá hrana musí incidovať s jedný vrcholom z V_1 a s jedným vrcholom z V_2. Preto daný graf nemôže byť bipartitný. ■

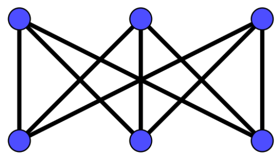
Ďalší pojem, ktorý si zadefinujeme, je *kompletný bipartitný graf*.

Definícia 3.2.10 — Kompletný bipartitný graf. Nech $m,n \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ a $n \geq 1$. Kompletný (úplný) bipartitný graf označujeme $K_{m,n}$ a je to obyčajný graf na $m+n$ vrcholoch, ktorého množina vrcholov sa dá rozdeliť na dve disjunktné podmnožiny V_1 a V_2 tak, že $|V_1| = m$ a $|V_2| = n$, pričom každý vrchol z V_1 je spojený hranou s každým vrcholom z V_2.

■ Príklad 3.11 Graf z príkladu 3.9 nie je kompletný bipartitný, pretože v ňom chýbajú napríklad hrany medzi vrcholmi v_1 a v_5 alebo medzi vrcholmi v_2 a v_4.
Grafy na obrázkoch 3.14 a 3.15 sú príklady kompletných bipartitných grafov $K_{2,4}$ a $K_{3,3}$.



Obr. 3.14: Graf $K_{2,4}$



Obr. 3.15: Graf $K_{3,3}$

■

3.3 Sledy, ťahy, cesty a cykly v grafe

Vráťme sa ku motivačným príkladom z častí 3.1 a 3.2. Nech vrcholy grafu predstavujú mestá (alebo geografické miesta) a hrany grafu predstavujú cesty medzi týmito mestami. Potom „pochôdzku“, začínajúcu v niektorom z miest, vedenú po vyznačených cestách a prechádzajúcu ďalšími mestami, nazývame v teórii grafov *sled*[4].

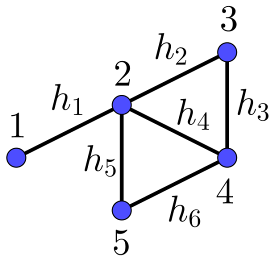
Definícia 3.3.1 — Sled, dĺžka sledu. Nech v_0 a v_n sú vrcholy grafu G. Sled z vrcholu v_0 do vrcholu v_n dĺžky n je striedavá (striedajú sa vrcholy s hranami) postupnosť $(n+1)$ vrcholov a n hrán $(v_0, h_1, v_1, h_2, \ldots, v_{n-1}, h_n, v_n)$, kde hrana h_i inciduje s vrcholmi v_{i-1} a v_i pre $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pod dĺžkou sledu sa rozumie počet jeho hrán.

P V obyčajnom grafe môžeme sled $(v_0, h_1, v_1, \ldots, v_{n-1}, h_n, v_n)$ stručne zapísať ako $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)$, čiže môžeme vynechať z jeho zápisu hrany. V obyčajnom grafe nám postupnosť vrcholov jednoznačne určuje aj postupnosť hrán medzi nimi.

[4] V niektorých starších publikáciach z oblasti teórie grafov, českej a slovenskej proveniencie, sa sled nazýval aj *pochôdzka* alebo *prechádzka*.

■ **Príklad 3.12**

V grafe na obrázku vpravo je $(1,h_1,2,h_2,3,h_3,4,h_4,2)$ sled dĺžky 4 z vrcholu 1 do vrcholu 2. Keďže daný graf nemá násobné hrany, dá sa tento sled zapísať aj ako $(1,2,3,4,2)$.
Iný sled v danom grafe je $(1,h_1,2,h_4,4,h_6,5,h_5,2,h_2,3)$. Je to sled dĺžky 5 z vrcholu 1 do vrcholu 3 a dá sa skrátene zapísať ako $(1,2,4,5,2,3)$. Napokon (5) je sled dĺžky 0 na vrchole 5.



■

Definícia 3.3.2 — Uzavretý a otvorený sled. Sled z vrcholu u do vrcholu v sa nazýva uzavretý, ak $u = v$. Ak $u \neq v$, tak sled sa nazýva otvorený.

■ **Príklad 3.13** Prvé dva sledy z príkladu 3.12 sú otvorené sledy. Prvý z nich začína vo vrchole 1 a končí vo vrchole 2 a druhý z nich začína vo vrchole 1 a končí vo vrchole 3. Posledný sled z príkladu 3.12 je uzavretý sled. Sled (5) je sled dĺžky 0, ktorý sa začína aj končí vo vrchole 5. Iný príklad uzavretého sledu z grafu v príklade 3.12 je $(2,h_2,3,h_3,4,h_6,5,h_5,2)$. ■

V sledoch sa vo všeobecnosti vrcholy aj hrany môžu opakovať. Napríklad v grafe z príkladu 3.12 by sme mohli chodiť „dokola" po slede $(2,h_4,4,h_6,5,h_5,2,h_4,4,h_6,5,h_5,2,\dots)$ Definujeme si teraz špeciálne typy sledov, v ktorých takého „behanie dokola" nie je povolené.

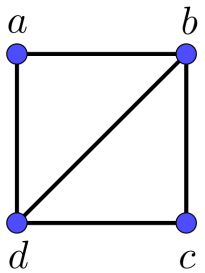
Definícia 3.3.3 — Ťah a cesta a ich dĺžka. Sled, v ktorom sa každá hrana vyskytuje najviac raz, sa nazýva ťah. Sled, v ktorom sa každý vrchol vyskytuje najviac raz, sa nazýva cesta. Dĺžka ťahu alebo cesty je počet hrán príslušného ťahu alebo cesty.

P Treba si uvedomiť, že každá cesta je aj ťah a každý ťah je aj sled. Preto ak by sme si označili `sled`, `ťah` a `cesta` množiny všetkých sledov, ťahov a ciest, tak platí

$$\texttt{cesta} \subset \texttt{ťah} \subset \texttt{sled}$$

Naopak to vo všeobecnosti neplatí, pretože existujú sledy, ktoré nie sú ťahmi a existujú ťahy, ktoré nie sú cestami.

■ **Príklad 3.14**



V grafe, na obrázku vľavo, (a,b,d,c,b) **je ťah**, (a,b,d,a,b) **nie je ťah**, pretože dvakrát obsahuje hranu $\{a,b\}$. (a,b,d,c) **je cesta** a (a,b,d,c,b) **nie je cesta**, pretože dvakrát obsahuje vrchol b.. ■

P Rovnako, ako sa v definícii 3.3.2 definoval uvavretý a otvorený sled, sa definuje aj uzavretý a otvorený ťah.

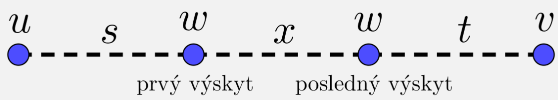
Ako už bolo spomenuté v poznámke za definíciou 3.3.3 je zrejmé, že každá cesta je aj ťah a každý ťah je aj sled. Opačná implikácia však neplatí, t. j. nie každý sled je ťah a nie každý ťah je cesta. Platí však nasledujúca veta.

Veta 3.3.1 — O existencii cesty. Majme graf G a v ňom vrcholy u a v. Potom ak medzi vrcholmi u a v existuje v grafe G sled, tak medzi nimi existuje v grafe G aj cesta.

Dôkaz: Nech v grafe G existuje sled medzi vrcholmi u a v. Potom sú dve možnosti.

1. V slede medzi vrcholmi u a v sa žiadny vrchol neopakuje a potom je tento sled cestou.
2. V slede medzi vrcholmi u a v sa opakuje vrchol w. V tom prípade si daný sled rozdelíme na 3 časti
   - s bude sled medzi vrcholom u a prvým výskytom vrcholu w v pôvodnom slede,
   - t bude sled medzi posledným výskytom vrcholu w v pôvodnom slede a vrcholom v
   - a x bude prostredná časť pôvodného sledu, medzi prvým a posledným výskytom vrcholu w v ňom.

   Situáciu vidíme na obrázku:



   Potom ak vynecháme prostrednú časť x, spolu s jedným krajným výskytom vrcholu w, tak dostaneme sled st, čo bude sled z vrcholu u do vrcholu v, v ktorom sa vrchol w neopakuje. Keďže vrcholov v pôvodnom slede je konečný počet, tak konečným opakovaním tohto postupu vieme eliminovať všetky opakujúce sa vrcholy, čím dostaneme sled z vrcholu u do vrcholu v bez opakovania vrcholov, čiže dostaneme cestu z u do v. Q.E.D.

Pomocou najkratšej cesty medzi vrcholmi u a v v grafe G vieme definovať *vzdialenosť* vrcholov u a v v grafe G. Ďalej pomocou minimálnej a maximálnej vzdialenosti dvoch vrcholov v grafe G, vieme definovať *polomer* a *priemer* grafu.

Definícia 3.3.4 — Vzdialenosť, excentricita, polomer, priemer. Majme graf $G = (V, E)$ a nech u a v sú jeho vrcholy $\big(u, v \in V\big)$. Potom

- ▷ *Vzdialenosť vrcholov u a v* v grafe G sa označuje $d_G(u, v)$ a je to dĺžka najkratšej cesty medzi týmito vrcholmi v grafe G.
- ▷ *Excentricita vrcholu u* v grafe G sa označuje $e_G(u)$ a definujeme ju predpisom

$$e_G(u) = \max\{d_G(u, v) : \ v \in V\}.$$

- ▷ *Polomer grafu G* sa označuje $r(G)$ a definuje sa predpisom $r(G) = \min\{e_G(u) : \ u \in V\}$.
- ▷ *Priemer grafu G* sa označuje $d(G)$ a definuje sa predpisom $d(G) = \max\{e_G(u) : \ u \in V\}$.

Pomocou pojmu *polomer grafu* sa definuje pojem *centrálneho vrcholu* a *centra* grafu. Tieto pojmy sú kľúčové pre algoritmus o zisťovaní izomorfizmu stromov, ktorým sa budeme zaoberať neskôr, v podkapitole 11.2.3.

Definícia 3.3.5 — Centrálny vrchol, centrum grafu. Majme graf $G = (V, E)$. Potom

- ▷ vrchol $v \in V$ sa nazýva centrálny vrchol, ak platí $e_G(v) = r(G)$.
- ▷ centrum grafu G, označíme ho $C(G)$, je množina všetkých jeho centrálnych vrcholov, t. j. $C(G) = \{v \in V;\ e_G(v) = r(G)\}$.

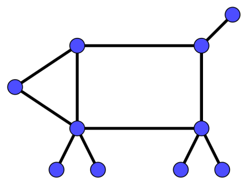
Centrum grafu je teda množina vrcholov príslušného grafu, ktoré majú minimálnu excentricitu. Voľne môžeme povedať, že centrum je tvorené vrcholmi, ktorých vzdialenosť od všetkých ostatných vrcholov grafu je najmenšia možná. Sú typy grafov, napríklad cykly, v ktorých je centrum tvorené celou ich vrcholovou množinou.

3.4 Súvislý graf, podgraf, komponent súvislosti

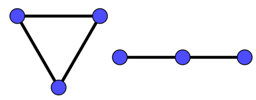
Ďalšou dôležitou vlastnosťou grafov je ich súvislosť.

Definícia 3.4.1 — Súvislý a nesúvislý graf. Graf $G = (V, E)$ sa nazýva súvislý, ak pre ľubovoľné $u, v \in V$ existuje cesta z vrcholu u do vrcholu v. Graf G sa nazýva nesúvislý, ak nie je súvislý.

■ **Príklad 3.15** Graf na obrázku 3.16 je súvislý, pretože medzi jeho ľubovoľnými dvoma vrcholmi existuje cesta. Graf na obrázku 3.17 nie je súvislý, pretože sa v ňom dajú nájsť viaceré dvojice vrcholov, medzi ktorými neexistuje cesta. Koľko takých rôznych dvojíc vrcholov existuje?



Obr. 3.16: Súvislý graf



Obr. 3.17: Nesúvislý graf ■

Na predošlom príklade sme si ilustrovali, že súvislý graf pozostáva „z jedného kusu“ a nesúvislý graf pozostáva „z viacerých (súvislých) kusov“. Tieto súvislé kusy, z ktorých graf pozostáva, sa nazývajú *komponety súvislosti* a formálne budú definované neskôr. Dôležité ale je zapamätať si, že súvislé grafy majú vždy len jeden komponent súvislosti a nesúvislé grafy majú vždy viac než jeden komponent súvislosti. Napríklad graf na obrázku 3.17 má dva komponenty súvislosti.

Ďalším dôležitým pojmom, ktorý definujeme, bude *cyklus*.

Definícia 3.4.2 — Cyklus. Cyklus je súvislý pravidelný graf stupňa 2. Dĺžka cyklu je počet jeho hrán. Cyklus dĺžky n sa označuje C_n.

Pre cyklus C_n platí nasledujúce tvrdenie.

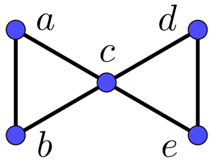
Veta 3.4.1 Ak v_i a v_j sú dva rôzne vrcholy cyklu C_n, tak medzi nimi existujú dve rôzne cesty.

Dôkaz: cyklus C_n má n vrcholov, ktorým postupne priradíme označenia v_0 až v_{n-1}. Na začiatku si zvoľme ľubovoľný vrchol cyklu C_n a označme ho v_0. Podľa definície 3.4.2 je C_n pravidelný graf stupňa 2, takže vrchol v_0 má 2 susedov. Jedného z nich označme v_1. Vrchol v_1 má takisto 2 susedov. Jeden z nich je vrchol v_0 a toho druhého označíme v_2. Takto budeme postupovať ďalej, pričom vrchol v_i, pre $i < (n-1)$, bude susediť s vrcholmi v_{i-1} a v_{i+1}.

Teraz predpokladajme, že niektorý vrchol v_k, pre $k < (n-1)$, by v C_n susedil s vrcholom v_0. Potom by žiaden vrchol v_l, pre $k < l \leq (n-1)$, kvôli stupňom vrcholov nemohol susediť so žiadnym z vrcholov v_i pre $i \in \{0, \ldots, k\}$. To by znamenalo, že daný graf by bol nesúvislý, čo by bol spor s definíciou 3.4.2. Náš predpoklad bol preto nesprávny a žiaden vrchol v_k, pre $k < (n-1)$, nie je susedný s vrcholom v_0.

Uvedeným spôsobom postupne označíme všetky vrcholy C_n ako v_0 až v_{n-1}. Tým dostaneme sled, v ktorom vrcholy v_0 a v_{n-1} majú stupeň 1 a všetky ostatné vrcholy majú stupeň 2. Naviac sa, vzhľadom na spôsob označovania vrcholov a ich stupne, žiaden vrchol nemôže opakovať. Preto je tento sled cestou. Podľa definície 3.4.2 má byť C_n pravidelný graf stupňa 2, takže ešte musíme navzájom hranou spojiť vrcholy v_0 a v_{n-1}. Tým dostaneme uzavretý sled $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_0)$. Ak si zoberieme ľubovoľné dva rôzne vrcholy v_i a v_j cyklu C_n, tak medzi nimi existujú dve rôzne cesty. Tieto cesty vyberieme zo sledu $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_0)$ tak, že jedna bude začínať vo vrchole v_i a druhá bude začínať vo vrchole v_j a obe pôjdu v smere rastúcich indexov vrcholov. Q.E.D.

■ **Príklad 3.16**



V grafe, na obrázku vľavo, (a,c,d,e,c,b,a) **nie je cyklus**, pretože sa v ňom opakuje vrchol c, ktorý preto nie je stupňa 2. Ale (a,c,b,a) a (c,d,e,c) **sú cykly**, oba majú dĺžku 3. V oboch prípadoch sa jedná o pravidelné grafy stupňa 2. ■

P Ľubovoľný vrchol cyklu si môžeme označiť ako počiatočný (koncový). Potom sa v zápise cyklu okrem počiatočného (koncového) vrcholu žiaden iný vrchol nesmie opakovať. Čiže v jednom vrchole „rozpojený" cyklus je cesta. Táto poznámka naznačuje inú možnú definíciu cyklu.

V teórii grafov sa mnohé pojmy dajú definovať viacerými alternatívnymi spôsobmi. Preto sa v literatúre a na webe môžeme stretnúť s rôznymi, avšak významovo ekvivalentnými, definíciami rovnakých pojmov. Jedným z dvoch príkladov takýchto alternatívnych definícií, ktoré si v tomto texte ukážeme, bude práve definovaný pojem *cyklus*. Druhým takýmto pojmom bude pojem *strom*, ktorý bude definovaný až v nasledujúcej kapitole. Vo vete 4.2.7 (str. 76) si uvedieme až 4 rôzne definície pojmu strom.

Platí nasledujúca veta.

Veta 3.4.2 — Alternatívne definície cyklu C_n. Nasledujúce dve tvrdenia sú ekvivaletné.

A) Cyklus C_n je súvislý pravidelný graf stupňa 2 na n vrcholoch.

B) Cyklus C_n je cesta dĺžky n, na ktorej stotožníme jej počiatočný a koncový vrchol.

Dôkaz: máme dokázať ekvivalenciu dvoch tvrdení. Budeme to dokazovať ako dve implikácie.

▷ A) $\Rightarrow$ B): **Ak v súvislom pravidelnom grafe stupňa 2 na n vrcholoch rozdvojíme jeden vrchol, tak dostaneme cestu dĺžky n.**
Majme súvislý pravidelný graf stupňa 2 na n vrcholoch. Označme si ľubovoľný vrchol ako v_0 a vrcholy s ním susediace označme v_1 a v_{n-1}. Podľa vety 3.4.1 musí medzi vrcholmi v_1 a v_{n-1} existovať cesta neobsahujúca vrchol v_0. Preto ak vrchol v_0 „zdvojíme" (rozsekneme), spravíme z neho vrcholy v_{0P} a v_{0K}, pričom vrchol v_{0P} bude sused vrcholu v_1 a vrchol v_{0K} bude sused vrcholu v_{n-1}, tak dostaneme cestu dĺžky n (cestu na $n+1$ vrcholoch). Q.E.D.

▷ B) $\Rightarrow$ A): **Ak na ceste dĺžky n stotožníme jej počiatočný a koncový vrchol, tak dostaneme súvislý pravidelný graf stupňa 2 na n vrcholoch.**
Cesta dĺžky n je súvislý graf na $n+1$ vrcholoch s n hranami, pričom počiatočný a koncový vrchol cesty majú stupeň 1 a všetky jej ostatné vrcholy majú stupeň 2. Označme si počiatočný vrchol cesty v_{0P} a jej koncový vrchol v_{0K}. Ak stotožníme vrcholy v_{0P} a v_{0K} do vrcholu označeného v_0, tak dostaneme súvislý graf na n vrcholoch, ktoré všetky majú stupeň 2. Dostali sme teda súvislý, pravidelný graf stupňa 2 na n vrcholoch. Q.E.D.

P Pokiaľ je explicitne dané, že sa jedná o cyklus, alebo ak to je zrejmé z kontextu, tak sa v zápise cyklu koncový vrchol vynecháva, pretože je totožný s počiatočným vrcholom. Takže cykly z príkladu 3.16 by sa zapísali ako cyklus (a,c,b) resp. cyklus (c,d,e).

Nasledujúcim dôležitým pojmom, ktorý potrebujeme poznať, je *podgraf*.

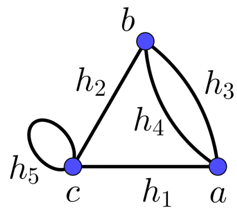
Definícia 3.4.3 — Podgraf. Graf $G' = (V',E')$ sa nazýva podgraf grafu $G = (V,E)$, ak platí $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$.

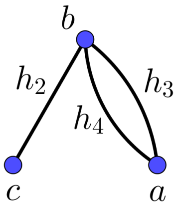
P Jednoducho by sa dalo povedať, že podgraf grafu G dostaneme, ak vyberieme niektoré jeho vrcholy a niektoré hrany spájajúce tieto vrcholy. Ak však vyberieme nejakú hranu, musíme nutne vybrať aj vrcholy, ktoré s ňou incidujú.

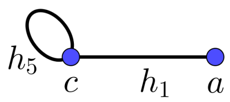
V definícii 3.4.3 by samotné podmienky $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$ nestačili na to, aby sa jednalo o podgraf. Dôležitý je aj fakt, že v prípade G' sa jedná o graf. O tom hovorí aj predchádzajúca poznámka. Pojem podgrafu si ilustrujeme na nasledujúcich dvoch príkladoch.

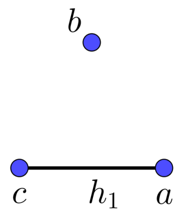
■ Príklad 3.17

Zoberme si napríklad graf na obrazku vpravo. Tento graf má vrcholovú množinu $V = \{a,b,c\}$ a hrany $E = \{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\}$. Tri z jeho podgrafov vidíme na nasledujúcich troch obrázkoch.

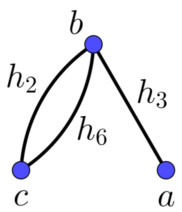


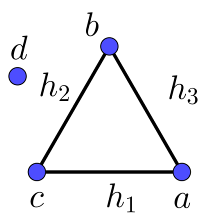






Ale nasledujúce dva grafy nie sú podgrafy pôvodného grafu.



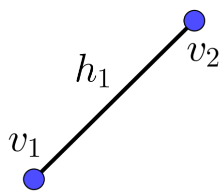


Prvý z nich obsahuje hranu h_6, ktorá v pôvodnom grafe nie je a druhý obsahuje vrchol d, ktorý v pôvodnom grafe nie je.

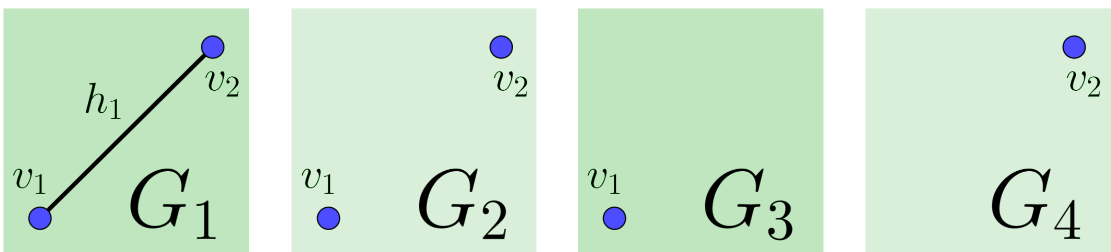
■

■ Príklad 3.18

Nájdite všetky neprázdne podgrafy grafu na obrázku vpravo.



Riešenie: Daný graf má len jednu hranu a s ňou incidujúce dva vrcholy. Takže v jeho podgrafoch buď hranu vyberieme alebo nie a keď hranu nevyberieme, môžeme vybrať jeden alebo oba z daných vrcholov. Takže daný graf má 4 neprázdne podgrafy, ktoré vidíme na nasledujúcich obrázkoch.



■

P Z príkladu 3.18 vidíme, že graf je podgrafom samého seba, čo je aj v súlade s definíciou 3.4.3, pretože $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$ platí aj keď $V' = V$ a $E' = E$.

Teraz si „súvisle kusy“ grafu, spomenuté za príkladom 3.15 formálne definujeme ako *komponenty súvislosti*. Jedná sa o ďalší dôležitý pojem teórie grafov a pri jeho definícii sa používajú pojmy *súvislý graf* a *podgraf*, ktoré sme už definovali.

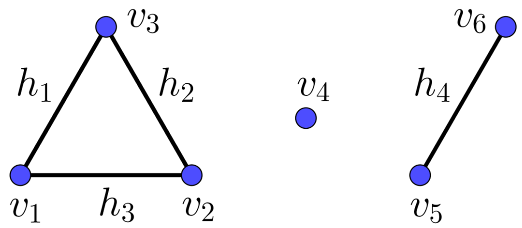
Definícia 3.4.4 — Komponent súvislosti grafu. Nech G je graf. Potom komponent súvislosti grafu G je maximálny súvislý podgraf grafu G.

P Pojem „maximálny“ sa v definícii 3.4.4 chápe v množinovom zmysle. To znamená, že maximálny súvislý podgraf grafu G je taký podgraf grafu G, do ktorého sa nedá pridať žiadna hrana a s ňou incidujúce vrcholy z grafu G tak, aby podgraf zostal súvislý.

Pojem „maximálny“ v definícii 3.4.4 neznamená, že každý graf má len jeden komponent súvislosti. Ak by sme použili terminológiu matematickej analýzy, tak by sa to dalo prirovnať k lokálnemu maximu. Rovnako ako funkcia môže mať viacero lokálnych maxím, môže mať aj graf viacero maximálnych súvislých podgrafov – komponentov. Napríklad graf na obrázku 3.16 je súvislý a má len jeden komponent súvislosti. Ale graf na obrázku 3.17 nie je súvislý a má dva komponenty. Jeden z jeho komponentov je graf K_3 (trojuholník) a druhý je cesta dĺžky 2.

P Ako už bolo spomenuté za príkladom 3.15, každý súvislý graf má práve jeden komponent súvislosti a každý nesúvislý graf má vždy viac než jeden komponent súvislosti. Toto tvrdenie by sa dalo sformulovať a dokázať aj ako veta, ale nebudeme to robiť, pretože dôkaz je triviálny.

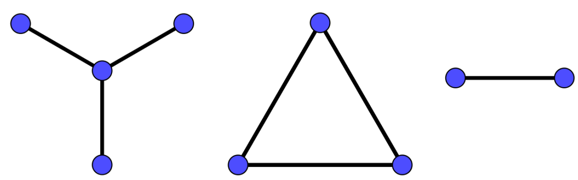
■ **Príklad 3.19** Majme graf G daný nasledovným obrázkom



Tento graf má tri komponenty súvislosti. Označme si ich $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ a $G_3 = (V_3, E_3)$. Komponent G_1 obsahuje len vrcholy $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, komponent G_2 obsahuje len vrchol $V_2 = \{v_4\}$ a komponent G_3 obsahuje len vrcholy $V_3 = \{v_5, v_6\}$. Hranové množiny komponentov sú $E_1 = \{h_1, h_2, h_3\}$, $E_2 = \emptyset$ a $E_3 = \{h_4\}$. ■

■ **Príklad 3.20**
Graf na obrázku vpravo má tri komponenty súvislosti

- hviezdu s tromi „cípmi“.
- kompletný graf K_3 (trojuholník)
- a cestu dĺžky 1 (jednu hranu).

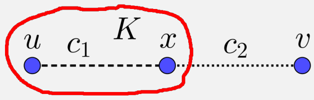


■

O komponentoch súvislosti triviálne platí nasledujúca veta.

Veta 3.4.3 — O komponentoch. Majme graf $G = (V, E)$ a nech $u, v \in V$. Ak sú vrcholy u a v spojené sledom (cestou), tak patria do rovnakého komponentu súvislosti.

Dôkaz: Nech vrcholy u a v sú spojené sledom. Potom sú, podľa vety 3.3.1 spojené aj cestou c. Označme si komponent súvislosti, do ktorého patrí vrchol u, ako K a predpokladajme, že vrchol v nepatrí do K. V takom prípade existuje na ceste c vrchol x, ktorý ako posledný ešte patrí do K (môže byť aj $u = x$). Cesta c, spájajúca vrcholy u a v, sa dá potom rozdeliť na dve časti c_1 a c_2 tak, že jej časť c_1 ešte patrí do K a časť c_2, aj s vrcholom v, už do K nepatrí. Situácia je znázornená na nasledujúcom obrázku.



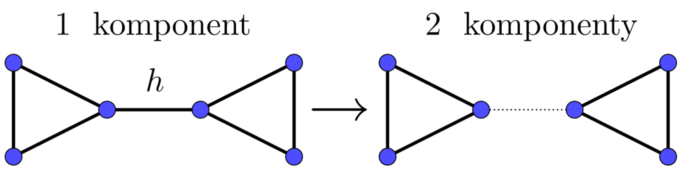
Ak teraz do grafu K pridáme ešte aj všetky hrany a vrcholy cesty c_2, tak podľa definície 3.4.1, zostane takýto graf súvislý. To je však spor s definíciou 3.4.4, pretože komponent súvislosti grafu G je maximálny súvislý podgraf grafu G. Preto predpoklad, že vrchol v nepatrí do komponentu K bol nesprávny a tým je veta dokázaná. Q.E.D.

S komponentmi súvislosti súvisia aj ďalšie dva pojmy, ktoré budeme využívať v ďalších kapitolách. Sú to pojmy *most* a *artikulácia*.

Definícia 3.4.5 — Most a artikulácia. Majme graf $G = (V, E)$. Potom

- ▷ hrana $h \in E$ sa nazýva *most*, ak sa po jej vynechaní zväčší počet komponentov grafu G.
- ▷ vrchol $v \in V$ sa nazýva *artikulácia*, ak sa po vynechaní vrcholu v a všetkých s ním incidujúcich hrán, zväčší počet komponentov grafu G.

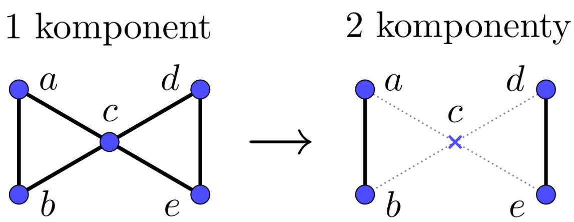
■ **Príklad 3.21** Zoberme si ako príklad graf z nasledujúceho obrázku



Tento graf má jeden komponent, čiže je súvislý. Hrana h v uvedenom grafe je most, pretože keď ju z grafu vynecháme, rozpadne sa nám tento na dva komponenty. Zároveň je hrana h v danom grafe jediný most, pretože vynechaním žiadnej inej (jednej) hrany sa počet komponentov nezvýši. ■

Na ďalšom príklade si ilustrujeme pojem *artikulácia*.

■ **Príklad 3.22** Zoberme si graf z príkladu 3.16. Tento graf je súvislý, t. j. má len 1 komponent súvislosti. Ak ale z neho vynecháme vrhol c a hrany s ním incidujúce, tak sa nám graf rozpadne na 2 komponenty.

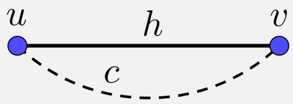


■

Pojmy most a artikulácia sú veľmi jednoduché, ale často tieto pojmy a vlastnosti grafov z nich vyplývajúce, využívame pri formulovaní a dôkazoch rôznych aj netriviálnych tvrdení. Väčšina vlastností týkajúcich sa uvedených pojmov je tak jednoduchá, že ich môžeme zaradiť medzi cvičenia. Len jednu z týchto vlastností si tu dokážeme ako lemu[5].

Lema 3.4.4 — O mostoch. Daný je graf $G = (V,E)$. Ak hrana $h \in E$ nie je most, tak patrí do nejakého cyklu.

Dôkaz: Máme graf $G = (V,E)$ a v ňom hranu $h \in E$, ktorá nie je most. To znamená, že jej vynechaním sa počet komponentov nezvýši. Nech u a v sú vrcholy incidujúce s hranou h. Tieto dva vrcholy sú spojené hranou h, čo podľa vety 3.4.3 znamená, že v grafe G patria do rovnakého komponentu súvislosti. Keďže vynechaním hrany h sa počet komponentov grafu G nezvýši, musia vrcholy u a v, aj po vynechaní hrany h, patriť do toho istého komponentu. Podľa definícií 3.4.4 a 3.4.1 to znamená, že musí existovať cesta c spájajúca vrcholy u a v, neobsahujúca hranu h. Situácia musí vyzerať tak, ako vidíme na nasledovnom obrázku



Keď k ceste c pridáme hranu h dostaneme cyklus, t. j. hrana h patrí do cyklu grafu G. Q.E.D.

P Tvrdenie lemy 3.4.4 je ekvivalentné s tvrdeniami:
- *Hrana h je most, ak nepatrí do žiadneho cyklu grafu G.*
  Takto sa napríklad v [32] definuje pojem most.
- *Hrana h je buď most, alebo patrí do nejakého cyklu.* (viď cvičenie 3.34)

3.5 Kostra grafu

Na záver tejto kapitoly si ešte definujeme pojem *„kostra grafu"*, ktorý je veľmi dôležitý a budeme sa s ním ešte často stretávať v nasledujúcich kapitolách a mnohých praktických aplikáciach teórie grafov. Kostra grafu sa v aplikáciach využíva všade tam, kde v súvislom grafe na n vrcholoch potrebujeme mať minimálny možný počet hrán (spojení) medzi týmito n vrcholmi. Najskôr si definujeme dva jednoduché pomocné pojmy a pomocou nich definujeme kostru grafu.

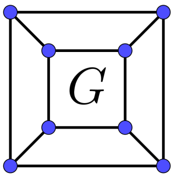
Definícia 3.5.1 — Faktor grafu. Faktor grafu G je taký podgraf grafu G, ktorý obsahuje všetky jeho vrcholy.

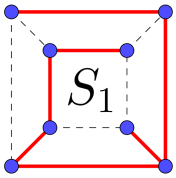
Definícia 3.5.2 — Acyklický graf. Graf G sa nazýva acyklický, ak neobsahuje žiaden cyklus.

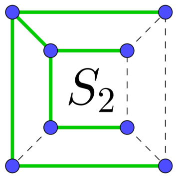
P Predošlá definícia spadá skôr do oblasti „jazykovedného okienka", keďže je všeobecne známe, že predpona *a-* pochádza z gréčtiny a vyjadruje zápor. Takže *a-cyklický* v preklade znamená „necyklický, nemajúci cyklus, netvoriaci cyklus, ... ".

Definícia 3.5.3 — Kostra grafu. Kostra grafu G je súvislý, acyklický faktor grafu G.

■ **Príklad 3.23** Napríklad S_1 a S_2, zvýraznené červenou a zelenou farbou, sú dve kostry grafu G. Viď nasledovné obrázky.







■

[5] Lemou sa v matematike nazývajú pomocné tvrdenia.

Z príkladu 3.23 vidíme, že graf môže mať aj viac než jednu kostru. Ľahko sa dá dokázať, že každý súvislý graf musí mať aspoň jednu kostru (cvičenie 3.35). Keďže priamo z definície kostry grafu vyplýva, že ak graf G má kostru, tak je súvislý, tak platí nasledujúca veta.

Veta 3.5.1 — O existencii kostry. Konečný graf G má kostru práve vtedy, keď je súvislý.

Dôkaz: tvrdenie je ekvivalencia, budeme ho preto dokazovať ako dve implikácie.

$\Rightarrow$ **Ak graf G má kostru, tak je súvislý.**
Podľa definície 3.5.3 je kostra súvislý faktor grafu G. To znamená, že medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi grafu G existuje cesta, čiže G je súvislý graf.

$\Leftarrow$ **Ak graf G je súvislý, tak má kostru.**
Ak graf G je acyklický, tak je sám sebe kostrou. Predpokladajme preto, že graf G obsahuje nejaký cyklus C. Hrana cyklu nemôže byť most (lema 3.4.4 a poznámka za ňou), takže vynechaním jednej hrany cyklu C, dostaneme podgraf grafu G, ktorý má všetky vrcholy grafu G, je súvislý a neobsahuje cyklus C. Graf G môže obsahovať len konečný počet cyklov, takže konečným počtom opakovaní uvedeného postupu dostaneme podgraf grafu G, ktorý obsahuje všetky jeho vrcholy a je súvislý aj acyklický. To znamená, že graf G má kostru. Q.E.D.

Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že veta 3.5.1 nám dáva vhodný návod, algoritmus, na konštrukciu kostry grafu. Zdanie však klame! Problém je v tom, že nájsť (všetky) cykly v danom grafe je zložitý, časovo náročný, problém. Existujú iné, omnoho efektívnejšie algoritmy, ktorými sa budeme zaoberať neskôr.

3.6 Cvičenia

Cvičenie 3.1 Daná je množina čísel $\{1,3,4,6,9,12,36\}$. Priraďte týmto číslam vrcholy grafu a vrchol u spojte orientovanou hranou s vrcholom v práve vtedy, keď platí $u \mid v$ (číslo u delí číslo v). Koľko hrán bude mať takýto orientovaný graf? Pre ktoré čísla u,v platí, že existuje hrana (u,v) a súčasne aj hrana (v,u)? ■

Cvičenie 3.2 K_n je kompletný graf na n vrcholoch.

(a) Nakreslite $K_2, K_3, K_4, \ldots, K_8$.

(b) Koľko hrán má graf K_n pre $n \in \mathbb{N}$?

■

Cvičenie 3.3 Nakreslite graf so šiestimi vrcholmi, ktorých stupne sú 1, 2, 3, 4, 5, 2 alebo dokážte že to nie je možné. ■

Cvičenie 3.4 Predseda viktoriánskeho klubu klenotníkov nahlásil Scottland Yardu vlámanie a krádež šperkov a hotovosti v hodnote miliónov libier z ich klubového trezoru. Keďže si inšpektor Lestrade nevedel s prípadom rady, prizval na pomoc Sherlocka Holmesa. Ten ešte raz vypočul predsedu klubu a chcel po ňom zoznam všetkých členov klubu. Ten mu na to povedal „Členovia nášho klubu si veľmi zakladajú na svojom súkromí a nikdy sa nestretávame všetci naraz a ani neexistuje kompletný zoznam členov klubu. Stretávame sa maximálne v 5 členných skupinkách, keď spolu vedieme obchodné jednania a uzatvárame obchody. Ako predseda klubu vám viem povedať len to, že náš klub má spolu 13 členov a každý člen klubu pozná práve 5 ďalších členov klubu.“ Na to Sherlock Holmes povedal inšpektorovi Lestradovi, že tak to určite nebolo a predseda klubu zrejme klame aj pokiaľ ide o krádež šperkov a peňazí. Ako to zistil? ■

Cvičenie 3.5 Dokážte, že neexistuje pravidelný graf nepárneho stupňa, s nepárnym počtom vrcholov. ■

Cvičenie 3.6 Dokážte, že v každom grafe je počet vrcholov nepárneho stupňa vždy párny. ■

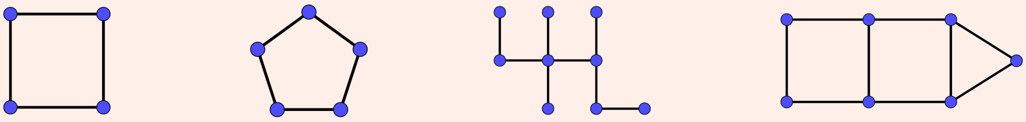
Cvičenie 3.7 Nakreslite komplementárne grafy ku grafom z obrázkov 3.5, 3.6, 3.7 a 3.8 na strane 52. Sú tieto grafy pravidelné? ■

Cvičenie 3.8 Dokážte, že ak je graf G pravidelný, tak aj graf $\overline{G}$ je pravidelný. ■

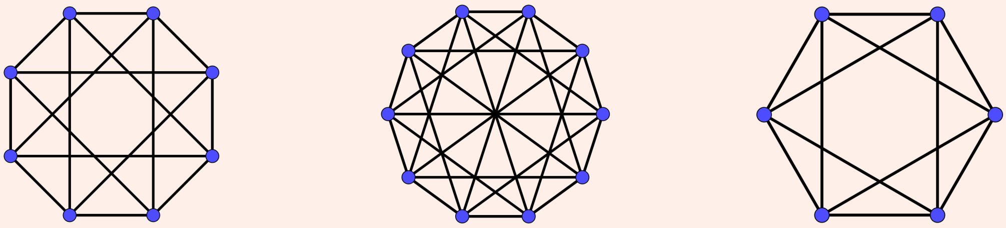
Cvičenie 3.9 Nakreslite tri príklady nekompletných bipartitných grafov a tri príklady kompletných bipartitných grafov. ■

Cvičenie 3.10 Určte počet hrán grafu $K_{m,n}$ (kompletný bipartitný) pre $m,n \in \mathbb{N}$. ■

Cvičenie 3.11 Rozhodnite, či sú nasledujúce 4 súvislé grafy bipartitné



Cvičenie 3.12 Rozhodnite, či sú nasledujúce 3 súvislé grafy bipartitné



Cvičenie 3.13 Ak sa dá nakreslite graf G s danými vlastnosťami alebo zdôvodnite, prečo taký graf neexistuje

(a) G má 6 vrcholov, každý stupňa 3.
(b) G má 7 vrcholov, každý stupňa 3.
(c) G má 4 vrcholy, každý stupňa 1.
(d) G má 6 vrcholov a 4 hrany.
(e) G má 4 hrany a 4 vrcholy so stupňami 1, 2, 3, 4.
(f) G má 4 vrcholy so stupňami 1, 2, 3, 4.
(g) G je obyčajný graf a má 6 vrcholov so stupňami 1, 2, 3, 4, 5, 5.
(h) G je obyčajný graf a má 5 vrcholov so stupňami 2, 3, 3, 4, 4.
(i) G je obyčajný graf a má 5 vrcholov so stupňami 2, 2, 4, 4, 4.

Cvičenie 3.14 Nakreslite graf, v ktorom platí $r(G) = d(G)$.

Cvičenie 3.15 Nakreslite graf, v ktorom platí $d(G) = 2r(G)$.

Cvičenie 3.16 Dokážte, že pre každý graf platia nerovnosti $r(G) \leq d(G) \leq 2r(G)$.

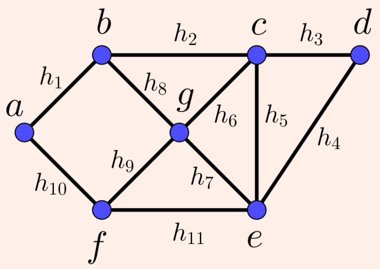
Cvičenie 3.17 Dokážte, že okrem počiatočného (koncového) vrcholu sa v cykle žiadne iné vrcholy nemôžu opakovať. Inak povedané, ak cyklus „rozsekneme“ v ľubovoľnom jeho vrchole, tak dostaneme cestu.

Cvičenie 3.18 Nakreslite dva príklady súvislých a dva príklady nesúvislých grafov.

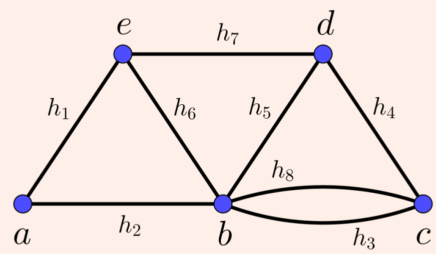
Cvičenie 3.19 Dokážte, že každý súvislý graf má práve jeden komponent súvislosti a že každý nesúvislý graf má viac než jeden komponent súvislosti.

Cvičenie 3.20 Pre grafy z obrázkov 3.18, 3.19 a 3.20 nájdite

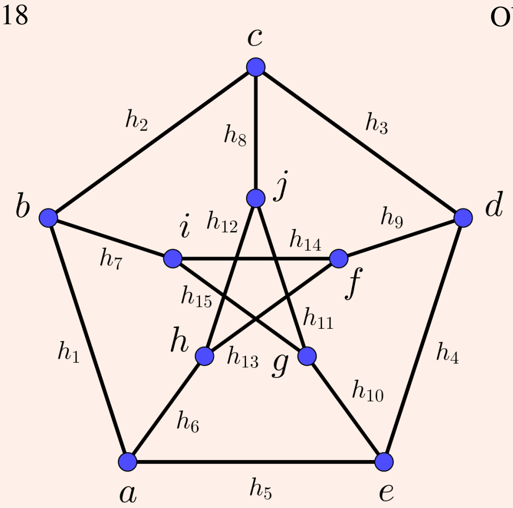
(a) sledy rôznej dĺžky,
(b) uzavreté a otvorené sledy,
(c) sledy, ktoré sú / nie sú ťahy, cesty, cykly,
(d) cykly.



Obr. 3.18



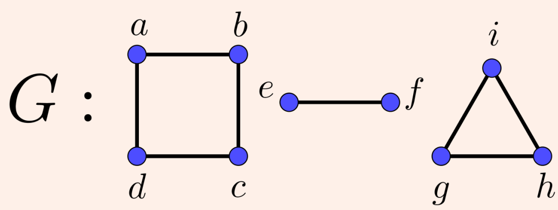
Obr. 3.19



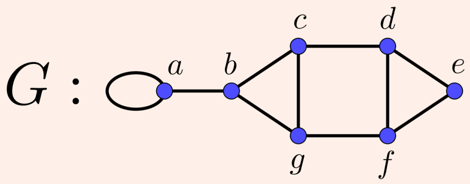
Obr. 3.20: Petersenov graf

Cvičenie 3.21 Pre grafy z obrázkov 3.18, 3.19 a 3.20 nájdite ich rôzne podgrafy.

Cvičenie 3.22 Pre graf G, z nasledujúceho obrázku, nájdite všetky komponenty súvislosti a zapíšte ich formálne ako jeho podgrafy (pomocou množích ich vrcholov a hrán).



Cvičenie 3.23 Pre graf G z nasledujúceho obrázku nájdite všetky jeho cykly



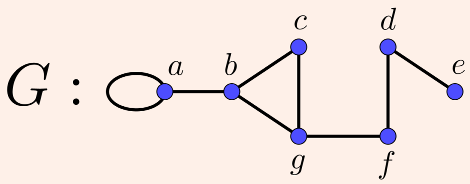
Obr. 3.21

Cvičenie 3.24 Pre graf G z obrázku 3.21 nájdite všetky cesty z vrcholu a do vrcholu e.

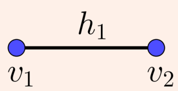
Cvičenie 3.25 Dokážte, že ak je graf G nesúvislý, tak graf $\overline{G}$ je súvislý.

Cvičenie 3.26 Pre graf G z nasledujúceho obrázku nájdite

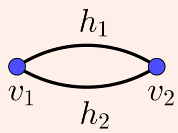
(a) niektoré jeho súvislé podgrafy,
(b) všetky súvislé podgrafy $G' = (V', E')$ s najmenším možným počtom hrán tak, aby platilo $V' = V$.



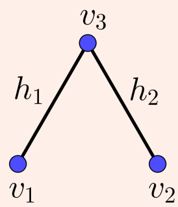
Cvičenie 3.27 Pre grafy z obrázkov 3.22, 3.23, 3.24 a 3.25 nájdite všetky ich podgrafy.



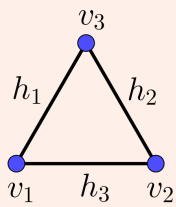
Obr. 3.22



Obr. 3.23



Obr. 3.24



Obr. 3.25

Cvičenie 3.28 Na večierku sa zišiel istý počet (aspoň 2) ľudí, z ktorých sa niektorí poznajú a niektorí nie. Môže nastať situácia, v ktorej

(a) jeden človek sa pozná práve s jedným prítomným a všetci ostatní ľudia sa poznajú práve s dvoma prítomnými?
(b) jeden človek sa pozná práve s jedným prítomným a všetci ostatní ľudia sa poznajú aspoň s dvoma prítomnými?
(c) žiadni dvaja ľudia sa nepoznajú práve s rovnakým počtom prítomných?

Cvičenie 3.29 Koľko rôznych cyklov obsahuje graf

(a) K_4 (b) K_5 (c) K_6 (d) $K_{3,3}$ (e) $K_{3,5}$.

Cvičenie 3.30 Dokážte, že v každom obyčajnom grafe s aspoň 2 vrcholmi musia existovať aspoň dva vrcholy rovnakého stupňa. ■

Cvičenie 3.31 Dokážte, že vynechaním mosta z grafu G sa počet jeho komponentov súvislosti zväčší vždy práve o 1. ■

Cvičenie 3.32 Dokážte, že vynechaním artikulácie a hrán s ňou incidujúcich z grafu G sa počet komponentov súvislosti grafu G môže zväčšiť o ľubovoľné $n \geq 1$, kde $n \in \mathbb{N}$. ■

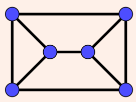
Cvičenie 3.33 Daný je graf $G = (V,E)$. Dokážte, že ak $h \in E$ je most, tak nepatrí do žiadneho cyklu v grafe G. ■

Cvičenie 3.34 Daný je graf $G = (V,E)$ a hrana $h \in E$. Dokážte, že h je buď most, alebo patrí do nejakého cyklu v grafe G. ■

Cvičenie 3.35 Dokážte, že každý súvislý graf má aspoň jednu kostru. ■

Cvičenie 3.36 Dokážte, že každý súvislý graf na n vrcholoch má aspoň $(n-1)$ hrán. ■

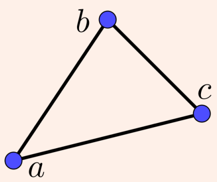
Cvičenie 3.37



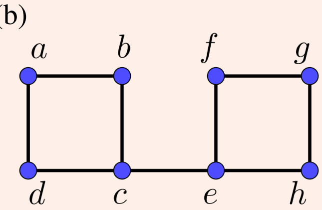
Nájdite aspoň tri rôzne kostry grafu zobrazenom na obrázku vľavo. ■

Cvičenie 3.38 Nájdite všetky kostry nasledujúcich grafov

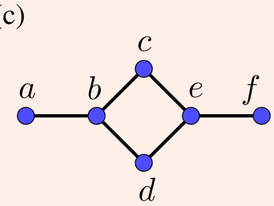
(a)



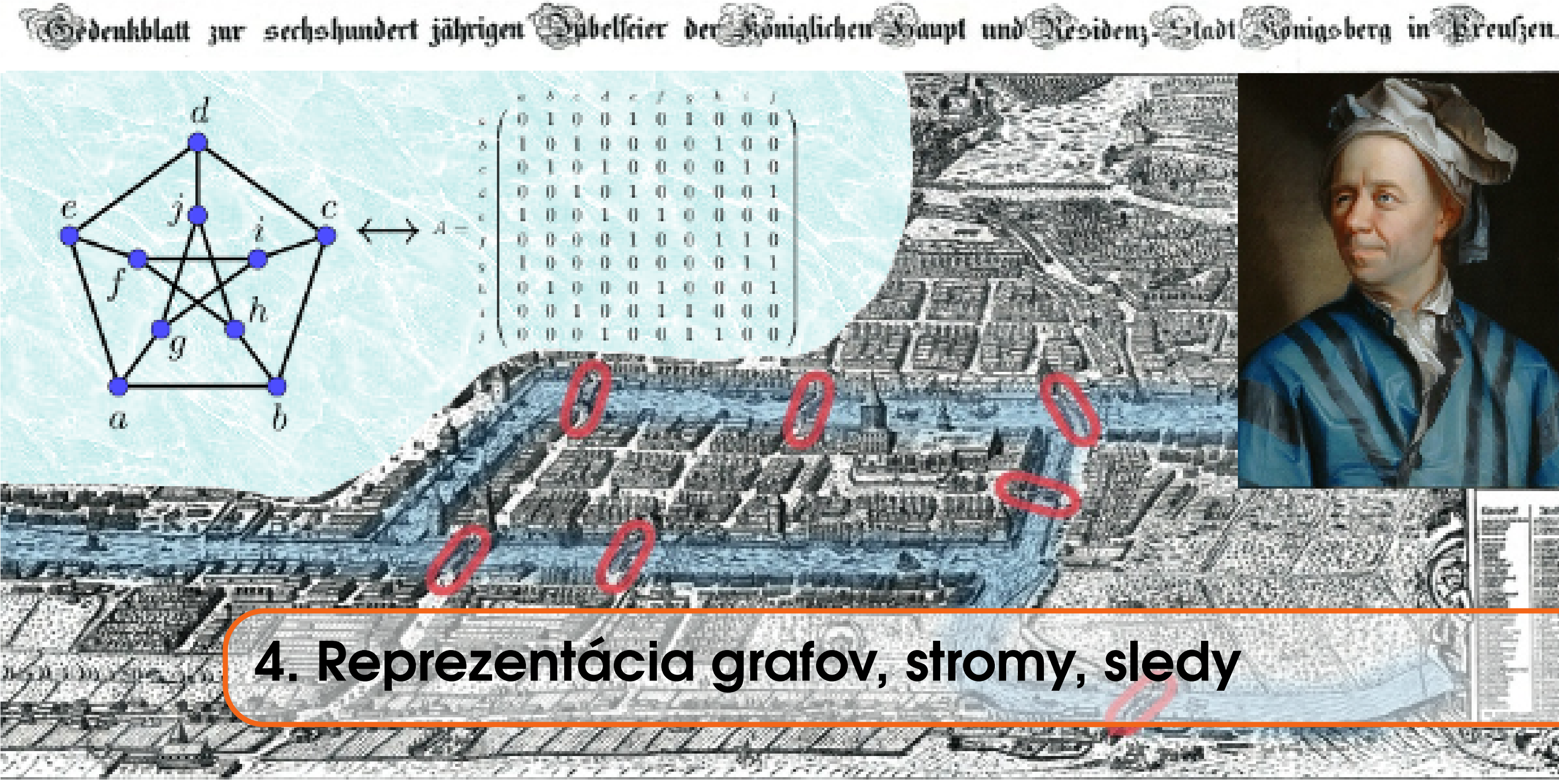
(b)



(c)



■



4. Reprezentácia grafov, stromy, sledy

4.1 Reprezentácia grafov

V predošlej kapitole sme grafy reprezentovali ich diagramami, t. j. nakreslili sme si obrázok grafu ako v príklade 3.1, alebo sme ich zadali vymenovaním ich vrcholov a hrán ako v príklade 3.2. Pri praktických aplikáciach, kde potrebujeme analyzovať grafy a pracovať s nimi, s týmto prístupom nevystačíme. Potrebujeme preto formálnejší a predovšetkým efektívnejší spôsob reprezentácie grafov. Ukážeme si dva spôsoby reprezentácie grafov. Prvým bude matica susednosti a druhým matica incidencie grafov.

4.1.1 Matica susednosti

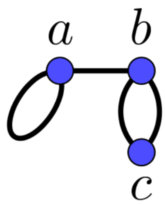
Jeden zo spôsobov reprezentácie grafov je popísať graf pomocou jeho matice susednosti.

Definícia 4.1.1 — Matica susednosti grafu. Nech G je graf s množinou vrcholov V, ktorej veľkosť je $|V| = n$. Matica susednosti grafu G bude matica s rozmermi $n \times n$, ktorej riadky a stĺpce zodpovedajú vrcholom grafu G pri pevne zvolenom usporiadaní. Číslo a_{ij}, v i. riadku a j. stĺpci matice susednosti, vyjadruje počet hrán, ktoré spájajú vrcholy i a j v grafe G.

Predošlú definíciu si ilustrujeme na jednoduchom príklade.

■ Príklad 4.1

Majme graf G, ktorý vidíme na obrázku vpravo. Graf G má 3 vrcholy, a preto matica susednosti grafu G bude mať rozmery 3×3. Zvolíme si nejaké pevné usporiadanie vrcholov, napríklad lexikografické[a]. Riadky a stĺpce matice budú zodpovedať vrcholom grafu G pri zvolenom usporiadaní. Prvky a_{ij} matice susednosti budú prirodzené čísla vyjadrujúce počet hrán icidujúcich s vrcholmi i a j v grafe G. Ak sa jedná o slučky, čiže $i = j$, tak každá slučka inciduje s vrcholom dvakrát. Každá



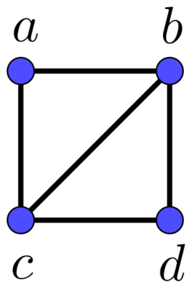
[a]podľa abecedy

hrana prispeje do súčtu prvkov matice susednosti číslom 2. Preto matica susednosti grafu G bude

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & & & \\ b & & & \\ c & & & \end{array}\quad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

■

My sa väčšinou budeme zaoberať len obyčajnými grafmi. Pre maticu susednosti obyčajného grafu bude platiť $a_{ii} = 0$ a pre $i \neq j$ bude $a_{ij} \in \{0,1\}$. Budeme skúmať vlastnosti matíc susednosti obyčajných grafov a to, čo a akým spôsobom sa z nich dá zistiť.



Pozrime sa teraz na obyčajný graf, ktorý máme na obrázku vľavo. Matica susednosti tohto grafu je

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Čo vieme povedať o maticiach $A, A^2, A^3, \ldots, A^n, \ldots$? Čo predstavujú prvky týchto matíc. Dá sa ukázať, že pre obyčajný graf G prvok a_{ij} v matici A^n predstavuje počet rôznych sledov dĺžky n z vrcholu i do vrcholu j.

Ilustrujeme si to na príklade vyššieuvedeného grafu.

$$A^2 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Prvok a_{ij} matice A^2 v i. riadku a j. stĺpci, je počet rôznych sledov dĺžky 2 z vrcholu i do vrcholu j. Ľahko to môžeme overiť na obrázku. Okrem toho sú v A^2 na hlavnej diagonále stupne príslušných vrcholov, čo v obyčajnom grafe zodpovedá počtu sledov dĺžky 2 z vrcholu i do vrcholu i.
Napríklad číslo v b-tom riadku a c-tom stĺpci matice A^2 vypočítame ako skalárny súčin

$$\begin{array}{c} \\ b \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} a & & & d \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ a \\ \\ \\ d \end{array}\begin{array}{c} c \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} = 1.1 + 0.1 + 1.0 + 1.1 = 2$$

Do celkového súčtu 2 sa započíta 1 len v prípade, že v b-tom riadku a i-tom stĺpci a i-tom riadku a c-tom stĺpci matice A bolo číslo 1. To znamená, že existuje taký vrchol i, že medzi vrcholmi b a i aj medzi vrcholmi i a c je hrana. Takže z vrcholu b sa vieme do vrcholu c dostať cez vrchol i, čo je sled dĺžky 2. V našom príklade je vrchol i buď vrchol a, alebo vrchol d, čo zodpovedá dvom sledom dĺžky 2 medzi vrcholmi b a c.

Teraz tvrdenie o n. mocnine matice susednosti grafu vyslovíme a dokážeme nasledujúcu vetu.

Veta 4.1.1 — O matici susednosti. Nech G je obyčajný graf a A je jeho matica susednosti. Potom číslo v riadku i a stĺpci j matice A^n sa rovná počtu rôznych sledov dĺžky n z vrcholu i do vrcholu j v grafe G.

Dôkaz: budeme robiť indukciou vzhľadom na číslo n.

1. **Overenie pre $n = 1$:** pre $n = 1$ je $A^1 = A$ matica susednosti grafu G. Ak číslo v i-tom riadku a j-tom stĺpci tejto matici je 1, tak existuje hrana, čiže sled dĺžky 1 medzi vrcholmi i a j a tvrdenie platí.
2. **Indukčný krok:** predpokladajme, že uvedené tvrdenie platí pre nejaké číslo n. Potom dokážeme, že musí platiť aj pre číslo $(n+1)$.

$$A^{n+1} = A^n \cdot A$$

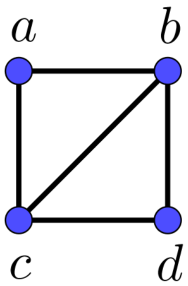
Prvok v i-tom riadku a k-tom stĺpci matice A^{n+1} dostaneme ako skalárny súčin i-teho riadku matice A^n a k-teho stĺpca matice A

$$\underbrace{(s_1,\, s_2,\, \dots,\, s_j,\, \dots,\, s_m)}_{i\text{-ty riadok matice } A^n} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_j \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix}}_{k\text{-ty stĺpec matice } A} = s_1.t_1 + s_2.t_2 + \ldots + s_j.t_j + \ldots + s_m.t_m\,.$$

Podľa indukčného predpokladu predstavuje číslo s_j počet sledov dĺžky n z vrcholu i do vrcholu j v grafe G. Ďalej vieme, že $t_j \in \{0,1\}$ a platí $t_j = 1$ práve vtedy, ak v grafe G existuje hrana medzi vrcholmi j a k. Každý sled dĺžky $(n+1)$, z vrcholu i do vrcholu k v grafe G, má ako predposledný vrchol j práve vtedy, ak existuje sled dĺžky n medzi vrcholmi i a j a ak existuje hrana medzi vrcholmi j a k, čiže ak $s_j \neq 0$ a $t_j = 1$. V grafe G existuje preto práve $s_j.t_j$ sledov dĺžky $(n+1)$ z vrcholu i do vrcholu k, ktoré majú ako predposledný vrchol j. Uvedený skalárny súčin je vlastne súčet počtu všetkých sledov dĺžky $(n+1)$ z vrcholu i do vrcholu k v grafe G, ktorých predposledný vrchol je j, cez všetky vrcholy j susediace s vrcholom k. To sú všetky sledy dĺžky $(n+1)$ z vrcholu i do vrcholu k v grafe G. Q.E.D.

Tvrdenie z predošlej vety si ilustrujeme na nasledujúcom príklade.

■ **Príklad 4.2**



Vráťme sa teraz ku grafu, s ktorým sme sa zaoberali pred sformulovaním vety 4.1.1. Jeho matica susednosti a štvrtá mocnina matice susednosti sú uvedené nižšie. Z matice A^4 napríklad vidíme, že počet rôznych sledov dĺžky 4 z vrcholu a do vrcholu a je 10.

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad A^4 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 9 & 9 & 10 \\ 9 & 15 & 14 & 9 \\ 9 & 14 & 15 & 9 \\ 10 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix} \end{array}$$

Sú to sledy

$$\begin{array}{lllll} (a,b,a,b,a) & (a,b,c,b,a) & (a,b,d,c,a) & (a,c,a,c,a) & (a,c,d,b,a) \\ (a,b,a,c,a) & (a,b,d,b,a) & (a,c,a,b,a) & (a,c,b,c,a) & (a,c,d,c,a) \end{array}$$

■

4.1.2 Matica incidencie

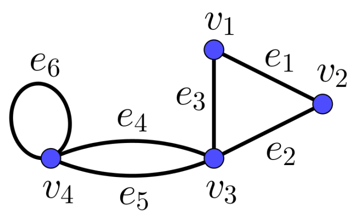
Ďalším spôsobom reprezentácie grafov je matica incidencie.

Definícia 4.1.2 — Matica incidencie grafu. Nech G je graf s množinou vrcholov V, množinou hrán E a $|V| = m$, $|E| = n$. Matica incidencie grafu G bude matica s rozmermi $m \times n$, ktorej riadky zodpovedajú vrcholom a stĺpce hranám grafu G, oboje pri pevne zvolenom usporiadaní. Pre všetky čísla a_{ij}, v i-tom riadku a j-tom stĺpci matice incidencie, platí $a_{ij} \in \{0,1,2\}$. Číslo a_{ij} vyjadruje počet incidencií vrchola i s hranou j v grafe G.

■ **Príklad 4.3**

Majme graf G, ktorý vidíme na obrázku vpravo. Jeho matica incidencie bude

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

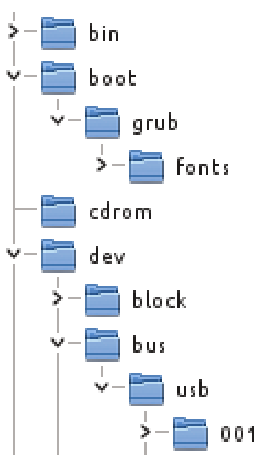


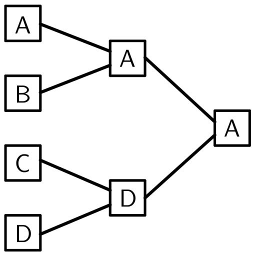
Hrana e_6 je slučka, čo v matici incidencie spoznáme podľa toho, že v príslušnom stĺpci je len jedna jednotka. ■

Matica incidencie sa obvykle používa pre obyčajné grafy, čiže grafy bez slučiek a násobných hrán. Preto pozostáva väčšinou len z núl a jednotiek a ľahko sa s ňou narába. Stupeň vrcholu v_i sa z matice incidendie vypočíta ako súčet čísel v riadku i.

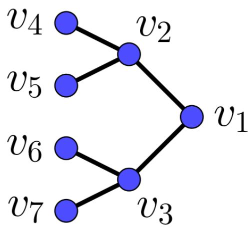
4.2 Stromy

Stromy sú z hľadiska praktických aplikácií jednou z najdôležitejších podtried grafov a majú široké uplatnenie v informatike. Prakticky všetky hierarchicky usporiadané štruktúry dát sa reprezentujú pomocou stromov. Každý sa už určite stretol so stromami v podobe rodokmeňov, obrázkami hierarchicky usporiadaných štruktúr rôznych inštitúcií, „pavúkov“ športových turnajov atď. Informatikom je určite veľmi dobre známy pojem „adresárový strom“ (directory tree). Na obrázku vľavo je zobrazená časť adresárového stromu linuxového filesystému. Avšak nielen adresárová štruktúra sa v informatike reprezentuje pomocou stromov. Aj dáta spracovávané v databázach a akékoľkek iné dáta, usporiadané hierarchicky, sa reprezentujú pomocou stromov. Ako si ukážeme neskôr, stromová štruktúra dát nám umožňuje rýchle prehľadávanie a triedenie. Športovcom bude bližší nasledujúci príklad. Predstavme si tenisový turnaj, na ktorom do seminifinále postúpili štyria hráčí A, B, C a D. V semifinále vyhral hráč A nad hráčom B a hráč D porazil hráča C. Vo finále potom hráč A vyhral nad hráčom D a stal sa víťazom turnaja. Táto situácia sa dá reprezentovať „pavúkom“ z obrázku 4.1.

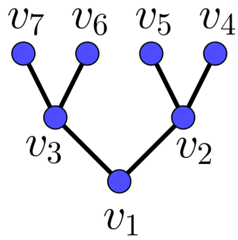




Obr. 4.1: „Pavúk“ tenisového turnaja



Obr. 4.2: Grafová reprezentácia obrázku 4.1



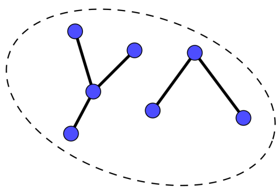
Obr. 4.3: Koreňová podoba stromu z obrázku 4.2

Tento sa dá zasa reprezentovať grafom, ktorý vidíme na obrázku 4.2. Napokon, ak tento graf otočíme o 90°, dostaneme tzv. koreňovú podobu tohto stromu, zobrazenú na obrázku 4.3. Takto nakreslený graf sa skutočne podobá na strom, odkiaľ pochádza aj jeho názov. Vrchol v_1 predstavuje „koreň“ stromu, hrany predstavujú jeho vetvy a vrcholy v_4, v_5, v_6 a v_7 sú jeho „listy“.
V predošlých motivačných príkladoch sme si uviedli niekoľko príkladov stromov a teraz si formálne definujeme pojem strom a ukážeme si niektoré vlastnosti, ktoré stromy majú.

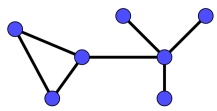
Definícia 4.2.1 — Strom. Súvislý a acyklický graf sa nazýva strom.

Predošlá definícia je veľmi stručná a jednoduchá. Pojem strom sa dá zadefinovať aj aspoň troma ďalšími spôsobmi a v niektorých zdrojoch sa môžeme stretnúť s jeho alternatívnymi definíciami. Závisí to predovšetkým od toho, čo autor sleduje a ktorá z definícií jeho cieľom najviac vyhovuje. My si najskôr ukážeme príklad grafov, ktoré nie sú stromy, potom príklad grafu, ktorý je strom. Nakoniec si vo vete 4.2.7 ukážeme štyri alternatívne definície pojmu strom a dokážeme, že sú navzájom ekvivalentné.

■ **Príklad 4.4** Grafy na obrázkoch 4.4 a 4.5 nie sú stromy.

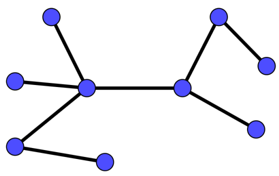


Obr. 4.4: Graf, ktorý nie je strom



Obr. 4.5: Graf, ktorý nie je strom

Graf na obrázku 4.4 síce nemá cyklus, ale nie je súvislý. Pozostáva z dvoch komponentov. Graf na obrázku 4.5 síce je súvislý, ale obsahuje cyklus C_3. Graf na obrázku 4.6 je strom. Je súvislý a neobsahuje cyklus.



Obr. 4.6: Graf, ktorý je strom

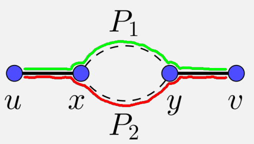
■

Ak sa pozrieme na definície kostry (str. 62) a stromu (str. 73) tak zistíme, že stromy sú grafy, ktoré sú sami sebe kostrou. Predtým ako sformulujeme sľúbenú vetu o stromoch, dokážeme šesť pomocných tvrdení, ktoré budeme využívať v jej dôkaze. Tým zdĺhavý dôkaz vety o stromoch rozložíme na šesť dôkazov jednoduchých tvrdení.

Lema 4.2.1 Ak je súvislý graf $G = (V,E)$ acyklický, tak je obyčajný a medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi $u,v \in V$ existuje práve jedna cesta.

Dôkaz: rozdelíme do troch bodov.

1. Graf G je súvislý, čiže medzi ľubovoľnými dvoma jeho vrcholmi existuje cesta.
2. Graf G je acyklický, a preto nemôže obsahovať slučky a násobné hrany. Dôkaz je triviálny a robí sa sporom. Ak by graf G obsahoval slučku, tak dostávame spor s tým, že je acyklický. Slučka je totiž súvislý pravidelný graf stupňa 2, takže podľa definície 3.4.2 je to cyklus dĺžky 1. A ak by v grafe G existovali medzi vrcholmi u a v násobné hrany h_1 a h_2, tak tieto by tvorili cyklus dĺžky 2 (u,h_1,v,h_2), čím opäť dostávame spor s tým, že graf G je acyklický. Tým je dokázané, že acyklický graf je obyčajný.
3. Potrebujeme už len dokázať, že v grafe $G = (V,E)$ medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi neexistuje viac než jedna cesta. Toto sa tiež dokáže sporom. Nech $u,v \in V$ a predpokladajme, že medzi týmito vrcholmi existujú dve rôzne cesty P_1 a P_2. Poďme po cestách



P_1 a P_2 z vrcholu u do vrcholu v. Nech x je prvý vrchol, ktorý je ešte spoločný obom cestám, ale už nasledujúce vrcholy ciest P_1 a P_2 sú rôzne. Nech y je prvý vrchol cesty P_1 za vrcholom x, ktorý je zároveň aj vrcholom cesty P_2. Situácia je zobrazená na obrázku vyššie, pričom cesty P_1 a P_2 sú zvýraznené zelenou a červenou farbou. Keďže sme predpokladali, že cesty P_1 a P_2 sú rôzne, musia také vrcholy x a y existovať. Ale potom, ak spojíme úseky ciest P_1 a P_2 medzi vrcholmi x a y, tak dostaneme cyklus, čo je spor s tým, že graf G je acyklický.

V predošlých troch bodoch sme dokázali, že súvislý acyklický graf G je obyčajný a medzi ľubovoľnými dvoma jeho vrcholmi existuje práve jedna cesta. Q.E.D.

V druhom pomocnom tvrdení dokážeme opačnú implikáciu.

Lema 4.2.2 Ak v obyčajnom grafe $G = (V,E)$ existuje medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi $u,v \in V$ práve jedna cesta, tak graf G je súvislý a acyklický.

Dôkaz: je triviálny a v podstate ten istý ako dôkaz lemy 4.2.1. Rozdelíme ho do dvoch bodov.

1. V grafe G existuje medzi ľubovoľnými dvoma jeho vrcholmi (práve jedna) cesta, takže graf G je súvislý.
2. V grafe G existuje medzi ľubovoľnými dvoma jeho vrcholmi práve jedna cesta, a preto graf G nemôže obsahovať cyklus na viac než 1 vrchole. Dôkaz tohto tvrdenia sa robí sporom a je ten istý ako dôkaz tretieho bodu z lemy 4.2.1. Jediný cyklus, ktorý by graf G mohol obsahovať, je slučka. Ale graf G je obyčajný, takže slučky a násobné hrany neobsahuje.

V predošlých dvoch bodov sme dokázali, že ak v obyčajnom grafe $G = (V,E)$ existuje medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi $u,v \in V$ práve jedna cesta, tak graf G je súvislý a acyklický. Q.E.D.

Tretie pomocné tvrdenie bude len obmenenou implikáciou lemy 3.4.4, takže ho vlastne už máme dokázané a len ho sformulujeme inými slovami.

Lema 4.2.3 Ak je graf G acyklický, tak každá jeho hrana je most.

Dôkaz: tvrdenie tejto lemy je obmenenou implikáciou tvrdenia lemy 3.4.4. Preto je táto lema ekvivalentná s lemou 3.4.4 a tým je dokázaná. Q.E.D.

Nasledujúce tvrdenie je veľmi dôležité a často v súvislosti so stromami využíva.

Lema 4.2.4 Ak je graf G strom na v vrcholoch, tak má $h = (v-1)$ hrán.

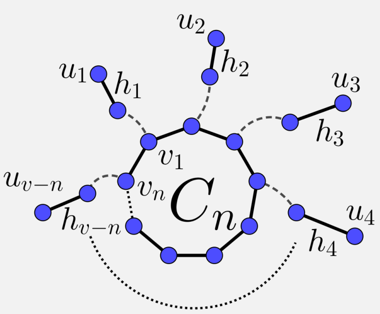
Dôkaz: graf G je strom, t. j. je to súvislý, obyčajný graf a podľa lemy 4.2.3 je každá jeho hrana most. Tvrdenie budeme dokazovať matematickou indukciou vzhľadom na počet vrcholov v.

1. Ak obyčajný graf G má $v = 1$ vrchol, tak musí mať $h = 0$ hrán a tvrdenie platí.
2. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre grafy, ktoré majú najviac $v-1$ vrcholov. Potom dokážeme, že tvrdenie platí aj pre grafy, ktoré majú v vrcholov.
   Máme obyčajný, súvislý a acyklický graf, ktorý má v vrcholov. Podľa lemy 4.2.3 je každá hrana takého grafu mostom. Ak teda vynecháme ľubovoľnú jednu hranu grafu G, tak sa nám tento rozpadne na dva komponenty. Jeden komponent bude mať $v_1 < v$ vrcholov, druhý bude mať $v_2 < v$ vrcholov a pre oba platí indukčný predpoklad, čiže $h_1 = (v_1 - 1)$ a $h_2 = (v_2 - 1)$. Keďže $v_1 + v_2 = v$ a $h_1 + h_2 = h - 1$, dostávame
   $$h = v_1 - 1 + v_2 - 1 + 1 = v_1 + v_2 - 1 = v - 1 \qquad \text{Q.E.D.}$$

Posledné dve pomocné tvrdenia tiež hovoria o počte vrcholov stromov a tiež sú často využívané v mnohých iných tvrdeniach týkajúcich sa stromov a ich vlastností.

Lema 4.2.5 Ak je graf G súvislý, má v vrcholov a $(v-1)$ hrán, tak je acyklický.

Dôkaz: budeme robiť sporom. Predpokladajme, že v grafe G existuje nejaký cyklus C_n s vrcholmi $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Tých vrcholov grafu G, ktoré neležia na cykle C_n, je $(v-n)$ a množinu týchto vrcholov si označme $A = \{u_1, u_2, \ldots, u_{v-n}\}$. Pre každý vrchol $u_i \in A$ zostrojme najkratšiu cestu vedúcu z u_i do niektorého vrcholu cyklu C_n a označme si h_i hranu tejto cesty, ktorá inciduje s vrcholom u_i. Je zrejmé, že pre $i \neq j$ platí $h_i \neq h_j$. Takže počet hrán grafu G musí byť aspoň $h = n + (v-n) = v$ (počet hrán cyklu C_n a všetkých hrán h_i), čo je spor s predpokladom, že hrán je $(v-1)$. Takže predpoklad existencie cyklu C_n bol nesprávny a graf G je acyklický. Q.E.D.



Lema 4.2.6 Ak je graf G acyklický, má v vrcholov a $(v-1)$ hrán, tak je súvislý.

Dôkaz: budeme robiť sporom. Predpokladajme, že graf G nie je súvislý a pozostáva z $n \geq 2$ komponentov $G_1, \ldots, G_n$, ktorých počty vrcholov sú $v_1, \ldots, v_n$. Graf G je acyklický, takže každý komponent je strom a v leme 4.2.4 sme dokázali, že pre každé i: $h_i = v_i - 1$. Preto pre počet vrcholov grafu G musí platiť

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} (h_i + 1) = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \right) + n = v - 1 + n > v - 1 + 1 = \boldsymbol{v}$$

Tým sme dostali spor s predpokladom, že hrán je $(v-1)$. Takže graf G musí byť súvislý. Q.E.D.

Teraz si už sformulujeme vetu o stromoch.

Veta 4.2.7 — Veta o stromoch. Pre obyčajný graf G sú nasledujúce štyri tvrdenia ekvivalentné

A) Graf G je strom (v zmysle definície 4.2.1).

B) Graf G je obyčajný a ľubovoľné jeho dva vrcholy sú spojené práve jednou cestou.

C) Graf G je súvislý, má v vrcholov a $h = (v-1)$ hrán.

D) Graf G je acyklický, má v vrcholov a $h = (v-1)$ hrán.

Dôkaz: máme dokázať ekvivalenciu štyroch tvrdení. Budeme to dokazovať ako štyri implikácie A) $\Rightarrow$ B) $\Rightarrow$ C) $\Rightarrow$ D) $\Rightarrow$ A). Tým dokážeme že ľubovoľné dve z tvrdení A), B), C), D) sú navzájom ekvivalentné.

- ▷ A) $\Rightarrow$ B): **Ak graf G je strom, tak je obyčajný a ľubovoľné dva jeho vrcholy sú spojené práve jednou cestou.** Táto implikácia je zhodná s lemou 4.2.1. Q.E.D.
- ▷ B) $\Rightarrow$ C): **Ak je graf G obyčajný a ľubovoľné jeho dva vrcholy sú spojené práve jednou cestou, tak je súvislý, má v vrcholov a $h = (v-1)$ hrán.** Podľa lemy 4.2.2 je graf G za daných podmienok súvislý a acyklický, t. j. strom. A v leme 4.2.4 je dokázané, že strom na v vrcholoch má $h = (v-1)$ hrán. Q.E.D.
- ▷ C) $\Rightarrow$ D): **Ak graf G je súvislý, má v vrcholov a $h = (v-1)$ hrán, tak je acyklický a má v vrcholov a $h = (v-1)$ hrán.** V tomto prípade stačí dokázať, že za daných podmienok je graf G acyklický. To je tvrdenie lemy 4.2.5. Q.E.D.
- ▷ D) $\Rightarrow$ A): **Ak graf G je acyklický, má v vrcholov a $h = (v-1)$ hrán, tak je strom.** V tomto prípade nám stačí dokázať, že za daných podmienok je graf G súvislý, čo je dokázané v leme 4.2.6. Q.E.D.

Veta 4.2.7 nám nielen hovorí o tom, že uvedené štyri tvrdenia, možné definície pojmu strom, sú navzájom ekvivalentné, ale aj nám poskytuje tvrdenia o vlastnostiach stromov. Vyplýva z nej, že ak graf G je strom, tak počet jeho vrcholov je o 1 väčší než počet jeho hrán, alebo inak povedané, počet jeho hrán je o 1 menší než počet jeho vrcholov.

Okrem toho, ako už bolo v dôkaze vety 4.2.7 (a v leme 4.2.3) spomenuté, ak graf G je strom, tak každá jeho hrana je most. Toto tvrdenie je priamym dôsledkom definície 4.2.1 a lemy 3.4.4. Uvedieme si ešte jednu vetu o vlastnostiach stromov.

Veta 4.2.8 — O vrcholoch stromov. Každý strom s aspoň dvoma vrcholmi má aspoň dva vrcholy stupňa 1.

Dôkaz: nech graf G je strom, ktorý má v vrcholov, označme si ich $\{u_1, u_2, \ldots, u_v\}$, a h hrán. Potom podľa vety 3.2.1 a vety 4.2.7 platí

$$\sum_{i=1}^{v} \mathrm{st}(u_i) = 2h = 2(v-1) = 2v-2$$

Pre všetky i musí platiť $\mathrm{st}(u_i) \geq 1$, pretože stupeň žiadneho vrcholu, v strome s aspoň dvoma vrcholmi, nemôže byť 0. Avšak, ak by aspoň $(v-1)$ vrcholov malo stupeň 2 alebo viac, tak by sme dostali spor, pretože uvedená suma by bola najmenej $2(v-1)+1 = 2v-1$. Takže strom s aspoň dvoma vrcholmi musí mať aspon dva vrcholy stupňa 1. Q.E.D.

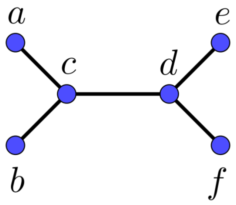
Kde sú stromy, tam je aj les a tam sú aj listy. Takže túto časť pre úplnosť zakončíme ďalšími dvoma definíciami.

Definícia 4.2.2 — Les. Graf G, ktorého všetky komponenty sú stromy, sa nazýva les.

Napríklad graf z obrázku 4.4 (str. 73) nie je strom, ale je to les. Tento graf pozostáva z dvoch komponentov, ktoré sú oba stromy.

Definícia 4.2.3 — List. List je vrchol stromu, ktorého stupeň je 1.

■ **Príklad 4.5**



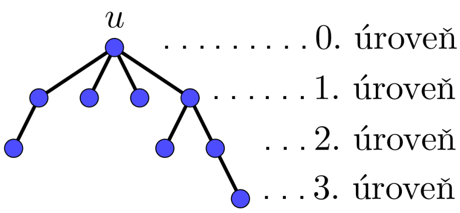
Graf na obrázku vľavo je strom so 4 listami. Sú to vrcholy a, b, e, f, ktoré majú stupeň 1.

■

4.3 Koreňové stromy

Koreňové stromy sú v podstate normálne stromy. Rozdiel spočíva len v tom, že pri koreňových stromoch si vyberieme jeden z vrcholov a ten prehlásime za *koreň*. Vo všetkých aplikáciach, v ktorých pomocou stromov repezentujeme nejaké hierarchicky usporiadané dáta, sa používajú práve *koreňové stromy*.

Definícia 4.3.1 — Koreňový strom, koreň. Koreňový strom je strom s pevne vybraným vrcholom u, ktorý sa nazýva koreň.



Obr. 4.7: Koreňový strom s výškou 3

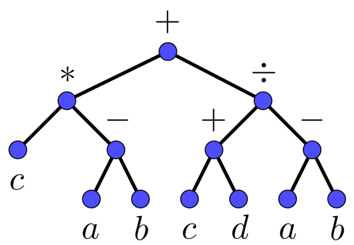
Pri kreslení koreňových stromov sa obvykle umiestňuje koreň buď nahor, alebo nadol, je to vecou dohody. My budeme koreňové stromy kresliť takmer vždy s koreňom hore. Na obrázku vľavo máme príklad koreňového stromu s troma úrovňami vrcholov. Koreň stromu sa vždy považuje za 0. úroveň.

Definícia 4.3.2 — Úroveň vrcholu, výška koreňového stromu. Ak T je koreňový strom, u jeho koreň a v jeho ľubovoľný vrchol, tak úroveň vrcholu v je jeho vzdialenosť od koreňa u. Výška koreňového stromu je maximálna úroveň, ktorú dosahujú jeho vrcholy.

Na obrázku 4.7 máme príklad koreňového stromu, ktorý má 3 úrovne vrcholov a výšku 3.

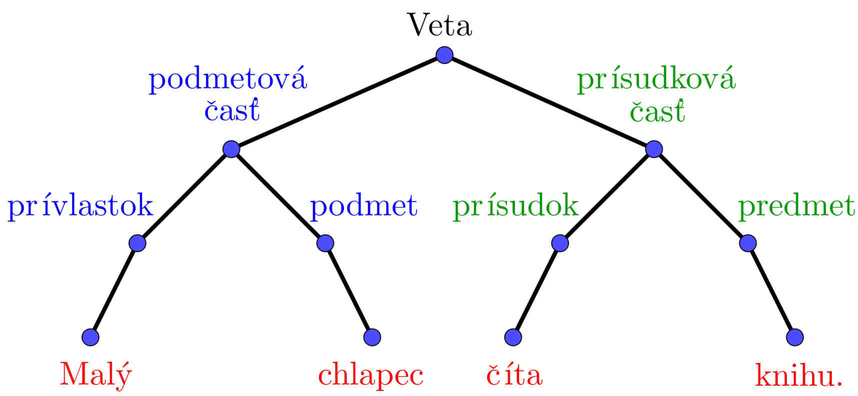
■ **Príklad 4.6** Pomocou koreňových stromov môžeme napríklad reprezentovať algebraické výrazy. Strom na obrázku nižšie reprezentuje výraz

$$c*(a-b)+(c+d)\div(a-b)$$



■

■ **Príklad 4.7** Alebo môžeme koreňové stromy aplikovať na vetný rozbor vety *„Malý chlapec číta knihu.“*, tak ako to máme zobrazené na obrázku nižšie.



■

Teraz si definujeme terminológiu používanú v súvislosti s koreňovými stromami.

4.3.1 Terminológia koreňových stromov

Najskôr si uvedieme obsiahlú definíciu a potom si nové pojmy ilustrujeme na príklade.

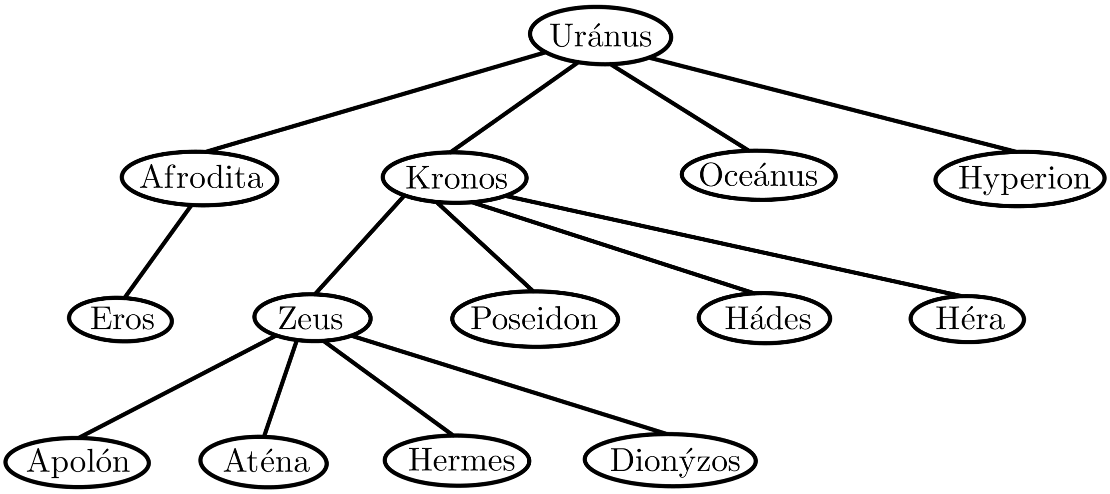
Definícia 4.3.3 — Terminológia koreňových stromov. Nech T je koreňový strom s koreňom v_0 a vrcholmi x, y, z a všeobecne v_i. Ďalej nech $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)$ je cesta z vrcholu v_0 do vrcholu v_n. Potom

a) vrchol v_{n-1} sa nazýva *otec* (alebo *rodič*) vrcholu v_n,
b) vrcholy $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ sa nazývajú *predkovia* vrcholu v_n,
c) vrchol v_n sa nazýva *syn* (alebo *dieťa*) vrcholu v_{n-1},
d) ak vrchol x je predkom vrcholu y, tak vrchol y sa nazýva *potomok* vrcholu x,
e) ak vrcholy x a y sú deti vrcholu z, tak sa vrcholy x a y nazývajú *súrodenci*,
f) vrchol, ktorý nemá synov, sa nazýva *koncový vrchol*.
g) vrchol, ktorý nie je koncový, sa nazýva *vnútorný* vrchol,
h) *podstrom* s koreňom x stromu T je podgraf stromu T s množinou vrcholov
$$V = \{x\} \cup \{y;\ y \text{ je potomok } x\}$$
a s množinou hrán
$$E = \{e;\ e \text{ je hrana cesty z vrcholu } x \text{ do ľubovoľného vrcholu z množiny } V\}$$

Ako vidíme, terminológia koreňových stromov je prevzatá z genealógie. To nie je náhoda, ale je to dôsledok toho, že rodokmene sa už po stáročia, omnoho skôr než vznikla teória grafov a pojmy ako strom a koreňový strom, reprezentujú a kreslia pomocou koreňových stromov.

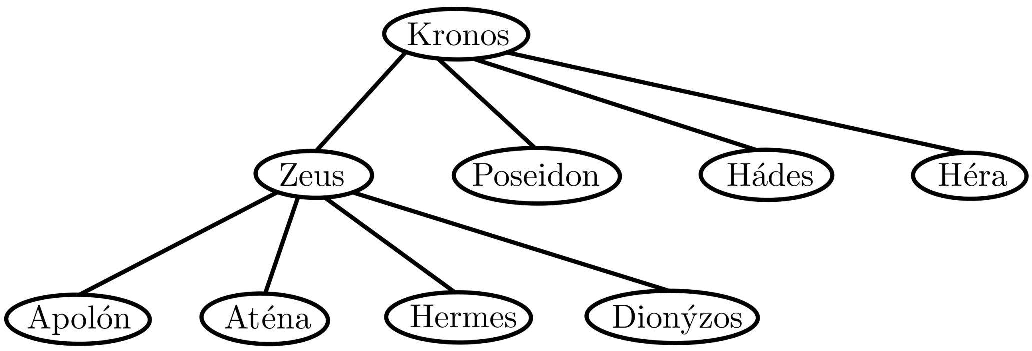
Poslednou kategóriou stromov, s ktorou sa na predmete *Diskrétna matematika* stretneme, sú binárne stromy. Predovšetkým v informatike sa s binárnymi a všeobecne s n-árnymi stromami stretávame veľmi často. Sú to frekventovane využívané dátové štruktúry používané napríklad na ukladanie a triedenie dát v databázach, súborových systémoch atď. Na predmete *Diskrétna matematika* sa budeme zaoberať len s binárnymi stromami.

■ **Príklad 4.8** Na obrázku 4.8 je zobrazená malá časť rodokmeňa starogréckych bohov.



Obr. 4.8: Časť rodokmeňa starogréckych bohov

(a) Otec Apolóna je Zeus. Rodič Erosa je Afrodita.
(b) Predkovia Hermesa sú Zeus, Kronos a Uránus.
(c) Deti Uránusa sú Afrodita, Kronos, Oceánus a Hyperion.
(d) Potomkovia Kronosa sú Zeus, Poseidon, Hádes, Héra, Apolón, Aténa, Hermes a Dionýzos.
(e) Afrodita, Kronos, Oceánus a Hyperion sú súrodenci.
(f) Koncové vrcholy sú Oceánus, Hyperion, Eros, Poseidon, Hádes, Héra, Apolón, Aténa, Hermes a Dionýzos.
(g) Vnútorné vrcholy sú Uránus, Afrodita, Kronos a Zeus.
(h) Podstrom s koreňom Kronos je zobrazený na obrázku 4.9.



Obr. 4.9: Podstrom s koreňom Kronos

■

4.4 Binárne stromy

Binárne stromy[1] sú veľmi dôležitá dátová štruktúra používaná v informatike. Je to v informatike najčastejšie využívaný typ stromov, používaný na

- prehľadávanie a triedenie dát,
- reprezentáciu dát (dôležitým príkladom je napr. Huffmanov kód).

Z hľadiska teórie grafov sa jedná o usporiadané koreňové stromy. Binárne stromy sa často v literatúre berú ako orientované grafy. Keďže sa však jedná o koreňové stromy, ktoré majú prirodzenú orientáciu, nie je nutné ešte naviac orientovať hrany grafu. My preto budeme binárne stromy brať ako neorientované grafy a v texte budeme binárne stromy označovať písmenami $B, B_1, B_2, \ldots$

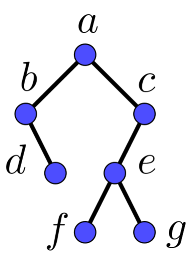
Binárne stromy sa dajú definovať viacerými spôsobmi. Najčastejšou je induktívna definícia (v informatickej terminológii rekurzívna definícia), ktorú si uvedieme ako prvú. Okrem toho sa dajú binárne stromy definovať aj explicitne, čo je síce názornejšie, avšak ťažkopádnejšie. Obe tieto definície sú ekvivalentné.

Definícia 4.4.1 — Binárny strom – induktívne. Binárny strom je buď prázdny strom, t. j. nemá žiadnu hranu ani vrchol, alebo je to koreňový strom s koreňom a usporiadanou dvojicou podstromov (B_1, B_2), kde B_1 aj B_2 sú binárne stromy. Podstromu B_1 hovoríme *ľavý podstrom* a podstromu B_2 hovoríme *pravý podstrom*.

Uvedená definícia nám hovorí, že prázdny graf, čiže graf bez hrán a vrcholov, sa považuje za binárny strom. Prázdny graf sám o sebe ale, v praktických aplikáciach, nie je príliš užitočný, takže sa radšej pozrieme na tie binárne stromy, ktoré sú neprázdne. Sú to také koreňové stromy, v ktorých každý vrchol má práve dva podstromy, tvoriace usporiadanú dvojicu (B_1, B_2), kde B_1 aj B_2 sú binárne stromy. Až teraz vstupuje do hry aj prázdny graf, pretože jeden, alebo aj oba, z týchto podstromov, môžu byť aj prázdne grafy. Takže binárny strom by sme mohli definovať aj ako špeciálny koreňový strom. Bude to koreňový strom, v ktorom každý vrchol má 0, 1, alebo 2 synov a synov každého vrcholu rozlišujeme na ľavého a pravého. Z toho potom vyplýva explicitná definícia binárnych stromov.

Definícia 4.4.2 — Binárny strom - explicitne. Binárny strom je koreňový strom, v ktorom každý vrchol má buď 0 synov, alebo jedného syna, alebo má 2 synov. Synovia vrcholu tvoria usporiadanú dvojicu a označujú sa ako *ľavý syn* a *pravý syn* vrcholu. Aj v prípade, že vrchol má len jedného syna, rozlišujeme či sa jedná o ľavého, alebo pravého syna.

■ Príklad 4.9



Graf na obrázku vľavo je binárny strom. Jeho koreň je vrchol a, ktorý má ľavého syna b a pravého syna c. Vrchol b nemá ľavého syna, jeho ľavý podstrom je prázdny graf, a má pravého syna d. Vrchol c má ľavého syna e a nemá pravého syna, jeho pravý podstrom je prázdny graf. Podstrom s koreňom b je ľavý podstrom vrcholu a a podstrom s koreňom c je pravý podstrom vrcholu a. ■

Existuje viacero typov binárnych stromov. Sú to napríklad *úplný*, *kompletný*, *dokonalý* (*perfect binary tree*), *vyvážený*, ... My si zatiaľ definujeme len úplný a vyvážený binárny strom.

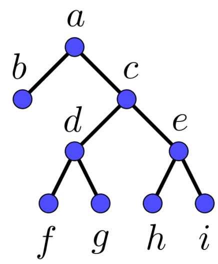
[1] Nesmieme si mýliť binárne stromy a tzv. B-stromy. B-strom (B-tree = *self-balancing tree*) je takisto stromová dátová štruktúra, používaná v informatike na efektívne ukladanie a triedenie veľkého množstva dát. B-stromy sú zovšeobecnením binárnych stromov a pri B-stromoch môže mať každý vrchol viac než 2 synov.

Definícia 4.4.3 — Úplný binárny strom. Binárny strom, v ktorom každý vrchol má 0 alebo 2 synov sa nazýva úplný binárny strom.

P Strom z príkladu 4.9 nie je úplný, pretože vrcholy b a c majú len po jednom synovi. Vrchol b má len pravého a vrchol c má len ľavého syna.

■ **Príklad 4.10**

Graf na obrázku vpravo je úplný binárny strom. Každý jeho vrchol má buď dvoch synov, alebo nemá žiadneho syna.

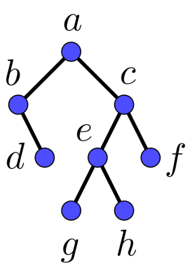


■

Definícia 4.4.4 — Vyvážený binárny strom. Binárny strom, v ktorom sa výška ľavého a pravého podstromu každého vrcholu líši najviac o 1, sa nazýva vyvážený binárny strom.

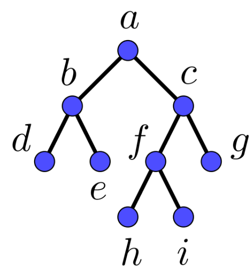
P Ani jeden zo stromov z príkladov 4.9 a 4.10 nie je vyvážený. V strome z príkladu 4.9 má vrchol c podstromy s výškou 2 a 0, a preto nemôže byť vyvážený. V strome z príkladu 4.10 má vrchol a podstromy s výškou 1 a 3, a preto nie je vyvážený.

■ **Príklad 4.11**



Graf na obrázku vľavo je vyvážený binárny strom. Podstromy každeho jeho vrcholu sa líšia svojou výškou najviac o 1. Tento strom však nie je úplný, pretože vrchol b má len jedného syna.

Graf na obrázku vpravo je vyvážený, úplny binárny strom. Každý jeho vrchol má buď 0 alebo 2 synov a podstromy každého jeho vrcholu sa svojou výškou líšia najviac o 1.



■

Úplné a vyvážené binárne stromy sú dôležité pri efektívnom ukladaní a kódovaní dát. Napríklad Huffmanov kód (podkapitola 10.3, str. 204), s ktorým sa budeme zaoberať neskôr, je vlastne úplný binárny strom. Dôležitým výsledkom o úplných binárnych stromoch je nasledujúca veta.

Veta 4.4.1 — O počte koncových vrcholov úplných binárnych stromov. Nech B je úplný binárny strom, ktorý má n vnútorných vrcholov. Potom B má $(n+1)$ koncových vrcholov a počet všetkých jeho vrcholov je $(2n+1)$.

Dôkaz: v koreňovom strome je každý vrchol, okrem koreňa, syn nejakého vnútorného vrcholu. Úplný binárny strom B má n vnútorných vrcholov. Vnútorné vrcholy sú také, ktoré majú synov a keďže strom je úplný, musia mať 2 synov. Takže v strome B musí byť $2n$ synov. Všetkých vrcholov stromu B musí byť $(2n+1)$, čo je počet všetkých synov a koreňa stromu. Počet koncových vrcholov, potom dostaneme, keď od celkového počtu vrcholov odpočítame vnútorné vrcholy. Koncových vrcholov je teda $(2n+1)-n=(n+1)$. Q.E.D.

Nasledujúca veta dáva do súvislosti počet koncových vrcholov binárneho stromu a jeho výšku (hĺbku). Tvrdenie vety je intuitívne zrejmé a ľahko sa dá nahliadnuť aj priamym výpočtom počtu koncových vrcholov stromu. My však túto vetu budeme dokazovať pomocou matematickej indukcie. Je to, v tomto prípade, matematicky „čistejší“ spôsob. Až za dôkazom vety ukážeme, ako by sa dalo tvrdenie vety nahliadnuť aj iným spôsobom.

Veta 4.4.2 — O súvislosti výšky a počtu koncových vrcholov binárnych stromov. Nech binárny strom B má výšku h a počet jeho koncových vrcholov je t. Potom platí nerovnosť

$$\log_2 t \leq h\,.$$

Dôkaz: uvedená nerovnosť sa ekvivalentne dá zapísať ako

$$t \leq 2^h\,.$$

Pomocou matematickej indukcie budeme dokazovať takto upravenú nerovnosť.

1. Pre $h = 0$ je binárny strom buď prázdny, alebo pozostáva z jedného izolovaného vrcholu. Takže $t \leq 1$ a platí $t \leq 1 \leq 2^0 = 2^h$.
2. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre ľubovoľný binárny strom s výškou najviac $(h-1)$. Potom ukážeme, že tvrdenie musí platiť aj pre ľubovoľný binárny strom s výškou h. Nech je vrchol a koreňom binárneho stromu B. Potom tento má 2 podstromy B_1 a B_2. Označme si vyšky a počet koncových vrcholov podstromov B_1 a B_2 ako h_1, t_1 a h_2, t_2. Výšky podstromov B_1 a B_2 sú nanajvýš $(h-1)$. Koncové vrcholy binárneho stromu B sú zjednotením koncových vrcholov podstromov B_1 a B_2. Platí teda
$$h_1 \leq (h-1)\,,\ h_2 \leq (h-1) \quad \text{a} \quad t_1 + t_2 = t\,.$$
Podla uvedených nerovností pre podstromy B_1 a B_2 platí indukčný predpoklad, čiže platí $t_1 \leq 2^{h_1}$ a $t_2 \leq 2^{h_2}$. Odtiaľ dostávame
$$t = t_1 + t_2 \leq 2^{h_1} + 2^{h_2} \leq 2^{(h-1)} + 2^{(h-1)} = 2^h\,.$$

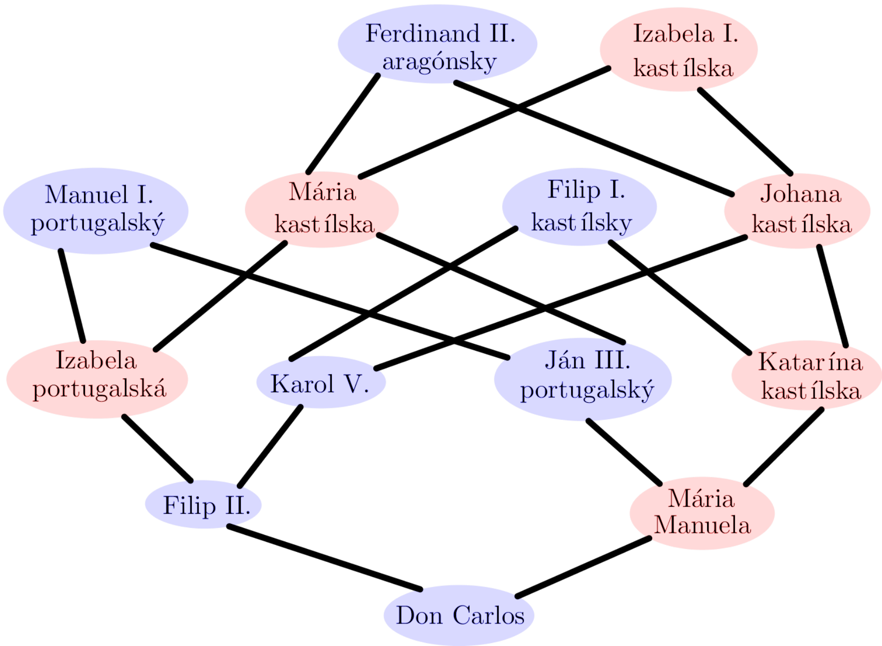
Q.E.D.

V binárnom strome môže mať každý vrchol najviac 2 synov. Ak máme binárny strom výšky h, tak je zrejmé, že počet jeho koncových vrcholov, listov, bude najväčší práve vtedy, keď všetky vrcholy na 0. až $(h-1)$. úrovni budú mať práve 2 synov. Takýmto binárnym stromom sa hovorí *dokonalé* (perfect binary tree). Formálnu definíciu sme síce neuviedli a ani ju uvádzať nebudeme, ale uvedený neformálny popis jej zodpovedá. Napríklad rodokmeň nejakej konkrétnej osoby[2], ktorý zobrazuje všetkých predkov až po h. predchádzajúcu generáciu, je dokonalý binárny strom. Každý normálny jedinec má 2 rodičov, 4 starých rodičov, 8 prarodičov[3] atď. Ak sa však pozrieme na rodokmeň Don Carlosa (1545-1568)[4], viď obrázok 4.10 (str. 83), tak vidíme, že mal 2 rodičov, 4 starých rodičov, ktorých tvorili dva súrodenecké páry, len 4 prarodičov a 6 praprarodičov namiesto obvyklých 16. V prípade incestu rodokmeň nie je strom, pretože obsahuje cykly.

Ako už bolo spomenuté pred vetou 4.4.2, tvrdenie vety je intuitívne zrejmé a dá sa nahliadnuť aj priamym výpočtom počtu listov stromu. Binárny strom výšky $h = 0$, môže mať maximálne $1 = 2^0$ list. Binárny strom výšky $h = 1$ bude mať maximálny počet koncových vrcholov práve vtedy, keď bude dokonalý. Čiže ak jeho koreň bude mať 2 synov. V každom ďalšom kroku bude počet koncových vrcholov maximálny práve vtedy, ak príslušný binárny strom bude dokonalý. Dokonalý binárny strom výšky h bude mať presne dvojnásobne viac koncových vrcholov, než dokonalý binárny strom výšky $(h-1)$. Odtiaľ je potom zrejmé tvrdenie vety, čiže platnosť nerovnosti $t \leq 2^h$. Rovnosť sa nadobúda len pre dokonalé binárne stromy.

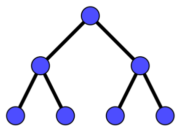
Vzťah výšky binárneho stromu a počtu jeho koncových vrcholov si ilustrujeme na nasledujúcom príklade.

[2]Výnimky tvoria prípady incestu, viď príklad Don Carlosa.
[3]Podľa zákona by toto malo platiť až po 4. generáciu predkov.
[4]Habsburg preslávený a zidealizovaný známou Verdiho operou *Don Carlos*.

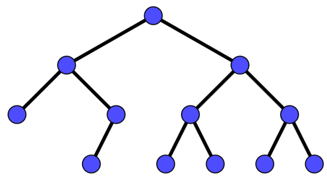


Obr. 4.10: Rodokmeň Don Carlosa – koreň „stromu" je v tomto prípade umiestnený dole.

■ Príklad 4.12



Graf na obrázku vľavo je dokonalý binárny strom s výškou $h = 2$. Má $t = 4$ koncové vrchoy a vidíme, že v tomto prípade nastáva rovnosť $\log_2 t = \log_2 4 = 2 = h$.
Graf na obrázku vpravo je vyvážený binárny strom, ktorý nie je dokonalý. Jeho výška je $h = 3$ a počet jeho koncových vrcholov je $t = 6$. Platí preto ostrá nerovnosť $\log_2 t = \log_2 6 < 3 = h$.



■

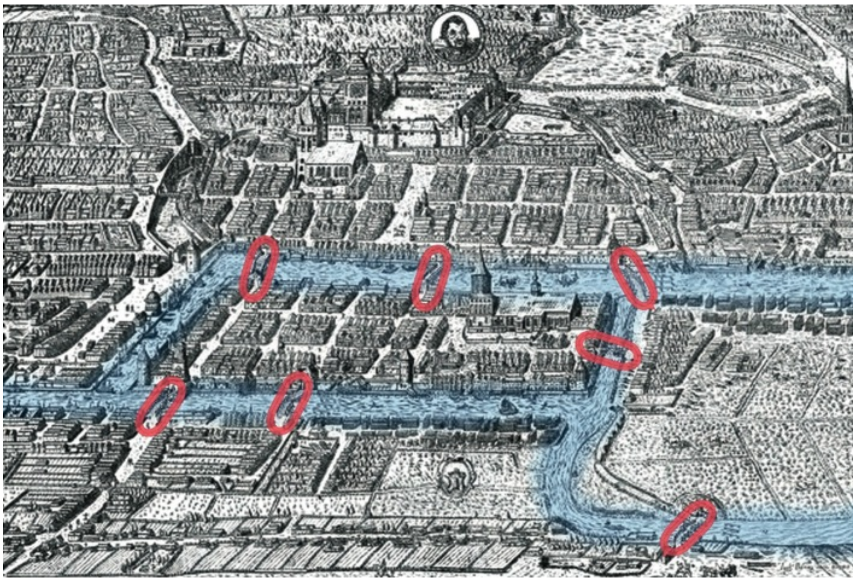
4.5 Eulerovské ťahy

V časti 3.1 sme už spomenuli, že počiatky teórie grafov sa datujú do začiatku 18. storočia a sú spojené so žánrom, ktorému dnes hovoríme „zábavná", alebo „rekreačná" matematika. Prvý problém vtedy ešte neexistujúcej teórie grafov bol problém Königsbergských mostov. Tento problém vznikol ako zábavný hlavolam, ale ako sa neskôr ukázalo, stretneme sa s ním v mnohých praktických aplikáciach teórie grafov. Pozrieme sa preto na tento problém bližšie.

4.5.1 Königsbergské mosty

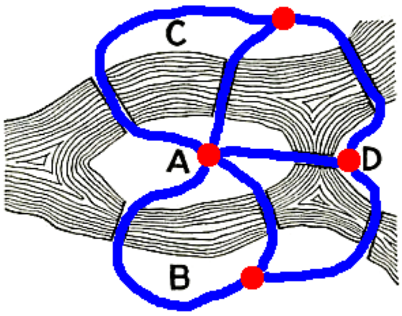
Cez mesto Königsberg (dnešný Kaliningrad) tečie rieka Pregel. Uprostred nej sú ostrovy a mesto s ostrovmi, ako aj ostrovy navzájom, boli pospájané 7 mostami. Vtedajšia[5] situácia je zobrazená na obrázku 4.11.

[5] Vďaka mapám na internete sa ľahko môžeme presvedčiť, že v súčasnosti sa dva mosty, spájajúce ľavý ostrov s mestom, presunuli na pravý ostrov. Tento detail je však pre riešenie danej úlohy nepodstatný. Z hľadiska teórie grafov je to identická situácia.



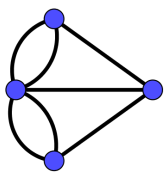
Obr. 4.11: Königsbergské mosty na začiatku 18. storočia

Vzhľadom na to, že na začiatku 18. storočia ešte neboli kiná, rádio, televízia ani internet, zabávali sa mešťania tým, že sa vo svojom voľnom čase prechádzali po meste, alebo navštevovali koncerty. A niekto z nich vymyslel úlohu, prejsť sa po meste tak, že prechádzku začneme v nejakom bode A, prejdeme po každom z mostov práve raz a prechádzku ukončíme opäť v bode A. Bod A si môžeme, v rámci mesta, zvoliť ľubovoľne. Mnohí sa pokúšali túto úlohu vyriešit, či už prakticky, alebo teoreticky, ale neuspeli. O úlohe sa dozvedel aj švajčiarky matematik Leonhard Euler, ktorý v tom čase pôsobil na akadémii v Petrohrade. Euler si všimol, že tvar mesta, ostrovov a dĺžka mostov nemajú žiaden vplyv na riešenie úlohy. Takže úlohu môžeme pretransformovať na jednoduchý matematický problém. Časti mesta a ostrovy si označíme ako body A,B,C,D a čiarami spojíme body zodpovedajúce častiam mesta, ktoré sú spojené mostami. Asi tak ako vidíme na obrázku 4.12.



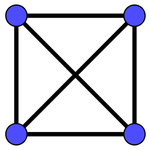
Obr. 4.12: Königsbergské mosty po Eulerovej úprave

Červené body a modré čiary z predošlého obrázku môžeme chápať ako graf so 4 vrcholmi a so 7 hranami. Graf pritom chápeme v zmysle definície 3.2.1. Predošlý obrázok si môžeme prekresliť do krajšej podoby.

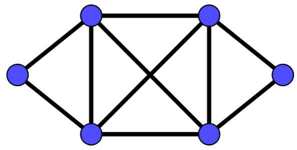


Obr. 4.13: Königsbergské mosty ako graf

Pôvodná úloha o prechádzke po Königsbergu sa potom transformuje na úlohu nájsť taký uzavretý ťah (definícia 3.3.3) v grafe na obrázku 4.13, ktorý obsahuje všetky hrany (a tým aj vrcholy). Sami sa ľahko môžeme, na grafoch z obrázkov 4.14 a 4.15, presvedčiť, že nie každý súvislý graf má uzavretý ťah obsahujúci všetky jeho hrany.



Obr. 4.14: Nemá uzavretý ťah



Obr. 4.15: Má uzavretý ťah

Euler dokázal, že úloha o Königsbergských mostoch je neriešiteľná. A ako správny matematik sa neuspokojil s tým, že by vyriešil len jeden konkrétny hlavolam pre mesto Königsberg. On tento problém zovšeobecnil a vyriešil ho pre ľubovoľný graf. Euler našiel a dokázal podmienky hovoriace o tom, pre ktoré grafy existuje otvorený alebo uzavretý ťah obsahujúci všetky hrany. Na jeho počesť sa preto ťahy, obsahujúce všetky hrany daného grafu, nazývajú *eulerovské ťahy*.

4.6 Otvorené a uzavreté eulerovské ťahy

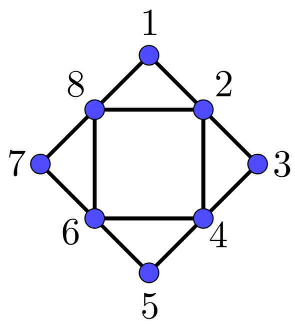
Pri definovaní eulerovských ťahov nemá zmysel zaoberať sa nesúvislými grafmi. Ak by bol graf nesúvislý (má viac než 1 komponent), tak v ňom celkom určite žiaden ťah, obsahujúci všetky hrany, nebude existovať. Takže sa budeme zaoberať len súvislými grafmi.

Definícia 4.6.1 — Otvorený a uzavretý eulerovský ťah. Nech G je súvislý graf. Potom v grafe G

- ▷ *otvorený eulerovský ťah* je taký ťah, ktorého počiatočný a koncový vrchol sú dva rôzne vrcholy a ktorý obsahuje všetky hrany grafu G.
- ▷ *uzavretý eulerovský ťah* je taký uzavretý ťah, ktorý obsahuje všetky hrany grafu G.

■ Príklad 4.13

Graf na obrázku vpravo má uzavretý eulerovský ťah $(8,1,2,3,4,5,6,7,8,2,4,6,8)$.



■

Na príklade 4.13 si všimnime, že v danom grafe je stupeň každého jeho vrcholu párny. Euler dokázal, že to je nutná aj postačujúca podmienka existencie uzavretého eulerovského ťahu v súvislom grafe.

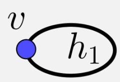
Veta 4.6.1 — Veta o uzavretom eulerovskom ťahu. V grafe G existuje uzavretý eulerovský ťah práve vtedy, keď je graf G súvislý a stupeň každého jeho vrcholu je párny.

Dôkaz: Veta je sformulovaná ako ekvivalencia a dokazovať ju budeme ako dve implikácie.

$\Rightarrow$ **Ak v grafe G existuje uzavretý eulerovský ťah, tak je graf G súvislý a stupeň každého jeho vrcholu je párny.**
Uzavretý eulerovský ťah musí obsahovať všetky vrcholy grafu. To podľa vety 3.3.1 znamená, že medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi existuje cesta, a preto je graf G súvislý. Okrem toho uzavretý eulerovský ťah prechádza každou hranou grafu práve raz, takže ak ideme po tomto ťahu, tak do každého vrcholu musíme vojsť jednou a výjsť inou, ešte nepoužitou, hranou. To ale znamená, že stupeň každého vrcholu musí byť párny.

$\Leftarrow$ **Ak je graf G súvislý a stupeň každého jeho vrcholu je párny, tak v grafe G existuje uzavretý eulerovský ťah.**
Dôkaz budeme robiť matematicou indukciou vzhľadom na počet hrán grafu G. Nech G je súvislý graf, ktorého všetky vrcholy sú párneho stupňa a počet jeho hrán je e.

1. Overenie tvrdenia pre $e = 0$ a $e = 1$: súvislý graf bez hrán ($e = 0$) je len jeden vrchol a ten má triviálny uzavretý eulerovský ťah.
   Jediný súvislý graf s jednou hranou a všetkými vrcholmi párneho stupňa, je slučka. Čiže taký graf, aký je na obrázku vpravo.

   Tento graf má uzavretý eulerovský ťah (v, h_1, v), čiže tvrdenie preň platí.

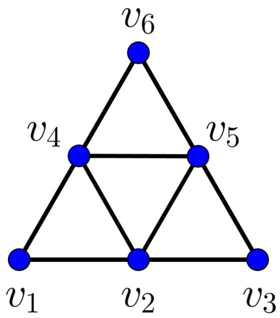
2. Indukčný krok: predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky grafy, ktoré majú najvýš $e = (n-1)$ hrán a na základe toho dokážeme, že potom musí platiť aj pre grafy, ktoré majú $e = n$ hrán.
   Majme súvislý graf G s $e = n$ hranami, ktorého všetky vrcholy sú párneho stupňa. Vyberme si ľubovoľnu hranu grafu G a označme ju h_1. Sporom ľahko dokážeme, že hrana h_1 nemôže byť most. Ak by hrana h_1 bola most, tak po jej vynechaní by sa graf G rozpadol na dva komponenty, pričom v každom z nich by bol práve jeden vrchol nepárneho stupňa. To je spor s vetou 3.2.1 (viď cvičenie 3.6). Ak hrana h_1 nie je most, tak podľa lemy 3.4.4 musí patriť do nejakého cyklu, označme si ho C. Ak z grafu G vynecháme všetky hrany cyklu C, tak sa nám G rozpadne na komponenty $\{G_1, \dots, G_k\}$, pričom môže nastať aj prípad $k = 1$. Všetky tieto komponenty sú súvislé grafy so všetkými vrcholmi párneho stupňa a menej než n hranami. Takže podľa indukčného predpokladu v každom z nich existuje uzavretý eulerovský ťah. Uzavretý eulerovský ťah v grafe G potom vytvoríme nasledovným spôsobom. Začneme vo vrchole komponentu G_1 ležiacom na cykle C. Vytvoríme v ňom uzavretý eulerovský ťah, po hranách cyklu C sa presunieme do nasledujúceho komponentu. V ňom tiež vytvoríme uzavretý eulerovský ťah, po hranách cyklu C sa presunieme ďalej a takto pokračujeme až do komponentu G_k. Z neho sa, po vytvorení jeho uzavretého eulerovského ťahu, vrátime po hranách cyklu C do východzieho vrcholu.

Q.E.D.

P Matematická indukcia, ktorú sme použili v dôkaze vety 4.6.1, je iný typ matematickej indukcie, než s akým sme sa zatiaľ stretávali. Doteraz sme vždy predpokladali, že tvrdenie platí pre číslo $(n-1)$ a na základe toho sme dokázali, že musí platiť aj pre číslo n. Teraz predpokladáme, že tvrdenie platí pre všetky čísla menšie než n a na základe toho dokážeme platnosť tvrdenia aj pre číslo n.

Z vety 4.6.1 vyplýva, že úloha o Königsbergských mostoch nemá riešenie. Graf z obrázku 4.13 nielenže nemá všetky vrcholy párneho stupna, ale on má všetky vrcholy nepárneho stupňa. To isté platí aj o grafe z obrázku 4.14.

■ Príklad 4.14



Graf na obrázku vľavo je súvislý a má všetky vrcholy párneho stupňa. Jeho stupne vrcholov sú

$$\mathrm{st}(v_1) = \mathrm{st}(v_3) = \mathrm{st}(v_6) = 2$$
$$\mathrm{st}(v_2) = \mathrm{st}(v_4) = \mathrm{st}(v_5) = 4$$

Takže podľa vety 4.6.1 má tento graf uzavretý eulerovský ťah. Je to napríklad ťah

$$(v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_4, v_5, v_2, v_4, v_1).$$

■

Na základe vety 4.6.1 a vďaka tomu, že grafy, ktoré majú uzavretý eulerovský ťah, majú významné postavenie v mnohých praktických aplikáciach, má zmysel definovať pojem *eulerovský graf*.

Definícia 4.6.2 — Eulerovský graf. Súvislý graf G, ktorého všetky vrcholy sú párneho stupňa, sa nazýva eulerovský graf.

Eulerovské grafy sú práve tie grafy, ktoré majú uzavretý eulerovský ťah. Tieto grafy vieme nakresliť jedným ťahom tak, že začneme aj skončíme v tom istom vrchole. V rôznych aplikáciach však má zmysel sa zaoberať aj takými grafmi, ktoré síce nemajú uzavretý eulerovský ťah, ale majú otvorený eulerovský ťah. Tieto grafy vieme nakresliť jedným ťahom tak, že kreslenie začíname a končíme v dvoch rôznych vrcholoch.

Veta 4.6.2 — Veta o otvorenom eulerovskom ťahu. V grafe G existuje otvorený eulerovský ťah práve vtedy, keď je graf G súvislý a má práve dva vrcholy nepárneho stupňa.

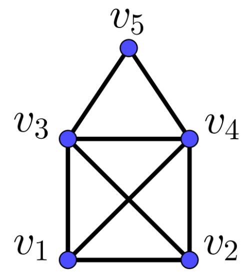
Dôkaz: Veta je sformulovaná ako ekvivalencia a dokazovať ju budeme ako dve implikácie.

- $\Leftarrow$ **Ak je graf G súvislý a má práve dva vrcholy nepárneho stupňa, tak v ňom existuje otvorený eulerovský ťah.**
  Nech u a v sú tie dva vrcholy grafu G, ktoré sú nepárneho stupňa. Spojme tieto dva vrcholy novou hranou h a dostaneme eulerovský graf G'. Podľa vety 4.6.1 v grafe G' existuje uzavretý eulerovský ťah a v ňom musí existovať buď sled (u, h, v), alebo sled (v, h, u). Vynechaním hrany h dostaneme otvorený eulerovský ťah v grafe G, ktorý sa začína v jednom z vrcholov u, v a končí sa v druhom z nich.

- $\Rightarrow$ **Ak v grafe G existuje otvorený eulerovský ťah, tak potom je graf G súvislý a má práve dva vrcholy nepárneho stupňa.**
  Ak v grafe G existuje otvorený eulerovský ťah, tak tento sa začína vo vrchole u, končí vo vrchole v a $u \neq v$. To znamená, že vrcholy u a v sú nepárneho stupňa, pretože ťah z jedného z nich na začiatku len vychádza a do druhého z nich na konci len vchádza. Všetky ostatné vrcholy grafu G musia byť párneho stupňa, pretože ťah do každého z nich musí vojsť jednou a výjsť inou, ešte nepoužitou, hranou. Naviac graf G musí byť súvislý, pretože otvorený eulerovský ťah obsahuje všetky jeho vrcholy, a preto medzi ľuvovoľnými dvoma vrcholmi existuje podľa vety 3.3.1 cesta.

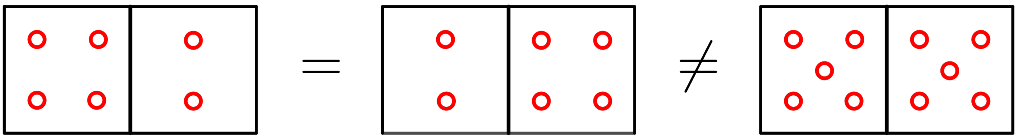
■ **Príklad 4.15**

Graf na obrázku vpravo, podľa definície 4.6.2, nie je eulerovský a veta 4.6.1 nám hovorí, že v ňom neexistuje uzavretý eulerovský ťah. Stupne jeho vrcholov sú $\mathrm{st}(v_5) = 2$, $\mathrm{st}(v_1) = \mathrm{st}(v_2) = 3$, $\mathrm{st}(v_3) = \mathrm{st}(v_4) = 4$. Tento graf má práve dva vrcholy $\{v_1, v_2\}$ nepárneho stupňa a všetky ostatné vrcholy párneho stupňa. Podľa vety 4.6.2 má teda graf G otvorený eulerovský ťah. Napríklad $(v_1, v_2, v_3, v_1, v_4, v_5, v_3, v_4, v_2)$. Vidíme, že tento ťah začína vo vrchole v_1 a končí vo vrchole v_2, teda práve v jediných dvoch vrcholoch, ktorých stupeň je nepárny.



■

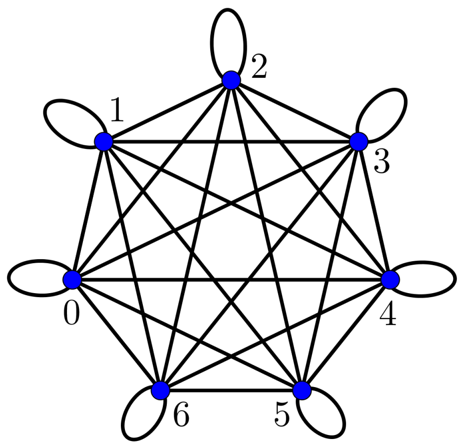
■ **Príklad 4.16** Domino kameň má tvar obdĺžnika, ktorý je zložený z dvoch štvorcov. V každom zo štvorcov je nakreslených n ôk, kde $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Príklady dvoch domino kameňov sú na nasledujúcom obrázku.



Kompletná sada domino kameňov obsahuje kamene so všetkými možnými neusporiadanými dvojicami $\{m, n\}$ ôk, pričom $m, n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a každá neusporiadaná dvojica $\{m, n\}$ ôk sa v sade vyskytuje práve raz.
(Úloha na okraj: koľko domino kameňov obsahuje kompletná sada?)
Je možné všetky dominá usporiadať do kruhu tak, aby sa susediace domino kamene navzájom dotýkali štvorcami obsahujúcimi rovnaký počet ôk?

Riešenie:

Táto zdanlivo komplikovaná úloha má vďaka grafom a vete 4.6.1 jednoduché riešenie. Domino kameňom priradíme neorientovaný graf G tak, že vrcholy budú zodpovedať počtu ôk a hrany samotným kameňom. Čiže graf bude mať 7 vrcholov z množiny $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a vrcholy incidujúce s hranou grafu, zodpovedajú počtu ôk na domino kameni. Graf G, predstavujúci kompletnú sadu domino kameňov, vidíme na obrázku vpravo. Usporiadať domino kamene do kruhu tak, aby sa susediace domino kamene navzájom dotýkali štvorcami obsahujúcimi rovnaký počet ôk, zodpovedá nájdeniu uzavretého eulerovského ťahu v grafe G. Graf G je súvislý a všetky jeho vrcholy sú párneho stupňa, takže v ňom, podľa vety 4.6.1 existuje uzavretý eulerovský ťah. Odpoveď na úlohu v zadaní je preto „áno“.



■

■ **Príklad 4.17** Bude sa dať vyriešiť úloha z príkladu 4.16 aj v prípade, že počet ôk na kameňoch by sa vyberal len z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

Riešenie: Nie. Odpoveď opät vyplýva z vety 4.6.1. Ak si rovnakým spôsobom ako v predošlom príklade nakreslíme neorientovaný graf zodpovedajúci kompletnej sade domino kameňov, tak každý vrchol tohto grafu bude mať stupeň 7, čiže nepárny. A podľa vety 4.6.1 takýto graf neobsahuje uzavretý eulerovský ťah. ■

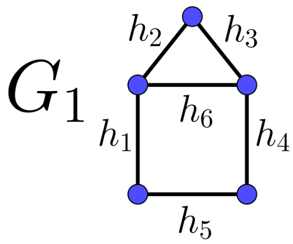
Pred uvedením cvičení ku tejto kapitole si ešte definujeme tri nové pojmy, ktoré sa v týchto cvičeniach používajú.

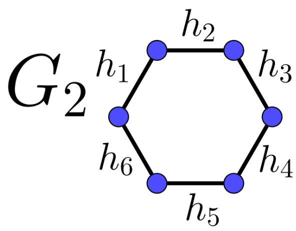
Definícia 4.6.3 — Párovanie. Nech $G = (V,E)$ je graf. Potom množina $E' \subset E$ sa nazýva párovanie, ak žiadne dve hrany z množiny E' nemajú spoločný vrchol a žiadna hrana z E' nie je slučka. Povedané inak, podmnožina hrán $E' \subset E$ grafu G je párovanie, ak má každý vrchol grafu $G' = (V,E')$ stupeň 0 alebo 1.

Definícia 4.6.4 — Maximálne párovanie. Maximálne párovanie grafu G je také párovanie, ktoré má najväčší možný počet hrán.

Definícia 4.6.5 — Perfektné párovanie. Nech $G = (V,E)$ je graf. Potom množina $E' \subset E$ sa nazýva perfektné (dokonalé) párovanie, ak je to párovanie a pokrýva všetky vrcholy z množiny V, t. j. každý vrchol z V inciduje s práve jednou hranou z E'.

■ **Príklad 4.18** Vezmime si napríklad grafy G_1 a G_2 zobrazené nižšie. Potom





v grafe G_1:

(a) $E' = \{h_6\}$ je podľa definície 4.6.3 párovanie.
(b) $E' = \{h_4, h_6\}$ nie je párovanie, pretože hrany h_4 a h_6 incidujú so spoločným vrcholom.
(c) $E' = \{h_1, h_4\}$, alebo $E'' = \{h_3, h_5\}$, alebo $E''' = \{h_2, h_5\}, \ldots$ sú maximálne párovania.
(d) neexistuje perfektné párovanie, pretože graf G_1 má 5 vrcholov. Jeho maximálne párovanie môže mať najviac 2 hrany a 4 vrcholy.

v grafe G_2:

(a) $E' = \{h_1\}$ je párovanie.
(b) $E' = \{h_1, h_2\}$ nie je párovanie, pretože hrany h_1 a h_2 incidujú so spoločným vrcholom.
(c) $E' = \{h_1, h_3, h_5\}$ a $E'' = \{h_2, h_4, h_6\}$ sú jediné dve maximálne párovania.
(d) obe uvedené maximálne párovanie sú súčasne aj perfektné párovania, pretože pokrývajú celú vrcholovú množinu grafu G_2.

■

4.7 Cvičenia

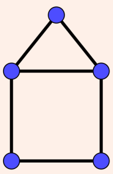
Cvičenie 4.1 Nakreslite grafy dané maticou susednosti a priamo z matice zistite, ktoré z týchto grafov sú obyčajné

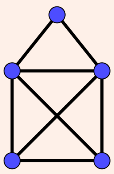
(a) $\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\\ d\\ e \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&1\\ 0&1&0&1&1\\ 1&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0 \end{pmatrix}\end{array}$
(c) $\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\\ d\\ e \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0&0&1&1&0\\ 0&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&1\\ 1&1&0&0&1\\ 0&1&1&1&0 \end{pmatrix}\end{array}$
(e) $\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\\ d\\ e \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0&1&1&0&1\\ 1&0&0&1&1\\ 1&0&0&1&1\\ 0&1&1&0&1\\ 1&1&1&1&0 \end{pmatrix}\end{array}$

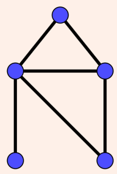
(b) $\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\\ d\\ e \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array}\\ \begin{pmatrix} 2&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&1\\ 0&1&2&1&1\\ 1&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0 \end{pmatrix}\end{array}$
(d) $\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\\ d\\ e \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&1&1&2 \end{pmatrix}\end{array}$
(f) $\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\\ d\\ e \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&1\\ 1&1&1&0&0\\ 1&1&1&0&0 \end{pmatrix}\end{array}$

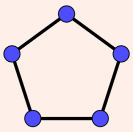
■

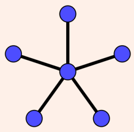
Cvičenie 4.2 Ku daným grafom napíšte maticu susednosti.

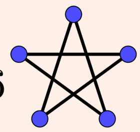
(a) G_1


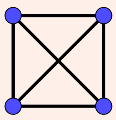
(b) G_2


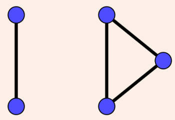
(c) G_3


(d) G_4


(e) G_5


(f) G_6


(g) G_7


(h) G_8


■

Cvičenie 4.3 Nakreslite graf daný maticou incidencie

$$\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\\ d\\ e \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_6 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&1\\ 0&1&1&0&1&0\\ 1&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&1&1 \end{pmatrix}\end{array}$$

■

Cvičenie 4.4 Napíšte matice incidencie grafov G_1 až G_7 z cvičenia 4.2. ■

Cvičenie 4.5 Napíšte matice susednosti a incidencie grafov

(a) K_4 (b) K_5 (c) C_5 (d) $K_{3,3}$ (e) $K_{2,4}$

Cvičenie 4.6 Vypočítajte druhé mocniny matíc susednosti grafov

(a) K_4 (b) K_5 (c) $K_{3,3}$ (d) $K_{2,3}$ (e) C_5

Cvičenie 4.7 Čo vieme povedať o grafe G, ak jeho matica susednosti A má tvar

(a) $A = \left(\begin{array}{c|c} \emptyset & A_1 \\ \hline A_2 & \emptyset \end{array}\right)$ (b) $A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & \emptyset \\ \hline \emptyset & A_2 \end{array}\right)$

kde $\emptyset$ označuje v príklade (a) štvorcovú nulovú maticu a A_1, A_2 označuje v príklade (b) ľubovoľné (prípustné) štvorcové matice?

Cvičenie 4.8 Čo vieme povedať o grafe G, ak jeho matica incidencie A má tvar

(a) $A = \left(\begin{array}{c|c} \emptyset & A_1 \\ \hline A_2 & \emptyset \end{array}\right)$ (b) $A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & \emptyset \\ \hline \emptyset & A_2 \end{array}\right)$

kde $\emptyset$ označuje nulovú maticu a A_1, A_2 sú ľubovoľné (prípustné) matice?

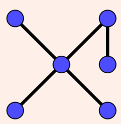
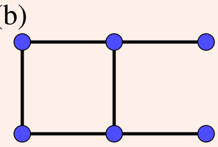
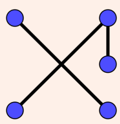
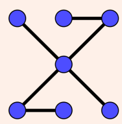
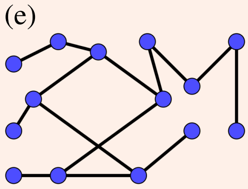
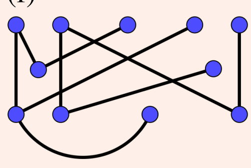
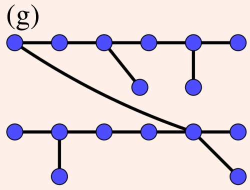
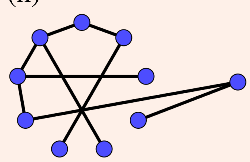
Cvičenie 4.9 Čo vieme povedať o grafe, ktorého matica incidencie má nulový riadok? Nakreslite taký graf.

Cvičenie 4.10 Majme graf $G = (V, E)$ s n vrcholmi a nech $v_i \in V$. Dokážte, že stupeň vrcholu v_i sa rovná súčtu čísel v i. riadku matice susednosti grafu G, t. j.

$$\mathrm{st}(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij},$$

kde a_{ij} je číslo v i. riadku a j. stĺpci matice susednosti grafu G.

Cvičenie 4.11 Ktoré z nasledujúcich grafov sú stromy? Zdôvodnite, prečo daný graf je, alebo nie je, strom.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

(g)

(h)


Cvičenie 4.12 Pre ktoré čísla $n \in \mathbb{N}$ je graf K_n stromom? ■

Cvičenie 4.13 Pre ktoré čísla $m, n \in \mathbb{N}$ je graf $K_{m,n}$ stromom? ■

Cvičenie 4.14 Dokážte, že jediný strom na n vrcholoch, ktorý sa dá nakresliť jedným ťahom, je cesta P_{n-1}. ■

Cvičenie 4.15 Nájdite strom, ktorý má párny počet vrcholov, ale nemá perfektné párovanie (viď definícia 4.6.5). ■

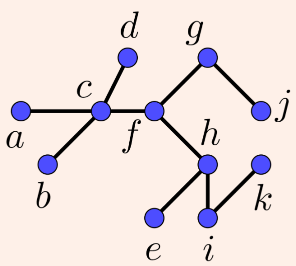
Cvičenie 4.16 Dokážte, že graf s n vrcholmi a menej než $(n-1)$ hranami nie je súvislý. ■

Cvičenie 4.17 Dokážte, že graf G je strom práve vtedy keď platí, že G je súvislý graf a vynechaním ľubovoľnej jeho hrany vznikne nesúvislý graf. ■

Cvičenie 4.18 Dokážte, že graf G je strom práve vtedy keď platí, že G je acyklický graf a pridaním ľubovoľnej hrany, pri nezmenenej množine vrcholov, vznikne cyklický graf (obsahujúci cyklus). ■

Cvičenie 4.19 Nakreslite graf G, ktorý je súvislý, má jedinú cestu medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi, ale nie je strom. Ak sa to nedá, tak dokážte, že sa to nedá. ■

Cvičenie 4.20



Na obrázku vľavo je daný strom.

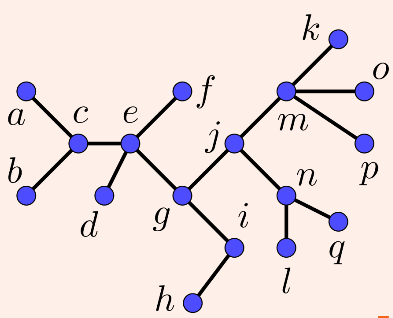
(a) Nech c je jeho koreň. Nájdite úroveň všetkých vrcholov a výšku stromu.
(b) Nech f je jeho koreň. Nájdite úroveň všetkých vrcholov a výšku stromu.
(c) Nech e je jeho koreň. Nájdite úroveň všetkých vrcholov a výšku stromu.

■

Cvičenie 4.21

Na obrázku vpravo je daný strom.

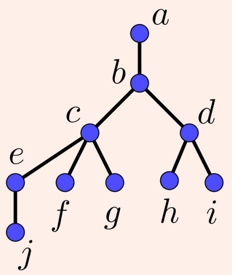
(a) Nech e je jeho koreň. Nájdite úroveň všetkých vrcholov a výšku stromu.
(b) Nech g je jeho koreň. Nájdite úroveň všetkých vrcholov a výšku stromu.
(c) Nech n je jeho koreň. Nájdite úroveň všetkých vrcholov a výšku stromu.



■

Cvičenie 4.22 Dokážte, že všetky kostry daného grafu majú rovnaký počet hrán. ■

Cvičenie 4.23



Na obrázku vľavo je daný koreňový strom. Nájdite

(a) rodičov vrcholu c,
(b) predkov vrcholu c,
(c) deti vrcholu d,
(d) potomkov vrcholu c,
(e) súrodencov vrcholu f,
(f) koncové vrcholy,
(g) podstrom s koreňom j,
(h) rodičov vrcholu h,
(i) predkov vrcholu j,
(j) deti vrcholu e,
(k) potomkov vrcholu e,
(l) súrodencov vrcholu h,
(m) vnútorné vrcholy,
(n) podstrom s koreňom e.

■

Cvičenie 4.24 Čo sa dá povedať o

(a) dvoch vrcholoch koreňového stromu, ktoré majú rovnakého otca (rodiča)?
(b) dvoch vrcholoch koreňového stromu, ktoré majú tých istých predkov?
(c) vrchole koreňového stromu, ktorý nemá žiadnych predkov?
(d) dvoch vrcholoch koreňového stromu, ktoré majú spoločného potomka?

■

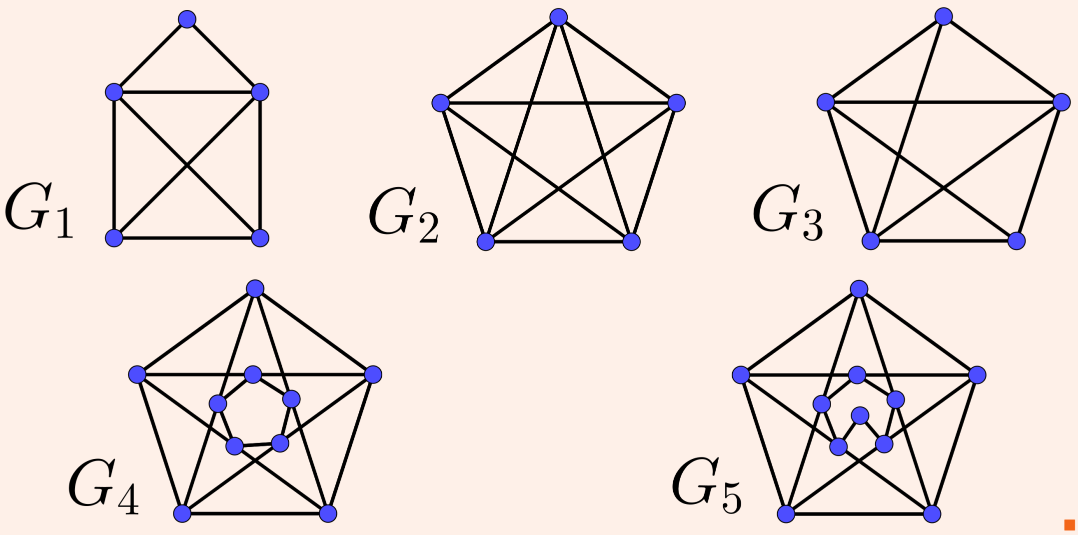
Cvičenie 4.25 Nakreslite obyčajný graf s danými vlastnosťami, alebo zdôvodnite, prečo taký graf neexistuje.

(a) Graf má 6 hrán a 8 vrcholov.
(b) Graf je acyklický, má 4 hrany a 6 vrcholov.
(c) Graf je strom a má všetky vrcholy stupňa 2.
(d) Graf je strom a má 6 vrcholov so stupňami $1, 1, 1, 1, 3, 3$.
(e) Graf je koreňový strom, má 4 vnútorné vrcholy a 6 koncových vrcholov.

■

Cvičenie 4.26 Pri každom z uvedených grafov

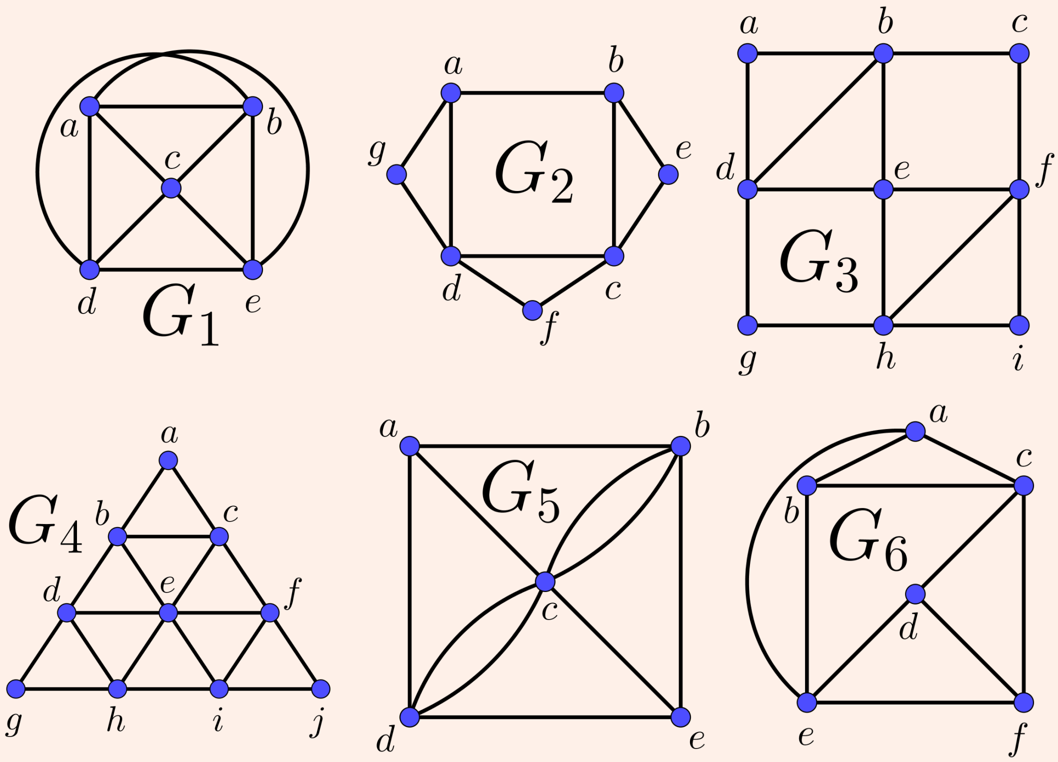
(a) rozhodnite, či daný graf má uzavretý eulerovský ťah. Ak áno, nájdite ho.
(b) rozhodnite, či daný graf má otvorený eulerovský ťah. Ak áno, nájdite ho.



■

Cvičenie 4.27 Pri každom z uvedených grafov

(a) rozhodnite, či daný graf má uzavretý eulerovský ťah. Ak áno, nájdite ho.
(b) rozhodnite, či daný graf má otvorený eulerovský ťah. Ak áno, nájdite ho.
(c) nájdite polomer a priemer daného grafu.

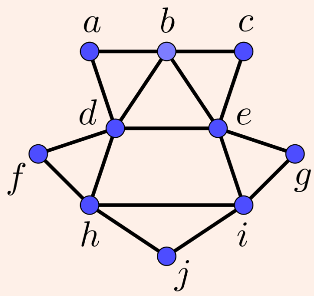


Cvičenie 4.28 Zistite pre ktoré čísla $n \in \mathbb{N}$ má graf K_n uzavretý eulerovský ťah.

Cvičenie 4.29 Zistite pre ktoré čísla $m, n \in \mathbb{N}$ má graf $K_{m,n}$ uzavretý eulerovský ťah.

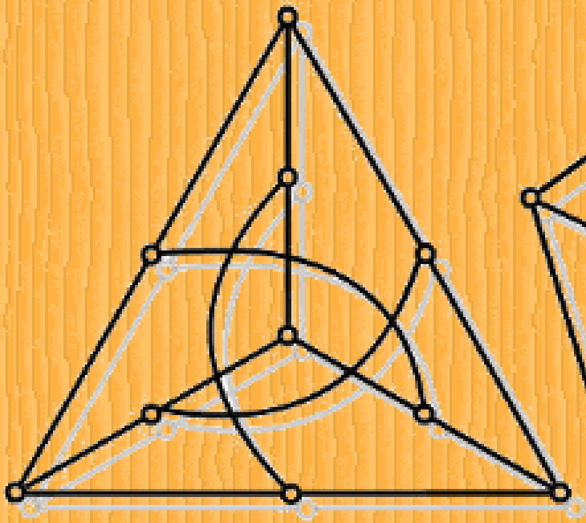
Cvičenie 4.30 Daný je graf na obrázku vpravo.

(a) Rozhodnite či daný graf má uzavretý eulerovský ťah. Ak áno, nájdite ho.
(b) Rozhodnite či daný graf má otvorený eulerovský ťah. Ak áno, nájdite ho.
(c) Nájdite polomer a priemer daného grafu.



Cvičenie 4.31 Nájdite všetky grafy, ktoré majú všetky vrcholy nepárneho stupňa a dajú sa nakresliť jedným ťahom.

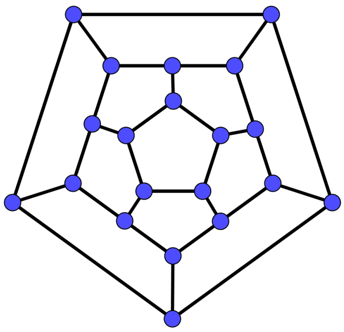
Cvičenie 4.32 V Pythone alebo v C naprogramujte test, ktorý zistí, či daný graf má uzavretý alebo otvorený eulerovský ťah..



5. Hamiltonovské cykly, izomorfizmus grafov, . . .

5.1 Hamiltonovské cykly

Problém existencie hamiltonovských cyklov[1] je tiež problémom teórie grafov, ktorý vznikol ešte v jej prvopočiatkoch ako hlavolam. V polovici 19. storočia írsky matematik Sir William Rowan Hamilton vymyslel nasledovný hlavolam. Máme dodekaéder[2], každý jeho vrchol predstavuje mesto a každá jeho hrana je cestou spájajúcou dve mestá. Úlohou je začať v niektorom meste, prejsť po cestách cez každé mesto práve raz a vrátiť sa do východzieho mesta. Tento problém je známy aj pod označením *„Problém obchodného cestujúceho"* a už samotný názov naznačuje, že má aj praktické aplikácie. Na prvý pohľad sa môže zdať, že Hamiltonov problém je podobný problému nájdenia uzavretého eulerovského ťahu v grafe. Sú to však svojou podstatou aj náročnosťou dva veľmi odlišné problémy, k čomu sa bližšie vyjadríme ďalej. Pozrime sa teraz na Hamiltonov hlavolam.

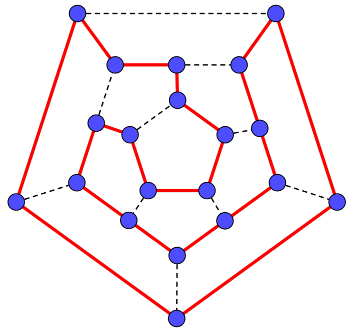


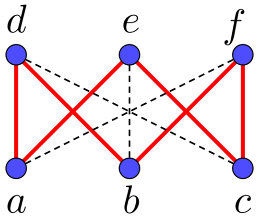
Dodekaéder môžeme reprezentovať grafom, aký vidíme na obrázku vľavo. Úloha z Hamiltonovho hlavolamu sa potom transformuje na úlohu nájdenia takého cyklu v grafe dodekaédra, ktorý obsahuje každý vrchol grafu práve raz. Takýto špeciálny typ cyklu sa nazýva *hamiltonovský* a vyskytuje v mnohých praktických aplikáciach teórie grafov. Uvedieme si jeho formálnu definíciu.

Definícia 5.1.1 — Hamiltonovský cyklus. Hamiltonovský cyklus v grafe G je taký cyklus, ktorý obsahuje všetky vrcholy grafu G.

[1] Hamiltonovské cykly sa v slovenskej a českej terminológii často nazývajú aj *hamiltonovské kružnice*.
[2] Pravidelný dvanásťsten.

Ako sa môžeme presvedčiť na obrázku vpravo, graf dodekaedra, z Hamiltonovho hlavolamu, má hamiltonovský cyklus.



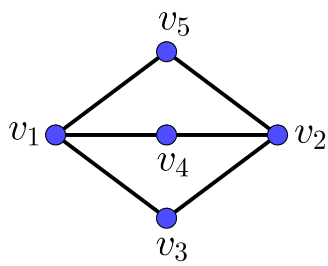


Aj kompletný bipartitný graf $K_{3,3}$, na obrázku vľavo, má hamiltonovský cyklus. Je to napríklad cyklus (a,e,c,f,b,d).

Problém nájdenia hamiltonovského cyklu v grafe, vyzerá podobne ako problém nájdenia uzavretého eulerovského ťahu v grafe. Sú však dva veľmi odlišné problémy. Napríklad ani v grafe dodekaedra, ani v bipartitnom grafe $K_{3,3}$ uzavretý eulerovský ťah neexistuje, pretože oba tieto grafy majú všetky vrcholy nepárneho stupňa. A pritom v oboch týchto grafoch hamiltonovský cyklus existuje. Už len samotný problém zistenia, či daný graf obsahuje hamiltonovský cyklus sa veľmi líši od problému, či daný graf obsahuje uzavretý eulerovský ťah. V prípade uzavretého eulerovského ťahu máme vetu 4.6.1, ktorá nám dáva jednoducho overiteľnú podmienku, či v danom grafe takýto ťah existuje alebo nie. V prípade hamiltonovského cyklu žiadna takáto jednoduchá podmienka neexistuje. Je to totiž jeden zo známych NP-úplných (čiže „veľmi ťažkých“) problémov. To znamená, že pre daný všeobecný graf, pokiaľ je dostatočne veľký, nevieme efektívne zistiť, či tento graf hamiltonovský cyklus obsahuje alebo nie. Keďže hľadanie hamiltonovských cyklov, alebo aspoň zisťovanie ich existencie, je pre mnohé praktické aplikácie kľúčové, je táto problematika intenzívne skúmaná. Existujú niektoré typy a triedy grafov, pre ktoré vieme potvrdiť alebo vylúčiť existenciu hamiltovovského cyklu. Ukážeme si to na jednoduchom príklade.

■ **Príklad 5.1**

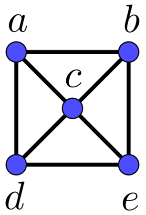
Dokážeme, že graf na obrázku vpravo nemá hamiltonovský cyklus.



Predpokladajme, že daný graf hamiltonovský cyklus obsahuje. Graf na obrázku má 5 vrcholov, a preto by jeho hamiltonovský cyklus musel mať 5 hrán, inak povedané, práve jedna jeho hrana do hamiltonovského cyklu nepatrí. Vynechajme teda z grafu hranu, ktorá nie je v hamiltonovskom cykle. Podľa definície 3.4.2 je cyklus pravidelný graf stupňa 2. Preto každý vrchol cyklu musí mať stupeň 2. Ak ale z daného grafu vynecháme krorúkoľvek (jednu) hranu, tak vždy nám vznikne vrchol, ktorý je stupňa 1. Preto daný graf nemôže mať hamiltonovský cyklus. ■

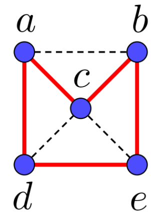
Na nasledujúcom príklade si ukážeme, že podobný argument nie vždy funguje.

■ **Príklad 5.2** Treba zistiť, či v grafe na obrázku vľavo existuje hamiltonovský cyklus.



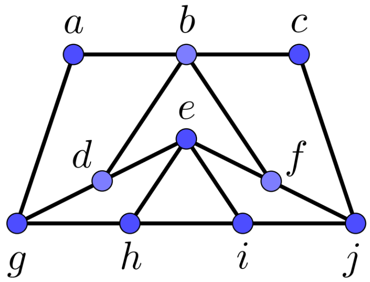
Ak by sme použili argument z predošlého príkladu, tak každý vrchol cyklu má stupeň 2, takže ak v grafe existuje hamiltonovský cyklus, musíme vynechať po jednej hrane pri vrcholoch a,b,d,e a dve hrany pri vrchole c. Spolu teda 6 hrán. Daný graf má 8 hrán a ak 6 vynecháme, tak nám zostanú 2 a to je na hamiltonovský cyklus málo. **Uvedená úvaha je však nesprávna**, pretože každá hrana inciduje s dvoma vrcholmi a na zníženie stupňov uvedených vrcholov nemusíme vynechať 6 hrán.

Na obrázku vpravo sa môžeme presvedčiť, že daný graf má hamiltonovský cyklus. Na zníženie stupňov všetkých vrcholov na 2, stačilo vynechať z grafu 3 hrany $\{a,b\}$, $\{c,d\}$ a $\{c,e\}$.



■

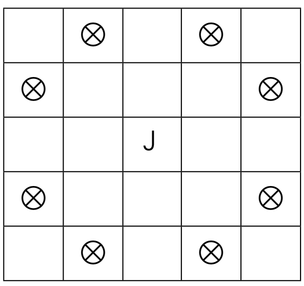
■ **Príklad 5.3** Ukážeme, že graf na obrázku vľavo nemá hamiltonovský cyklus.



Vrcholy a a c sú stupňa 2. Preto ak by daný graf mal hamiltonovský cyklus, tak hrany $\{a,b\}$, $\{a,g\}$, $\{b,c\}$ a $\{c,j\}$ by doň museli patriť. Následne by hrany $\{b,d\}$ a $\{b,f\}$ nesmeli patriť do hamiltonovského cyklu, pretože vrchol b už inciduje s hranami $\{a,b\}$ a $\{b,c\}$.

Ak ale vynecháme hrany $\{b,d\}$ a $\{b,f\}$, tak vrcholy d a f budú mať stupeň 2, a preto hrany $\{g,d\}$, $\{d,e\}$, $\{e,f\}$ a $\{f,j\}$ musia patriť do hamiltonovského cyklu. Následne by hrany $\{g,h\}$, $\{e,h\}$, $\{e,i\}$ a $\{f,j\}$ nesmeli patriť do hamiltonovského cyklu. Tým nám zostali dva vrcholy h a i, do ktorých sa už nemáme ako dostať. Takže daný graf hamiltonovský cyklus neobsahuje. ■

Ďalším veľmi známym hlavolamovým problémom, na ktorý sa dá aplikovať problém hamiltonovského cyklu v grafe, je *„problém skákania jazdca po šachovnici"*.



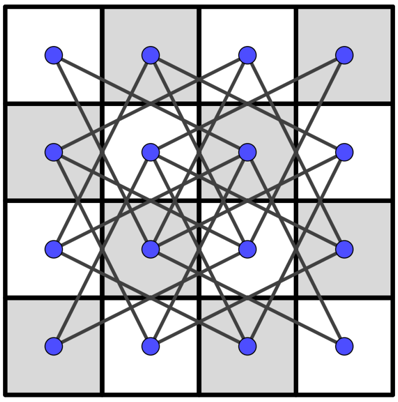
Skok jazdca na šachovnici má tvar písmena L. Znamená to, že jazdec J ide pri ťahu zo svojej pozície najskôr 2 políčka priamo a potom 1 políčko doprava, alebo doľava vzhľadom na pôvodný priamy smer. Na obrázku vľavo vidíme krížikmi vyznačené políčka, na ktoré môže skočiť jazdec umiestnený v strede.

Zadanie problému *„prechádzky jazdca po šachovnici"* je nasledovné

> *Majme šachovnicu rozmerov $n \times n$. Zistite, pre ktoré hodnoty $n \in \mathbb{N}$ môže jazdec výjsť z niektorého políčka šachovnice, prejsť celou šachovnicou tak, že každé políčko navštívi práve raz a skončí na políčku, z ktorého vyšiel. Jedine na počiatočnom = koncovom políčku svojej „prechádzky" bude stáť jazdec dvakrát.*

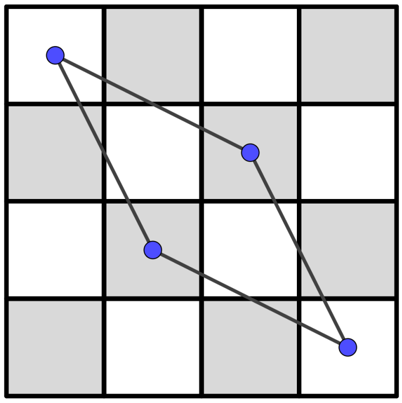
Problém prechádzky jazdca po šachovnici si môžeme modelovať grafom. Vrcholy grafu budú políčka šachovnice a dva vrcholy budú spojené hranou práve vtedy, ak môže jazdec skočiť jedným ťahom z políčka zodpovedajúcemu jednému vrcholu, na políčko zodpovedajúce druhému vrcholu.

Pre takýto graf sa zaužíval názov *Knight graph*[3] a pre šachovnicu rozmeru $n \times n$ sa Knight graf označuje KG_n.



Pre $n = 4$ vidíme graf KG_4 na obrázku vľavo. Ukážeme si, ako zistíme, či existuje hamiltonovský cyklus grafu KG_4. Predovšetkým n musí byť párne číslo. Graf KG_n je totiž bipartitný. Šachovnicu môžeme rozdeliť na biele a čierne políčka a jazdec pri každom ťahu mení farbu políčka. To znamená, že v grafe KG_n každá hrana spája dve políčka rôznej farby. Ak by existoval v grafe hamiltonovský cyklus, začínal by napríklad na bielom políčku, potom by striedal čierne a biele políčka a skončil by na pôvodnom bielom políčku. Počet hrán hamiltonovského cyklu v bipartitnom grafe musí byť párny, a preto n musí byť párne číslo.

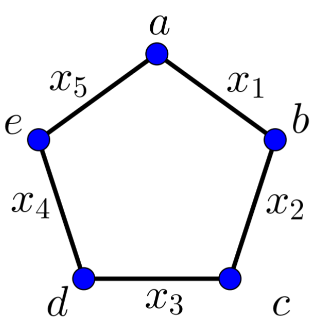
Pre $n = 2$ je šachovnica príliš malá na to, aby sa po nej mohol jazdec pohybovať. Pozrime sa preto na najbližšiu väčšiu šachovnicu pre $n = 4$. Vrcholy, zodpovedajúce rohovým políčkam šachovnice, majú stupeň 2, a preto sú hrany, s nimi incidujúce, v hamiltonovskom cykle „povinné“. Situáciu vidíme na obrázku vpravo. Dostali sme cylus a ak by sme pridávali ďalšie hrany, tak buď zvýšime stupne už nakreslených vrcholov, alebo vzniknutý graf nebude súvislý. Preto hamiltonovský cyklus v grafe KG_4 nemôže existovať. Dá sa ukázať, že graf KG_n má hamiltonovský cyklus pre každé párne číslo $n \geq 6$, avšak dôkaz je netriviálny.



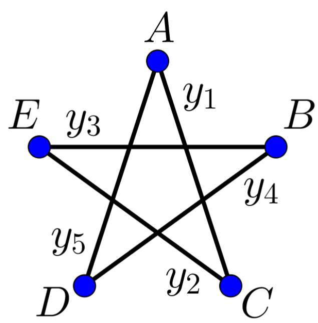
5.2 Izomorfizmus grafov

Pojem *izomorfizmu* grafov si najskôr ilustrojeme na jednoduchom príklade.

■ **Príklad 5.4** Predpokladajme, že dvaja ľudia dostanú za úlohu nakresliť graf, ktorý má 5 vrcholov spojených piatimi hranami do cyklu C_5. Títo dvaja ľudia nezávisle od seba nakreslia dva grafy, ktoré vidíme na obrázkoch 5.1 a 5.2.



Obr. 5.1: Verzia 1. človeka



Obr. 5.2: Verzia 2. človeka

Vidíme, že podmienky zadania úlohy obaja ľudia splnili a teda tieto dva grafy sú „rovnaké“, aj keď na prvý pohľad vyzerajú rôzne. Sú to dve rôzne realizácie toho istého grafu. Takéto grafy sa nazývajú *izomorfné*. ■

[3] V šachovej terminilógii knight = jazdec.

Definícia 5.2.1 — Izomorfné grafy. Majme graf $G=(V,E)$ a graf $G'=(V',E')$. Potom grafy G a G' nazývame izomorfné, ak existuje vzájomne jednoznačné zobrazenie (bijekcia) $\varphi: V \to V'$ ich vrcholových množín, ktore zachováva susednosť vrcholov a násobnosť hrán. Znamená to, že ak $u,v \in V$ a medzi týmito vrcholmi je v grafe G n hrán, tak potom medzi vrcholmi $\varphi(u)$ a $\varphi(v)$ v grafe G' je tiež práve n hrán. Takéto bijektívne zobrazenie φ sa nazýva izomorfizmus grafov G a G'.

P V definícii 5.2.1 sme použili pojem „bijekcia“, „bijektívne zobrazenie“, resp. jeho slovenský ekvivalent „vzájomne jednoznačné zobrazenie“. Na predmete *Diskrétna matematika* tento pojem bude formálne definovaný až v podkapitole 7.3, viď definícia 7.3.4 (str. 145). Je však veľmi pravdepodobné, že ste sa s ním už stretli na predmete *Matematika 1*. Pojem bijekcia, resp. bijektívne, alebo vzájomne jednoznačné, zobrazenie medzi dvoma množinami, môžeme neformálne definovať nasledovným spôsobom.

> *Každému prvku z jednej množiny prináleží práve jeden prvok z druhej množiny a rôznym prvkom jednej množiny zodpovedajú rôzne prvky druhej množiny, pričom obe uvedené vlastnosti musia platiť obojsmerne.*

Vrátime sa teraz ku príkladu 5.4 a ukážeme, že grafy z obrázkov 5.1 a 5.2 sú izomorfné. Graf z obrázku 5.1 má množinu vrcholov $V=\{a,b,c,d,e\}$ a graf z obrázku 5.2 má množinu vrcholov $V'=\{A,B,C,D,E\}$. Bijekciu $\varphi: V \to V'$ si definujeme predpisom

$$\varphi(a)=A\,,\quad \varphi(b)=C\,,\quad \varphi(c)=E\,,\quad \varphi(d)=B\,,\quad \varphi(e)=D$$

Z uvedeného predpisu je zrejmé, že φ je bijekcia medzi množinami vrcholov V a V'. Treba ešte overiť, či táto bijekcia zachováva susednosť vrcholov a násobnosť hrán. Oba grafy sú obyčajné a násobné hrany nemajú. Stačí preto overiť, že dva vrcholy grafu G sú susedné práve vtedy, ak sú susedné ich obrazy v grafe G'. Vypíšeme si všetky dvojice susedných vrcholov (hrany) grafu G a grafu G' a overíme, že zobrazenie φ je bijekcia medzi nimi.

$$\begin{array}{ccc}
\text{hrany grafu } G & & \text{hrany grafu } G' \\
x_1=\{a,b\} & \longleftrightarrow & \{A,C\}=y_1 \\
x_2=\{b,c\} & \longleftrightarrow & \{C,E\}=y_2 \\
x_3=\{c,d\} & \longleftrightarrow & \{E,B\}=y_3 \\
x_4=\{d,e\} & \longleftrightarrow & \{B,D\}=y_4 \\
x_5=\{e,a\} & \longleftrightarrow & \{D,A\}=y_5
\end{array}$$

Z uvedeného je zrejmé, že bijekcia φ susednosť vrcholov zachováva. Takže φ je izomorfizmus grafov G a G' a o týchto dvoch grafoch môžeme povedať, že sú izomorfné.
Matice susednosti uvedených dvoch grafov pri lexikografickom usporiadaní ich vrcholov sú:

$$G:\quad \begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\\ d\\ e \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0&1&0&0&1\\ 1&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&1\\ 1&0&0&1&0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad\qquad G':\quad \begin{array}{c} \\ A\\ B\\ C\\ D\\ E \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0&0&1&1&0\\ 0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&1\\ 1&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&0 \end{pmatrix} \end{array}$$

V nasledujúcej vete si ukážeme ako sa dajú izomorfné grafy charakterizovať pomocou svojich matíc susednosti.

Veta 5.2.1 — O maticiach susednosti izomorfných grafov. Grafy G a G' sú izomorfné práve vtedy, keď sa ich matice susednosti pri vhodnom usporiadaní vrcholov rovnajú.

Dôkaz: tvrdenie vety má tvar ekvivalencie, takže dokazovať ho budeme ako dve implikácie. Množinu vrcholov grafu G označme $V = \{u_i\}_{i=1}^n$ a množinu vrcholov grafu G' si označme $V' = \{v_i\}_{i=1}^n$.

$\Rightarrow$ **Ak sú grafy G a G' izomorfné, tak ich matice susednosti, pri vhodnom usporiadaní vrcholov, sa rovnajú.**
Grafy G a G' sú izomorfné práve vtedy, ak existuje bijekcia $\varphi : V \to V'$, ktorá zachováva susednosť vrcholov a násobnosť hrán. Nech má matica susednosti grafu G vrcholy usporiadané lexikograficky, t. j. $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Usporiadajme potom vrcholy matice susednosti grafu G' takto

$$\big(\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)\big) .$$

Ak je v i-tom riadku a j-tom stĺpci matice susednosti grafu G číslo n, tak to znamená, že vrcholy u_i a u_j sú v grafe G spojené n hranami. Potom ale vrcholy $\varphi(u_i)$ a $\varphi(u_j)$ v grafe G' sú tiež spojené n hranami, a preto aj v matici susednosti grafu G' bude pri zvolenom usporiadaní vrcholov v i-tom riadku a j-tom stĺpci číslo n.

$\Leftarrow$ **Ak sú matice susednosti grafov G a G', pri nejakom usporiadaní vrcholov, rovnaké, tak grafy G a G' sú izomorfné.**
Ak sú matice susednosti grafov G a G' rovnaké, tak môžeme ich vrcholy „premenovať" tak, že budú usporiadané lexikograficky. Takže bez straty všeobecnosti môžeme predpokladať, že graf G má vrcholy usporiadané $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ a graf G' má vrcholy usporiadané $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Definujme si teraz bijekciu $\varphi : V \to V'$ predpisom

$$\varphi(u_1) = v_1, \quad \varphi(u_2) = v_2, \quad \ldots, \quad \varphi(u_n) = v_n$$

Matice susednosti sú, pri zvolenom usporiadaní vrcholov, rovnaké, takže ak medzi vrcholmi u_i a u_j je v grafe G n hrán, tak aj medzi vrcholmi v_i a v_j je v grafe G' n hrán. Bijekcia φ je preto izomorfizmus grafov G a G' a tieto grafy sú izomorfné.

Q.E.D.

Vráťme sa ku grafom z obrázkov 5.1 a 5.2 z príkladu 5.4. Už vieme, že grafy G a G' sú izomorfné a izomorfizmus φ zobrazuje ich vrcholy v poradí $\varphi : (a,b,c,d,e) \to (A,C,E,B,D)$. Potom podľa vety 5.2.1, ak v maticiach susednosti usporiadame vrcholy grafu G v poradí (a,b,c,d,e) a vrcholy grafu G' v poradí (A,C,E,B,D), tak dostaneme matice

$$G: \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad G': \begin{array}{c} \\ A \\ C \\ E \\ B \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & C & E & B & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

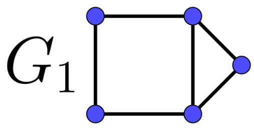
ktoré, ako vidíme, sú rovnaké.

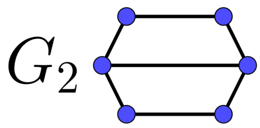
Zaujímavou úlohou je zistiť, či sú dva dané grafy izomorfné. Toto je ťažký problém a vo všeobecnosti nie je známy žiaden polynomiálny algoritmus na jeho riešenie. Na druhej strane zatiaľ ani neexistuje dôkaz toho, že by sa jednalo o NP úplný problém a pre viaceré kategórie grafov existujú polynomiálne algoritmy na riešenie tohto problému. Napríklad pre stromy je overovanie izomorfizmu veľmi jednoduché a rýchle. Ako si ukážeme neskôr v časti 11.2 (str. 217), existuje lineárny algoritmus, ktorý nám zistí, či dané dva stromy sú, alebo nie sú, izomorfné. My si tu teraz ukážeme spôsob ako sa pre dané dva grafy G_1 a G_2 dá zistiť, že izomorfné nie sú. Tento spôsob je založený na tom, že nájdeme nejakú vlastnosť grafu G_1, ktorú graf G_2 nemá, ale mal by ju mať, ak by bol izomorfný s grafom G_1. Takáto vlastnosť sa nazýva *invariant*.

Definícia 5.2.2 — Invariant. Vlastnosť P sa nazýva invariant, ak pre ľubovoľné dva izomorfné grafy G_1 a G_2 platí tvrdenie: *graf G_1 má vlastnosť P práve vtedy, keď graf G_2 má vlastnosť P.*

Z definície 5.2.1 vyplýva, že ak grafy G a G' sú izomorfné, musia mať rovnaký počet vrcholov a rovnaký počet hrán, pretože medzi ich množinami vrcholov, existuje bijekcia, ktorá zachováva susednosť vrcholov a násobnosť hrán. To znamená, že vlastnosti „mať n vrcholov“ alebo „mať p hrán“ sú, v zmysle definície 5.2.2, invarianty.

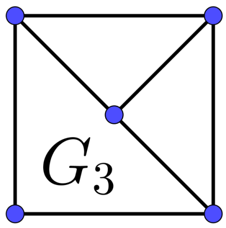
■ **Príklad 5.5** Zoberme si grafy G_1 a G_2 z nasledovných obrázkov

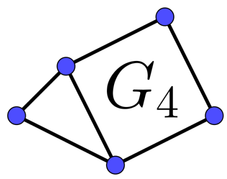




Tieto dva grafy nemôžu byť izomorfné, pretože graf G_1 má 5 vrcholov a graf G_2 má 6 vrcholov. ■

■ **Príklad 5.6** Ako ďalší príklad si vezmime nasledujúce dva grafy G_3 a G_4





Tieto dva grafy majú síce rovnaký počet vrcholov (5), ale nemôžu byť izomorfné, pretože graf G_3 má 7 hrán a graf G_4 má 6 hrán. ■

Dokážeme vetu, že aj vlastnosť *„mať rovnaký počet vrcholov rovnakých stupňov“* je invariant. Predtým si však dokážeme pomocné tvrdenie.

Lema 5.2.2 — O invariantnosti stupňa vrcholu. Nech $G = (V,E)$ a $G' = (V',E')$ sú izomorfné grafy a φ je izomorfizmus medzi nimi. Potom pre každé $u \in V$ platí $\mathrm{st}(u) = \mathrm{st}(\varphi(u))$, čiže stupeň vrcholu u je rovnaký ako stupeň jeho obrazu v izomorfnom grafe G'.

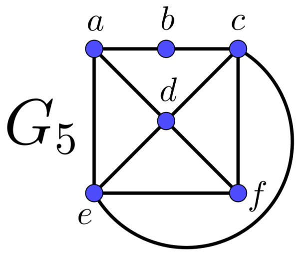
<u>Dôkaz:</u> podľa cvičenia 4.10, ak máme graf $G = (V,E)$ s n vrcholmi a jeho ľubovoľný vrchol $v_i \in V$, tak stupeň vrcholu v_i sa rovná súčtu čísel v i. riadku matice susednosti grafu G. Podľa vety 5.2.1 sú matice izomorfných grafov, pri vhodnom usporiadaní ich vrcholov, rovnaké. Preto ak máme dva izomorfné grafy, tak platí $\mathrm{st}(u) = \mathrm{st}(\varphi(u))$, kde $u \in V$ a $\varphi(u) \in V'$. Q.E.D.

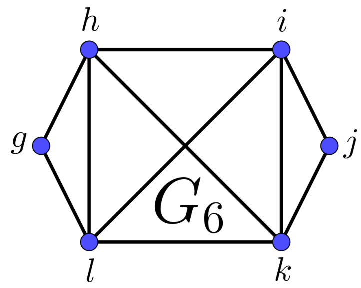
Na základe lemy 5.2.2 môžeme vysloviť tvrdenie o invariantnosti stupňov všetkých vrcholov.

Veta 5.2.3 — O invariantnosti stupňov vrcholov. Nech G a G' sú dva izomorfné grafy. Potom tieto dva grafy majú rovnaký počet vrcholov rovnakých stupňov.

<u>Dôkaz:</u> tvrdenie vety je dôsledkom lemy 5.2.2. Zapíšme si vrcholy grafu G v poradí $(u_1,\dots,u_n)$ a vrcholy grafu G' ako ich obrazy v izomorfizme, t. j. v poradí $(\varphi(u_1),\dots,\varphi(u_n))$. Podľa lemy 5.2.2 platí $\mathrm{st}(u_i) = \mathrm{st}(\varphi(u_i))$, a preto majú G a G' rovnaký počet vrcholov rovnakých stupňov. Q.E.D.

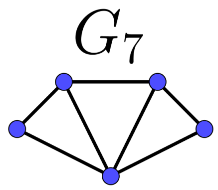
■ **Príklad 5.7** Zoberme si grafy G_5 a G_6 z nasledovných obrázkov

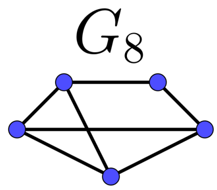




Tieto dva grafy majú rovnaký počet vrcholov (6) aj hrán (10). Nemôžu však byť izomorfné, pretože graf G_5 má stupne vrcholov $(2,3,3,4,4,4)$ a graf G_6 má stupne vrcholov $(2,2,4,4,4,4)$. ■

■ **Príklad 5.8** Pozrime sa na grafy G_7 a G_8 z nasledovných obrázkov





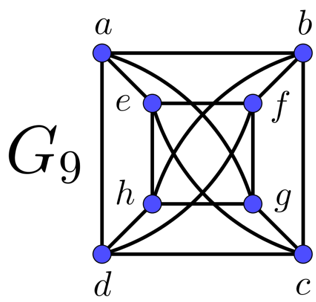
Tieto dva grafy majú rovnaký počet vrcholov (5) aj hrán (7). Nemôžu ale byť izomorfné, pretože graf G_7 má vrchol stupňa 4 a graf G_8 vrchol stupňa 4 nemá. ■

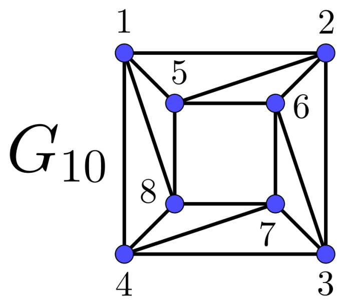
Dokážeme, že rovnako ako sú stupne vrcholov invariantom, je aj vlastnosť „mať ako podgraf cyklus dĺžky n“ invariant.

Veta 5.2.4 — O invariantnosti cyklu C_n. Nech grafy G a G' sú izomorfné. Potom graf G obsahuje ako podgraf cyklus C_n práve vtedy, keď graf G' obsahuje ako podgraf cyklus C_n.

Dôkaz: podľa definície 5.2.1 ak sú grafy $G = (V,E)$ a $G' = (V',E')$ izomorfné a $\varphi : V \to V'$ je ich izomorfizmus, tak zobrazenie φ zachováva susednosť vrcholov a násobnosť hrán. Inak povedané pre všetky $v_i, v_j \in V$ platí $\{v_i, v_i\} \in E \;\Leftrightarrow\; \{\varphi(v_i), \varphi(v_j)\} \in E'$.
Nech vrcholy $(v1, v2, \ldots, v_n)$ tvoria cyklus C_n v grafe G. Znamená to, že graf G obsahuje hrany $\{v_i, v_{i+1}\}$ pre každé $i \in \{1,2,\ldots,(n-1)\}$ a hranu $\{v_1, v_n\}$. Avšak grafy G a G' sú izomorfné, a preto graf G obsahuje uvedené hrany práve vtedy, keď graf G' obsahuje hrany $\{\varphi(v_1), \varphi(v_n)\}$ a $\{\varphi(v_i), \varphi(v_{i+1})\}$ pre každé $i \in \{1,2,\ldots,(n-1)\}$. To znamená, že vrcholy $\big(\varphi(v1), \varphi(v2), \ldots, \varphi(v_n)\big)$ tvoria cyklus C_n v grafe G'. Q.E.D.

■ **Príklad 5.9** Grafy G_9 a G_{10} z nasledovných obrázkov



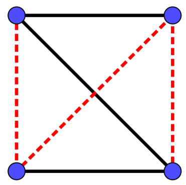


majú rovnaký počet vrcholov (8) aj hrán (16). Podľa vety 5.2.4 však nemôžu byť izomorfné, pretože graf G_{10} obsahuje cyklus C_3 (trojuholník) ale graf G_9 žiaden C_3 neobsahuje. ■

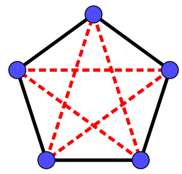
Pomocou izomorfizmu sa definuje *samokomplementárny graf*. Pojem *komplementárny graf* bol definovaný už v kapitole 3 (definícia 3.2.8, str. 53). Samokomplementárne grafy sú grafy komplementárne samé so sebou a sú zaujímavé z hľadiska mnohých aplikácií. My tu uvedieme ich formálnu definíciu a stretneme sa s nimi v cvičeniach na konci tejto kapitoly.

Definícia 5.2.3 — Samokomplementárny graf. Graf G sa nazýva samokomplementárny, ak je izomorfný s grafom $\overline{G}$.

■ **Príklad 5.10** Cesta na 4 vrcholoch (P_4) a cyklus na 5 vrcholoch (C_5) sú jednoduché príklady samokomplementárnych grafov. Vidíme ich na nasledujúcich dvoch obrázkoch. Čiernou farbou je zobrazený graf G a červenou farbou jeho komplement $\overline{G}$.

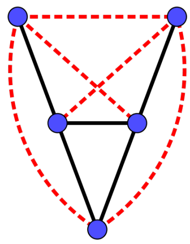


$$P_4 \simeq \overline{P_4}$$



$$C_5 \simeq \overline{C_5}$$

Iný príklad samokomplementárneho grafu je na ďalšom obrázku.

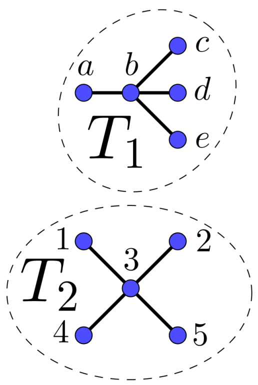


■

5.2.1 Izomorfizmus stromov

Na záver podkapitoly o izomorfizme grafov si ešte uvedieme jednu triedu grafov, pre ktoré vieme ľahko overiť či sú, alebo nie sú, dané dva grafy izomorfné. Touto triedou grafov, ako už bolo spomenuté skôr, sú stromy. Teraz si uvedieme len niekoľko príkladov a definícii a až v časti 11.2 (str. 217) sa budeme venovať rýchlym algoritmom na overovanie izomorfizmu stromov.

■ **Príklad 5.11** Sú stromy T_1 a T_2 z nasledujúceho obrázku izomorfné?



Ukážeme, že stromy T_1 a T_2 na obrázku vľavo sú izomorfné. Stačí si vziať nasledovnú bijekciu ich vrcholov

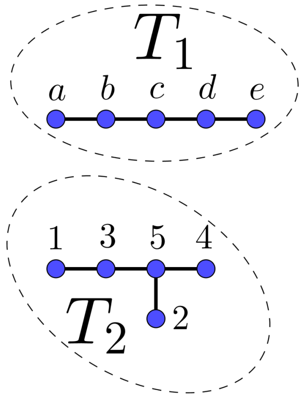
$$f(a) = 1\,, \quad f(b) = 3\,, \quad f(c) = 2\,, \quad f(d) = 4\,, \quad f(e) = 5\,.$$

Táto bijekcia zachováva susednosť vrcholov, o čom sa ľahko môžeme presvedčiť z obrázku. Preto sú stromy T_1 a T_2 izomorfné.

■

To, že dva dané stromy nie sú izomorfné, ukážeme rovnako ako pri grafoch všeobecne. Znamená to, že nájdeme nejaký invariant, ktorý jeden z daných stromov má a druhý nemá.

■ **Príklad 5.12** Sú stromy T_1 a T_2 z nasledujúceho obrázku izomorfné?



Ukážeme, že stromy T_1 a T_2 na obrázku vpravo nie sú izomorfné. Stačí si uvedomiť, že strom T_2 má vrchol stupňa 3 a strom T_1 žiaden vrchol stupňa 3 nemá.

■

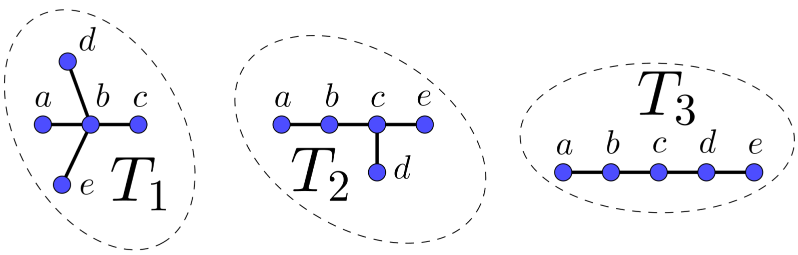
V ďalšom príklade si ukážeme koľko existuje neizomorfných stromov na 5 vrcholoch.

■ **Príklad 5.13** Koľko existuje neizomorfných stromov na 5 vrcholoch?

Riešenie: z vety 4.2.7 (strana 76) vieme, že strom na 5 vrcholoch má 4 hrany. To znamená, že žiaden vrchol nemôže mať stupeň viac než 4. Okrem toho z definície stromu vieme, že strom je súvislý graf. Takže každý vrchol musí mať stupeň aspoň 1. No a napokon, podľa vety 4.2.8 (strana 76), vieme, že každý strom s aspoň dvoma vrcholmi, má aspoň 2 vrcholy stupňa 1. Takže preberme si možnosti:

1. Strom na 5 vrcholoch má vrchol stupňa 4. V tom prípade môže mať len 1 taký vrchol, pretože vrchol stupňa 4, inciduje so 4 hranami a spolu s druhými koncovými vrcholmi týchto 4 hrán, máme spolu už 5 vrcholov. Takže takýto strom musí byť izomorfný so stromom T_1 zobrazeným na obrázku 5.3.
2. Strom na 5 vrcholoch, má vrchol stupňa 3. Potom môže mať len jeden takýto vrchol. Ak by mal aspoň dva vrcholy stupňa 3, tak súčet stupňov jeho vrcholov by bol aspoň 9 a takýto graf by mal viac než 4 hrany, čiže by to nebol strom a máme spor. Takže strom na 5 vrcholoch môže mať len jeden vrchol stupňa 3, aspoň dva vrcholy stupňa 1 (veta 4.2.8) a aby mal práve 4 hrany, musí mať ešte jeden vrchol stupňa 2. Preto takýto strom musí byť izomorfný so stromom T_2 na obrázku 5.3.
3. Ak strom na 5 vrcholoch nemá vrcholy stupňa 4, alebo 3, tak musí mať len vrcholy stupňa 1 a 2. Podľa vety 4.2.8 musí mať aspoň dva vrcholy stupňa 1. Súčet stupňov jeho vrcholov musí byť 8, aby mal graf 4 hrany, takže takýto strom na 5 vrcholoch musí mať tri vrcholy stupňa 2 a dva vrcholy stupňa 1. Takýto strom musí byť izomorfný so stromom T_3 na obrázku 5.3.

Spolu teda existujú 3 neizomorfné stromy na piatich vrcholoch.



Obr. 5.3: Všetky neizomorfné stromy na 5 vrcholoch

■

5.2.2 Izomorfizmus koreňových stromov

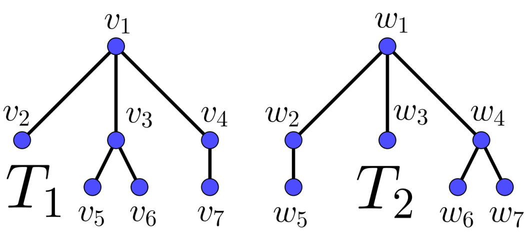
Koreňový strom sa od obyčajného stromu líši len tým, že má jeden pevne vybraný vrchol, ktorý sa nazýva koreň. Takže formálna definícia izomorfizmu koreňových stromov bude nasledovná.

Definícia 5.2.4 — Izomorfizmus koreňových stromov. Dva koreňové stromy $T_1 = (V, E)$ s koreňom $u_1 \in V$ a $T_2 = (V', E')$ s koreňom $v_1 \in V'$ sú izomorfné, ak existuje bijekcia $\varphi : V \to V'$, ktorá zachováva susednosť vrcholov a naviac platí $\varphi(u_1) = v_1$.

Izomorfizmus koreňových stromov je definovaný rovnako ako izomorfizmus stromov (grafov) rozšírený o podmienku, že bijekcia medzi vrcholovými množinami dvoch koreňových stromov musí zachovávať aj koreň. Ak porovnáme definície 5.2.1 a 5.2.4, tak vidíme, že nám vypadla podmienka zachovania násobnosti hrán. Stromy totiž násobné hrany mať nemôžu.

Takže ak sú dva koreňové stromy izomorfné, tak sa koreň jedného stromu zobrazí na koreň druhého stromu a okrem toho musí byť zachovaná susednosť vrcholov.

■ **Príklad 5.14** Sú koreňové stromy T_1 a T_2 z nasledujúceho obrázku izomorfné?



Ukážeme, že koreňové stromy T_1 a T_2 na obrázku vľavo sú izomorfné. Kedže sa jedná o koreňové stromy, izomorfizmus musí zachovať koreň. Takže $f(v_1) = w_1$. Ostatné vrcholy potom môžeme zobraziť takto

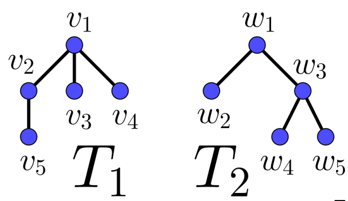
$$f(v_2) = w_3\,, \quad f(v_3) = w_4\,, \quad f(v_4) = w_2$$

$$f(v_5) = w_6\,, \quad f(v_6) = w_7\,, \quad f(v_7) = w_5\,.$$

Táto bijekcia zachováva korene stromov aj susednosť vrcholov, o čom sa ľahko môžeme presvedčiť z obrázku. Preto sú stromy T_1 a T_2 izomorfné. Okrem toho, uvedený izomorfizmus nie je jediný možný. Ak by sme prehodili $f'(v_5) = w_7$ a $f'(v_6) = w_6$, pri zachovaní zobrazení zvyšných vrcholov, tak tiež dostaneme izomorfizmus stromov T_1 a T_2. ■

■ **Príklad 5.15** Sú koreňové stromy T_1 a T_2 z nasledujúceho obrázku izomorfné?

Koreňové stromy T_1 a T_2, na obrázku vpravo, nie sú izomorfné, pretože koreň stromu T_1 má stupeň 3 a koreň stromu T_2 má stupeň len 2. Keďže stupeň, v izomorfizme si zodpovedajúcich vrcholov, je invariant, nemôžu byť tieto koreňové stromy izomorfné. Ak by sme však grafy T_1 a T_2 brali len ako stromy, čiže nie ako koreňové stromy, tak by boli izomorfné.



■

■ **Príklad 5.16** Koľko existuje neizomorfných koreňových stromov na 4 vrcholoch?

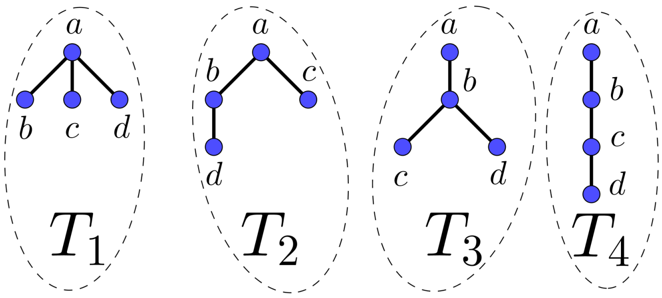
Riešenie: z vety 4.2.7 (strana 76) vieme, že strom na 4 vrcholoch má 3 hrany. To znamená, že žiaden vrchol nemôže mať stupeň viac než 3. Okrem toho strom je súvislý graf a každý vrchol musí mať stupeň aspoň 1. Naviac sa jedná o koreňový strom, takže jeden vrchol je zafixovaný a označený ako koreň stromu. Takže preberme si možnosti:

1. Koreň stromu má stupeň 3. Potom inciduje s 3 hranami a koreň, spolu s druhými koncovými vrcholmi incidujúcich hrán, nám dáva dokopy 4 vrcholy. Takže takýto strom musí byť izomorfný so stromom T_1, na obrázku 5.4.
2. Koreň stromu má stupeň 2. Potom inciduje s dvoma hranami a susedí s dvoma vrcholmi, označme si ich b a c. Chýba nám ešte 1 vrchol a tento môžeme spojiť hranou buď s vrcholom

b, alebo s vrcholom c, ale nie s oboma, pretože by vznikol cyklus. Takže výsledný strom musí byť izomorfný so stromom T_2, na obrázku 5.4.

3. Koreň stromu má stupeň 1. Potom inciduje len s jednou hranou a susedí len s jedným vrcholom. Chýbajú nám ešte ďalšie 2 vrcholy, aby výsledný strom mal 4 vrcholy. Označme si koreň stromu a a jeho syna b. Potom máme dve možnosti: buď má vrchol b dvoch synov, alebo má len jedného syna. Takže výsledný strom musí byť izomorfný buď so stromom T_3, alebo so stromom T_4 na obrázku 5.4.

Spolu teda existujú 4 neizomorfné koreňové stromy na 4 vrcholoch.



Obr. 5.4: Všetky neizomorfné koreňové stromy na 4 vrcholoch

■

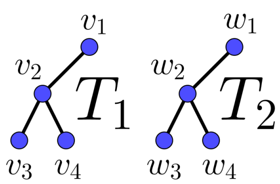
5.2.3 Izomorfizmus binárnych stromov

Binárne stromy sa od koreňových stromov líšia počtom a poradím (ľavý / pravý) synov vrcholu. Formálna definícia izomorfizmu binárnych stromov bude nasledovná.

Definícia 5.2.5 — Izomorfizmus binárnych stromov. Dva binárne stromy $T_1 = (V,E)$ s koreňom $u_1 \in V$ a $T_2 = (V',E')$ s koreňom $v_1 \in V'$ sú izomorfné, ak existuje bijekcia $\varphi : V \to V'$ zachovávajúca susednosť vrcholov, koreň (platí $\varphi(u_1) = v_1$) a poradie synov vrcholov. T. j. ak u_j je ľavý (pravý) syn vrcholu u_i, tak $\varphi(u_j)$ je ľavý (pravý) syn vrcholu $\varphi(u_i)$.

Izomorfizmus binárnych stromov je teda definovaný rovnako ako izomorfizmus koreňových stromov, rozšírený o podmienku, že izomorfizmus medzi vrcholovými množinami binárnych stromov musí zachovávať aj poradie synov vrcholov. Takže ľavý (pravý) syn vrcholu jedného stromu, sa musí zobraziť na ľavého (pravého) syna vrcholu druhého stromu. Samozrejme musí byť zachovaná aj susednosť vrcholov a koreň stromov.

■ **Príklad 5.17** Sú binárne stromy T_1 a T_2 z nasledujúceho obrázku izomorfné?



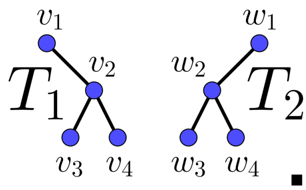
Ukážeme, že binárne stromy T_1 a T_2 na obrázku vľavo sú izomorfné. Kedže sa jedná o binárne, a teda aj koreňové, stromy, izomorfizmus musí zachovať koreň. Takže $f(v_1) = w_1$. Ostatné vrcholy potom môžeme zobraziť takto

$$f(v_2) = w_2\,,\quad f(v_3) = w_3\,,\quad f(v_4) = w_4\,.$$

Táto bijekcia zachováva korene stromov, aj susednosť vrcholov, aj poradie synov, o čom sa ľahko môžeme presvedčiť z obrázku. Preto sú stromy T_1 a T_2 izomorfné. ■

■ **Príklad 5.18** Sú binárne stromy T_1 a T_2 z nasledujúceho obrázku izomorfné?

Binárne stromy T_1 a T_2 na obrázku vpravo nie sú izomorfné, pretože koreň stromu T_1 má len pravého syna a koreň stromu T_2 má len ľavého syna. Takže nemôže existovať žiadna bijekcia, ktorá by zachovala poradie synov koreňa. Pritom ako grafy, aj ako koreňové nie binárne stromy, sú T_1 a T_2 izomorfné.



■

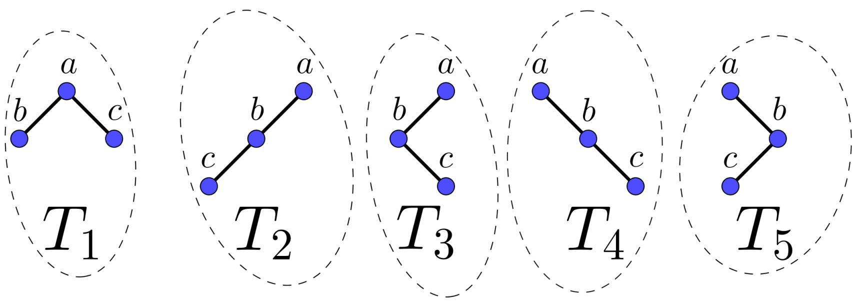
V nasledujúcom príklade si ukážeme, koľko existuje neizomorfných binárnych stromov na troch vrcholoch.

■ **Príklad 5.19** Koľko existuje neizomorfných binárnych stromov na 3 vrcholoch?

Riešenie: z vety 4.2.7 (strana 76) vieme, že strom na 3 vrcholoch má 2 hrany. To znamená, že žiaden vrchol nemôže mať stupeň viac než 2. Okrem toho strom je súvislý graf a každý vrchol musí mať stupeň aspoň 1. Naviac sa jedná o koreňový strom, takže jeden vrchol je zafixovaný a označený ako koreň stromu. Takže preberme si možnosti:

1. Koreň stromu má stupeň 2. Potom inciduje s 2 hranami a koreň, spolu s druhými koncovými vrcholmi incidujúcich hrán, nám dáva dokopy 3 vrcholy. Takže takýto strom musí byť izomorfný so stromom T_1, na obrázku 5.5.
2. Koreň stromu má stupeň 1. Potom tento vrchol má len 1 syna a tento musí mať tiež jedného syna, pretože potrebujeme spolu 3 vrcholy. Keďže sa však jedná o binárny strom, musíme v oboch úrovniach rozlišovať, či sa jedná o ľavého, alebo o pravého syna. Máme preto dokopy 4 možnosti.
   (a) Koreň má ľavého syna a ten má ľavého syna. Potom je výsledný strom izomorfný so stromom T_2, na obrázku 5.5.
   (b) Koreň má ľavého syna a ten má pravého syna. Potom je výsledný strom izomorfný so stromom T_3, na obrázku 5.5.
   (c) Koreň má pravého syna a ten má pravého syna. Potom je výsledný strom izomorfný so stromom T_4, na obrázku 5.5.
   (d) Koreň má pravého syna a ten má ľavého syna. Potom je výsledný strom izomorfný so stromom T_5, na obrázku 5.5.

Spolu teda existuje 5 neizomorfných binárnych stromov na 3 vrcholoch. Sú to stromy, ktoré vidíme na nasledujúcom obrázku.

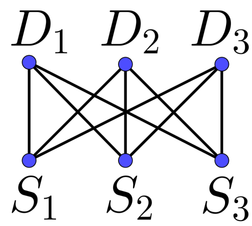


Obr. 5.5: Všetky neizomorfné binárne stromy na 3 vrcholoch

■

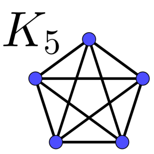
5.3 Rovinnosť grafov

Predstavme si situáciu, že máme tri domy D_1, D_2, D_3, tri studne S_1, S_2, S_3 a každý dom chceme spojiť s každou studňou cestou tak, aby sa tieto cesty nekrížili. Dá sa to? Situáciu vidíme na obrázku vpravo a jedná sa o graf $K_{3,3}$. Každý si môže skúsiť tento graf nakresliť tak, aby sa jeho hrany nekrížili (ani „mimoúrovňovo“), ale určite sa mu to nepodarí. Dôkaz, prečo je to tak, uvedieme neskôr.

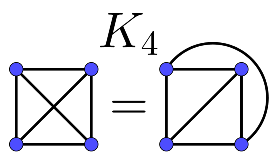


Definícia 5.3.1 — Rovinný graf. Graf G sa nazýva rovinný, ak sa dá v rovine nakresliť tak, aby sa jeho hrany nepretínali. Takémuto nakresleniu hovoríme *rovinné nakreslenie* grafu G.

P V definícii 5.3.1 sa používa bližšie nešpecifikovaný pojem „rovina“. V teórii grafov budeme týmto pojmom označovať dvojrozmerný priestor (plochu) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zodpovedajúci bežnému dvojrozmernému Euklidovskému priestoru E^2. Takejto ploche v topologickej teórii grafov zodpovedá povrch gule. Topologická teória grafov v súčasnosti intenzívne skúma problémy súvisiace s vnáraním (kreslením) grafov aj do plôch vyšších rodov (torus, . . .). Tieto napohľad „hlavolamové“ úlohy majú totiž veľmi dôležité aplikácie vo viacerých oblastiach vedy a techniky. V mikroelektronike napr. pri návrhu procesorov.



Graf $K_{3,3}$ z úvodu tejto časti teda nie je rovinný a rovnako nie je rovinný ani graf K_5 na obrázku vľavo. Tiež môžeme skúsiť nakresliť tento graf tak, aby sa jeho hrany nepretínali a nepodarí sa nám to. Rovnako ako pri grafe $K_{3,3}$ uvedieme formálny dôkaz nerovinnosti grafu K_5 neskôr. Ale napríklad graf K_4 rovinný je, ako vidíme na nasledujúcom obrázku.



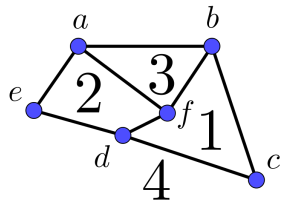
Ako vidíme, niektoré grafy rovinné sú a niektoré nie. Všimnime si, že ak nakreslíme do roviny rovinný graf, tak tento nám rovinu rozdelí na niekoľko oblastí ohraničených hranami grafu. Napríklad graf K_4, nakreslený na predošlom obrázku vpravo, rozdeľuje rovinu na 4 oblasti: dva vnútorné trojuholníky, oblasť medzi štvorcom a oblúkovou hranou a napokon celý zvyšok roviny. Teraz uvedieme formálnu definíciu niekoľkých pojmov používaných v topologickej teórii grafov.

Definícia 5.3.2 — Oblasť, hranica oblasti, susedné oblasti. Nech G je súvislý, rovinný graf nakreslený v rovine tak, že jeho hrany sa nepretínajú. Potom

- ▷ každú hranu grafu G pozdĺžne rozrežeme na polovicu a rovina, v ktorej bol graf G nakreslený, sa tým môže (ale nemusí) rozpadnúť na niekoľko častí. Maximálne súvislé časti roviny, ktoré takto dostaneme, sa nazývajú *oblasti* grafu G,
- ▷ *hranica oblasti* je cyklus idúci rozrezanými hranami grafu G po obvode príslušnej oblasti,
- ▷ dve oblasti grafu, ktorých hranice majú spoločnú hranu, nazývame *susedné oblasti*.

P V definícií 5.3.2 sme opäť použili bližšie nešpecifikovaný pojem „súvislá časť roviny“. Formálnu matematickú definíciu nebudeme uvádzať, ale tento pojem si neformálne môžeme opísať nasledovne. Ak je nejaká oblasť súvislou časťou roviny, tak z ľubovoľného jej bodu vieme ceruzkou nakresliť čiaru do ľubovoľného iného jej bodu tak, že pri kreslení nezdvihneme ceruzku z papiera a nakreslená čiara nepretne hranicu tejto oblasti.

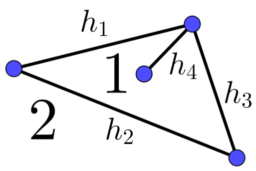
■ **Príklad 5.20**



Pozrime sa napríklad na graf, ktorý máme na obrázku vpravo. Je to rovinný graf so štyrmi oblasťami označenými $1,2,3,4$. Oblasť 1 je ohraničená cyklom (b,c,d,f), oblasť 2 je ohraničená cyklom (a,e,d,f), oblasť 3 je ohraničená cyklom (a,b,f) a nakoniec oblasť 4 je ohraničená cyklom (a,b,c,d,e). ■

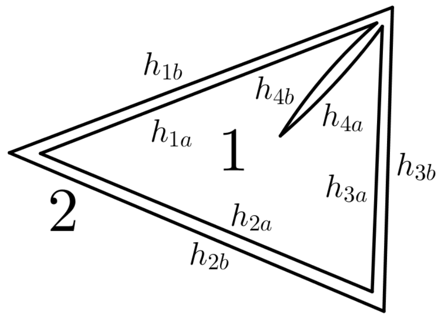
V predošlom príklade sú cykly tvoriace hranice oblastí zároveň cyklami v danom grafe. Táto situácia sa nám javí ako prirodzená a je intuitívne zrejmá. Pozrime sa však na nasledujúci príklad.

■ **Príklad 5.21**



Graf na obrázku vľavo je rovinný graf s dvoma oblasťami. Toto je ešte intuitívne zrejmé. Ale čo sú hranice týchto oblastí? Úmyselne sme v danom grafe neoznačili vrcholy, ale hrany. Podľa definície 5.3.2 dostaneme oblasti grafu tak, že každú jeho hranu pozdĺžne „rozrežeme“.

To znamená, že hrana h_i sa nám rozpadne na dve polovice, ktoré si pracovne označíme h_{ia} a h_{ib}. Výsledok vidíme na obrázku vpravo. Takže oblasť 1 je ohraničená cyklom $(h_{1a},h_{2a},h_{3a},h_{4a},h_{4b})$ a oblasť 2 je ohraničená cyklom (h_{1b},h_{2b},h_{3b}). V skutočnosti nemáme hrany h_{ia} a h_{ib}, ale len hrany h_i. Preto sú podľa definície 5.3.2 v danom grafe hrany h_1, h_2, h_3 spoločné obom oblastiam a hrana h_4 patrí len do oblasti 1.



■

Každé rovinné nakreslenie ľubovoľného rovinného grafu má minimálne jednu oblasť. V definícii 5.3.2 a v príklade 5.20 sme použili pojem *rovina*. Vo všeobecnosti sa však v teórii grafov grafy kreslia nielen do roviny, ale aj do rôznych iných *plôch* (napr. na povrch torusu). Okrem toho sa namiesto namiesto kreslenia hovorí o *vnáraní* grafov.

P V nasledujúcom texte, všade kde budeme písať o „*počte oblastí rovinného grafu G*“, alebo „*rovinný graf G má o oblastí*“, tým budeme rozumieť „*počet oblastí ľubovoľného rovinného nakreslenia grafu G*“. Vo vete 5.3.2 ukážeme, že všetky rovinné nakreslenia daného grafu majú ten istý počet oblastí.

Lema 5.3.1 Ak je graf G strom, tak je rovinný a má len 1 oblasť.

Dôkaz: to, že každý strom je rovinný graf, sa ľahko dokáže matematickou indukciou vzhľadom na počet jeho vrcholov (viď cvičenie 5.23). Fakt, že každý strom vieme nakresliť tak, že vznikne len jedna oblasť, triviálne vyplýva z definície stromu – strom je acyklický graf.

Všimnime si, že graf z príkladu 5.20 má $v=6$ vrcholov, $h=8$ hrán a $o=4$ oblastí a platí preň vzorec $v-h+o=2$. To nie je náhoda, ale dôležitý vzťah platiaci pre všetky rovinné grafy. Objavil a dokázal ho Leonhard Euler. Pre každý súvislý rovinný graf platí nasledujúca veta.

Veta 5.3.2 — Eulerova veta o rovinných grafoch. Ak G je súvislý, rovinný graf s v vrcholmi, h hranami a o oblasťami, tak platí vzťah

$$v-h+o=2.$$

Dôkaz: budeme robiť indukciou vzhľadom na počet hrán h.

1. **Overenie pre $h=0$:** súvislý graf bez hrán pozostáva len z jedného vrcholu a má len jednu oblasť. Čiže $v=1$, $h=0$ a $o=1$ a platí $v-h+o=1-0+1=2$.
2. **Indukčný krok:** predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky súvislé rovinné grafy, ktoré majú najviac $(n-1)$ hrán. Potom ukážeme, že musí platiť aj pre grafy s n hranami. Majme súvislý, rovinný graf G, ktorý má v vrcholov, $h=n$ hrán a o oblastí. Môžu nastať dva prípady
   (a) **Graf G je strom.** Potom podľa lemy 5.3.1 má len jednu oblasť a podľa lemy 4.2.4 má $h=(v-1)$ hrán a platí $v-h+o=v-(v-1)+1=v-v+1+1=2$.
   (b) **Graf G nie je strom.** Potom obsahuje cyklus a nech h_1 je hrana tohto cyklu. Táto hrana leží na hranici dvoch oblastí, ktoré sa po jej odstránení spoja do jednej. Takže odstránením hrany h_1 z grafu G dostaneme graf G', ktorého počet vrcholov, hrán a oblastí bude $v'=v$, $h'=(h-1)=(n-1)$ a $o'=(o-1)$. Podľa indukčného predpokladu pre graf G' platí tvrdenie vety, takže

$$v'-h'+o'=2=v-(h-1)+(o-1)=v-h+1+o-1 \;\Rightarrow v-h+o=2$$

Q.E.D.

Veta 5.3.2 má mnoho dôsledkov. Uvedieme si niektoré z nich.

Dôsledok 5.3.3 — 1. Dôsledok vety 5.3.2. Nech G je súvislý, rovinný graf s v vrcholmi, h hranami a o oblasťami, v ktorom sú všetky oblasti ohraničené cyklami C_n pôvodného grafu G. Potom platí

$$h=\frac{n.(v-2)}{n-2}$$

Dôkaz: ak sú všetky oblasti ohraničené cyklami C_n pôvodného grafu G, tak hrana leží na hraniciach dvoch oblastí, t. j. musí byť obsiahnutá v dvoch cykloch dĺžky n. Preto platí

$$o.n=2h \implies o=\frac{2h}{n}.$$

Dosadením o do vzťahu $v-h+o=2$ dostaneme horeuvedené tvrdenie. Q.E.D.

Dôsledok 5.3.4 — 2. Dôsledok vety 5.3.2. Nech G je obyčajný, súvislý, rovinný graf s aspoň $v\geq 3$ vrcholmi a h hranami, ktorý má maximálny možný počet hrán. Potom každá jeho oblasť je ohraničená cyklom C_3 a platí

$$h=3v-6$$

Dôkaz: ak by niektorá oblasť nebola ohraničená cyklom C_3, mohli by sme pridať ďalšiu hranu bez toho, aby sme porušili rovinnosť grafu. Overenie tohto tvrdenia prenechávame na čitateľa. To by bol ale spor s predpokladom, že G má maximálny možný počet hrán. Takže v grafe G je každá oblasť ohraničená cyklom C_3 a dosadením $n=3$, do vzťahu z dôsledku 5.3.3, dostaneme vyššieuvedené tvrdenie. Q.E.D.

Dôsledok 5.3.5 — 3. Dôsledok vety 5.3.2. Nech G je súvislý, rovinný graf s v vrcholmi a h hranami, ktorý má všetky oblasti ohraničené cyklami C_4 pôvodného grafu G. Potom platí

$$h = 2v - 4$$

Dôkaz: Toto je len špeciálny prípad dôsledku 5.3.3 pre $n = 4$ a niet čo dokazovať. Q.E.D.

Pomocou uvedených dôsledkov už vieme dokázať, že grafy K_5 a $K_{3,3}$, spomínané za definíciou 5.3.1, nie sú rovinné.

Dôsledok 5.3.6 — O nerovinnosti grafov K_5 a $K_{3,3}$. Grafy K_5 a $K_{3,3}$ nie sú rovinné.

Dôkaz:

K_5 – Graf K_5 je obyčajný a kompletný takže má maximálny možný počet hrán. Počet jeho hrán je $h = \binom{5}{2} = 10$. Ak by bol rovinný, tak by, podľa dôsledku 5.3.4, musel mať $3v - 6 = 3.5 - 6 = 9 < 10$ hrán, čím dostávame spor. Takže graf K_5 nie je rovinný. Q.E.D.

$K_{3,3}$ – Graf $K_{3,3}$ neobsahuje cykly C_3 ani žiadne iné cykly nepárnej dĺžky. Preto, ak by je rovinný, nemôže mať viac než $2v - 4 = 2.6 - 4 = 8$ hrán (viď dôsledok 5.3.5 a cvičenie 5.24). Graf $K_{3,3}$ má však $h = 9 > 8$ hrán, čím dostávame spor. Preto graf $K_{3,3}$ nie je rovinný. Q.E.D.

Ďalším pekným a dôležitým dôsledkom Eulerovej vety 5.3.2, je nasledujúca veta.

Veta 5.3.7 — O stupňoch vrcholov rovinného grafu. Každý obyčajný, súvislý, rovinný graf G s aspoň $v \geq 2$ vrcholmi má aspoň dva vrcholy stupňa nanajvýš 5.

Dôkaz: Predpokladajme, že graf G má aspoň $(v - 1)$ vrcholov stupňa väčšieho než 5. Potom, podľa vety 3.2.1, platí

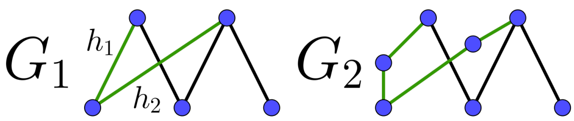
$$h = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{v} \mathrm{st}\,(u_i) \geq \frac{1}{2}(v-1).6 = 3(v-1) = 3v - 3\,.$$

Dostali sme nerovnosť $h \geq 3v - 3$, ktorá je v spore s dôsledkom 5.3.4. Predpoklad bol preto nesprávny a graf G musí mať aspoň dva vrcholy stupňa nanajvýš 5. Q.E.D.

V dôsledku 5.3.6 sme ukázali, že grafy K_5 a $K_{3,3}$ nie sú rovinné. Poľský matematik Kazimierz Kuratowski v roku 1930 dokázal, že pomocou týchto dvoch grafov sa dajú charakterizovať všetky rovinné grafy. Skôr než sformulujeme Kuratowského vetu, potrebujeme definovať pojmy *subdivízia hrany* a *homeomorfné grafy*.

Definícia 5.3.3 — Subdivízia hrany. Operácia nahradenia ľubovoľnej hrany grafu G cestou ľubovoľnej dĺžky sa nazýva subdivízia hrany.

■ **Príklad 5.22**

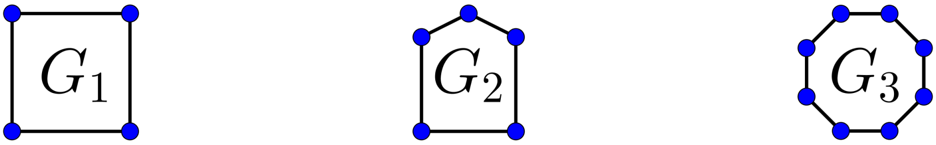


Na obrázku vľavo, máme dané dva grafy G_1 a G_2. Graf G_2 sme z grafu G_1 dostali subdivíziou vyznačených hrán h_1 a h_2. ■

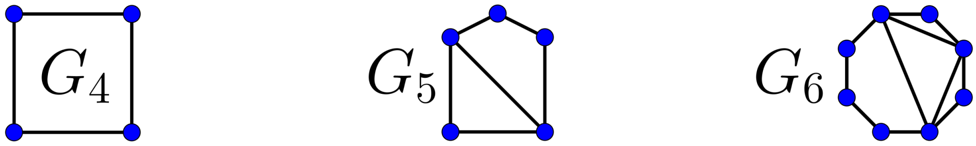
Definícia 5.3.4 — Homeomorfné grafy. Grafy G_1 a G_2 sú homeomorfné, ak existuje graf G, z ktorého vieme dostať graf G_1, aj graf G_2, konečnou postupnosťou subdivízií hrán.

Príklad 5.23 Podľa definície 5.3.4 sú grafy G_1 a G_2 z príkladu 5.22 homeomorfné, pretože graf G_2 dostaneme z grafu G_1 subdivíziou dvoch jeho hrán. ■

Príklad 5.24 Grafy G_1, G_2 a G_3, na nasledujúcom obrázku, sú navzájom homeomorfné



Ale žiadne dva z grafov G_4, G_5 a G_6, na ďalšom obrázku, nie sú homeomorfné.



■

Veta 5.3.8 — Kuratowského veta. Graf G je rovinný práve vtedy, keď neobsahuje podgraf homeomorfný s grafom K_5 alebo $K_{3,3}$.

Dôkaz Kuratowského vety presahuje rámec náplne predmetu *Diskrétna matematika*, a preto ho nebudeme uvádzať.

5.4 Katalóg špeciálnych grafov

V tejto časti uvedieme niekoľko špeciálnych grafov, pričom slovo *„špeciálny"* v tomto prípade znamená len to, že tieto grafy majú v literatúre svoje zaužívané mená a často aj zaužívané označenia. Niektoré špeciálne grafy, ako sú kompletný graf, kompletný bipartitný graf, cyklus a cesta, už boli spomenuté skôr, ďalšie budú nové.

5.4.1 Kompletný graf (K_n)

Kompletný graf bol definovaný na strane 52. Pripomíname, že kompletný graf na n vrcholoch sa označuje K_n a je to obyčajný graf s n vrcholmi, ktorý obsahuje hranu medzi ľubovoľnými dvoma rôznymi vrcholmi.

5.4.2 Kompletný bipartitný graf ($K_{m,n}$)

Kompletný bipartitný graf bol definovaný na strane 54. Označujeme ho $K_{m,n}$ a je to obyčajný bipartitný graf s dvoma partíciami m a n vrcholov, pričom každý vrchol jednej partície susedí s každým vrcholom druhej partície.

5.4.3 Cesta (P_n)

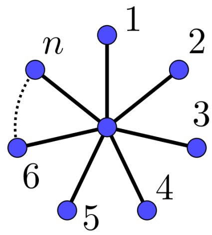
Cesta bola definovaná na strane 55, avšak bez uvedenia označenia. Cesta je sled, v ktorom sa žiaden vrchol neopakuje. Označenie P_n budeme používať pre cestu dĺžky n, čiže pre cestu s n hranami a $n+1$ vrcholmi.

5.4.4 Cyklus (C_n)

Cyklus bol definovaný na strane 57. Cyklus C_n je súvislý pravidelný graf stupňa 2 na n vrcholoch.

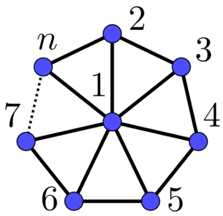
5.4.5 Hviezda (S_n)

Hviezda[4] S_n je úplný bipartitný graf $K_{1,n}$. Označenie S_n nie je úplne jednotné. Najčastejšie S_n označuje graf na $n+1$ vrcholoch, t. j. jeden centrálny vrchol a n vrcholov s ním spojených, tak ako je to vidno na obrázku vpravo. Niektorí autori však do čísla n zahŕňajú aj centrálny vrchol, takže S_n u nich označuje graf na n vrcholoch. A napokon v kapitole 3 na strane 62 používame označenie S_n pre kostru grafu (odvodené od slova *skeleton*). Takže pri označení S_n si je potrebné z kontextu overiť, o aký graf sa jedná.



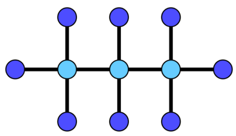
5.4.6 Koleso (W_n)

Koleso[5] *(Wheel)* W_n je graf, ktorý má jeden centrálny vrchol a tento je spojený so všetkými vrcholmi cyklu C_{n-1}. Príklad kolesa W_n vidíme na obrázku vľavo. Na rozdiel od hviezdy sa pri označovaní kolesa centrálny vrchol započítava do n. Takže koleso W_n je vždy graf na n vrcholoch. Koleso je typ grafu, ktorý má viaceré vlastnosti zaujímavé z hľadiska aplikácií. Tieto vlastnosti súvisia napr. s rovinnosťou, ale aj s farbením grafov, ktorým sa my na predmete *Diskrétna matematika* nezaoberáme.

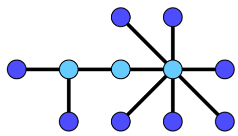


5.4.7 Húsenica

Húsenica[6] je graf, ktorý je zaujímavý z hľadiska aplikácií. Húsenica je strom, z ktorého po odstránení všetkých listov zostane len cesta. Na obrázkoch nižšie je táto cesta vyznačená svetlejšie modrou farbou. Niekedy sa za húsenicu považuje len taký strom, z ktorého po odstránení všetkých listov zostane cesta a naviac všetky vrcholy tejto cesty, ktoré nie sú jej listy, majú stupeň 0 alebo 2. Príklady húseníc sú na obrázkoch 5.6 a 5.7. Húsenicu, v ktorej z každého vrcholu svetlo-modrej cesty vychádzajú najviac 3 listy, budeme pracovne nazývať „obyčajná húsenica“. Vo všeobecnosti môže húsenica vyzerať aj tak, ako to vidno na obrázku 5.7.



Obr. 5.6: „Obyčajná“ húsenica

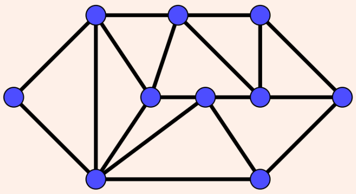


Obr. 5.7: Húsenica

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Star_(graph_theory)
[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Wheel_graph
[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Caterpillar_tree

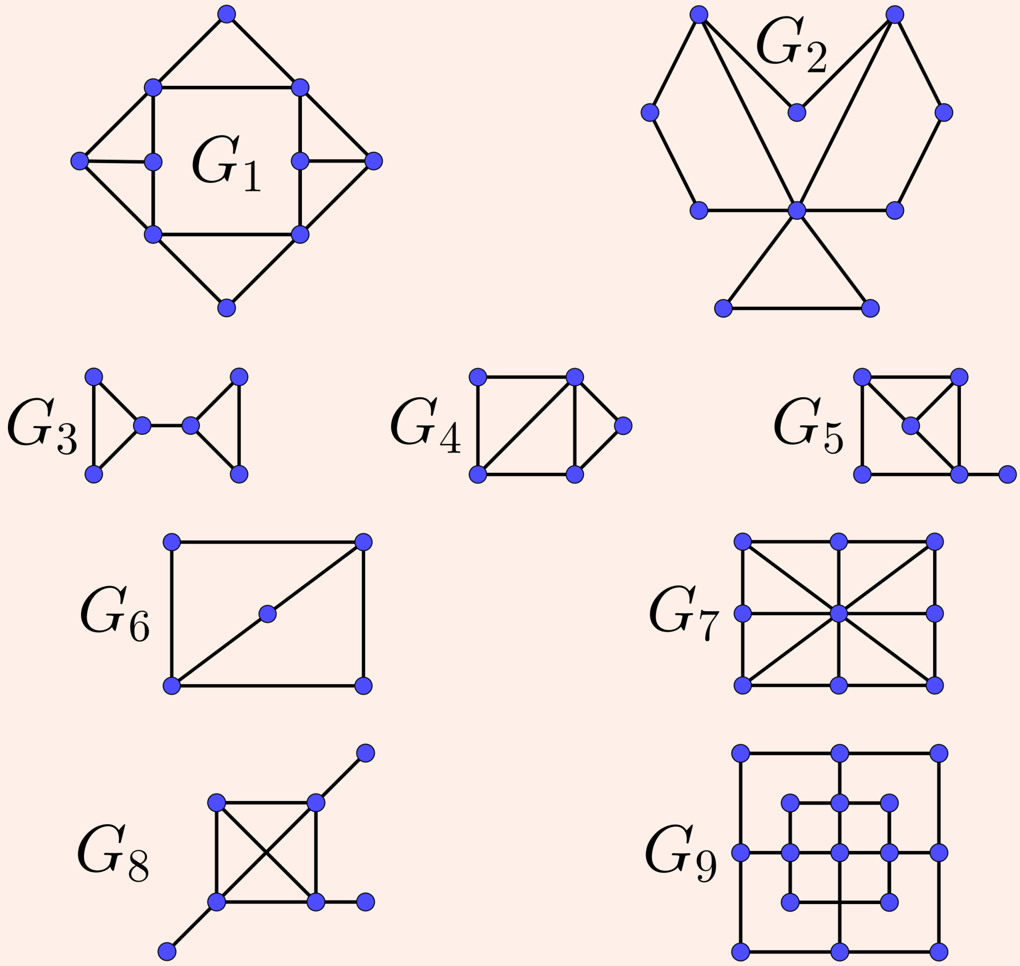
5.5 Cvičenia

Cvičenie 5.1



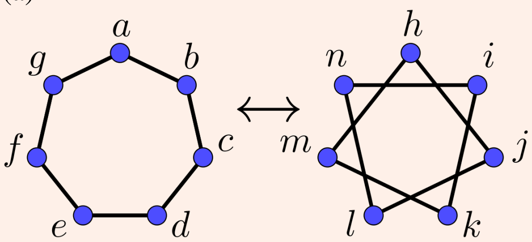
Nájdite hamiltonovský cyklus v grafe na obrázku vľavo.

Cvičenie 5.2 Zistite, či dané grafy majú hamiltonovský cyklus

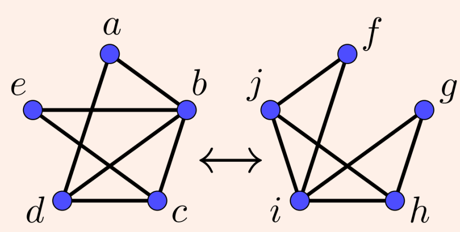


Cvičenie 5.3 Zistite či dané dvojice grafov sú izomorfné a ak sú, nájdite ich izomorfizmus.

(a)

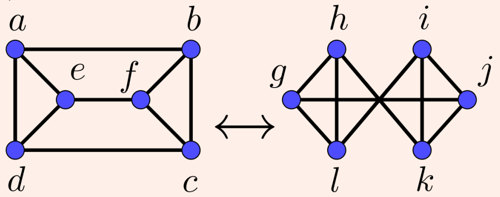


(b)

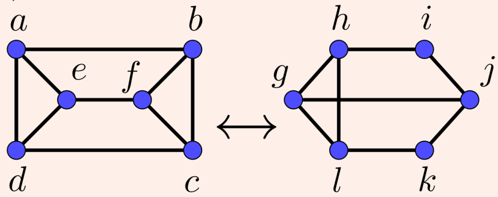


Cvičenie 5.4 Zistite, či dané dvojice grafov sú izomorfné a ak sú, nájdite ich izomorfizmus.

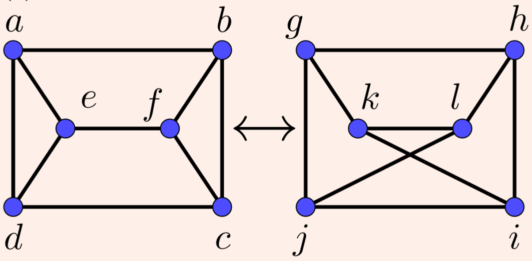
(a)



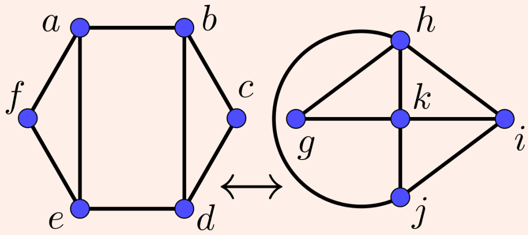
(b)



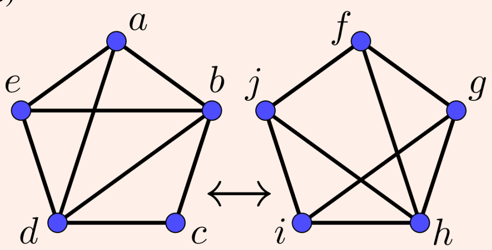
(c)



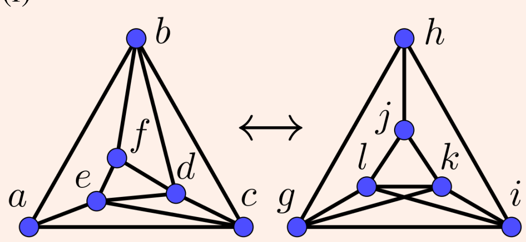
(d)



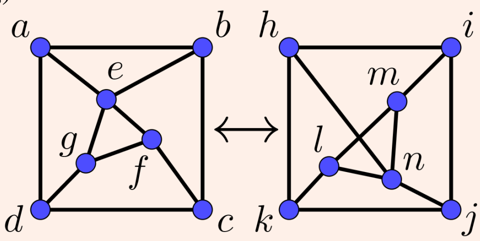
(e)



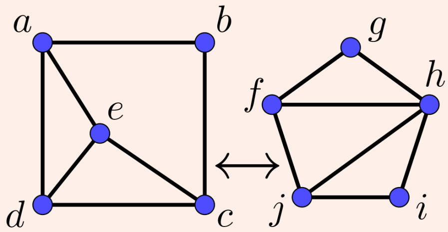
(f)



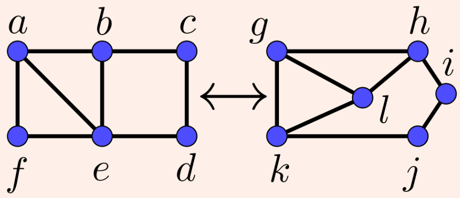
(g)



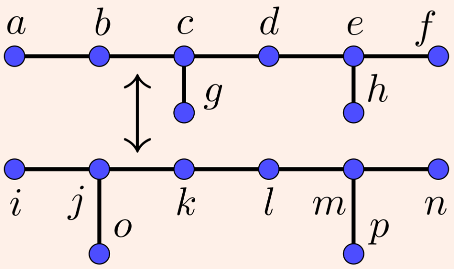
(h)



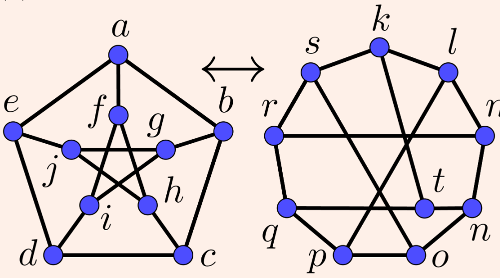
(i)



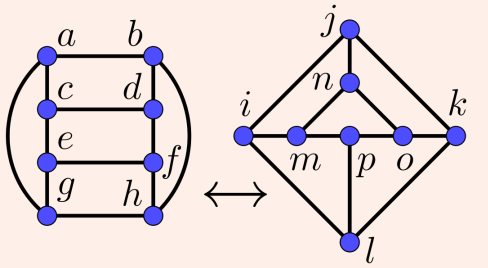
(j)



(k)



(l)



Cvičenie 5.5 Rozhodnite a zdôvodnite, či daná vlastnosť je invariant

(a) mať C_k,
(b) mať n vrcholov stupňa k,
(c) byť súvislý,
(d) byť nesúvislý,
(e) mať n cyklov C_k,
(f) mať k komponentov,
(g) mať uzavretý eulerovský ťah,
(h) byť bipartitný,
(i) mať hranu $\{u,v\}$, pričom $\mathrm{st}(u) = i$ a $\mathrm{st}(v) = j$.

Cvičenie 5.6 Nájdite nejakú vlastnosť, ktorá je invariant a dokážte, že je invariantom.

Cvičenie 5.7 Nájdite

(a) všetky neizomorfné obyčajné grafy na 3 vrcholoch a zistite, koľko z nich je súvislých,
(b) všetky neizomorfné obyčajné grafy na 4 vrcholoch a zistite, koľko z nich je súvislých,
(c) všetky neizomorfné obyčajné grafy na 5 vrcholoch a zistite, koľko z nich je súvislých,
(d) všetky neizomorfné obyčajné grafy, ktoré majú 6 vrcholov a 4 hrany.

Cvičenie 5.8 Nájdite samokomplementárny graf s aspoň dvoma vrcholmi rôznych stupňov.

Cvičenie 5.9 Dokážte, že ak existuje samokomplementárny graf na n vrcholoch, tak n dáva po delení 4 zvyšok 0 alebo 1.

Cvičenie 5.10 Dokážte, že existuje maximálne 4^n navzájom neizomorfných stromov na n vrcholoch.

Cvičenie 5.11 Nakreslite graf s danými vlastnosťami alebo zdôvodnite, prečo neexistuje

(a) úplný binárny strom so 4 vnútornými a 5 koncovými vrcholmi,
(b) úplný binárny strom s výškou 3 a 9 koncovými vrcholmi,
(c) úplný binárny strom s výškou 4 a 9 koncovými vrcholmi.

Cvičenie 5.12 Nájdite všetky neizomorfné

(a) stromy s 3 vrcholmi,
(b) stromy so 4 vrcholmi,
(c) stromy so 6 vrcholmi,
(d) koreňové stromy s 3 vrcholmi,
(e) koreňové stromy s 5 vrcholmi,
(f) binárne stromy s 2 vrcholmi,
(g) binárne stromy s 4 vrcholmi,
(h) binárne stromy so 5 vrcholmi.

Cvičenie 5.13 Nech $T = (V,E)$ je strom. Dokážte, že pre ľubovoľné jeho dva vrcholy $u, v \in V$, ktoré nie sú listy, existuje list $l \in V$ taký, že najkratšia cesta z vrcholu u do listu l, vedie cez vrchol v.

Cvičenie 5.14 Nech T je strom. Dokážte, že každý jeho vrchol nadobúda svoju excentricitu v niektorom liste stromu T.

Cvičenie 5.15 Nájdite všetky navzájom neizomorfné pravidelné obyčajné grafy stupňa 3 na ôsmich vrcholoch. Koľko z nich je nesúvislých? ■

Cvičenie 5.16 Dokážte, že ak G je obyčajný rovinný graf s v vrcholmi, h hranami, o oblasťami a k komponentami, tak platí

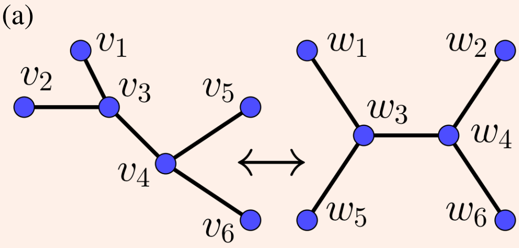
$$v - h + o = 1 + k$$

■

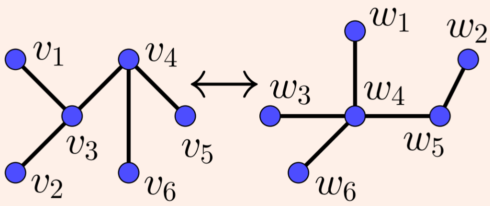
Cvičenie 5.17 Koľko rôznych navzájom neizomorfných kostier má graf K_5? ■

Cvičenie 5.18 O každom z daných párov stromov rozhodnite, či sú tieto stromy izomorfné. Ak sú, nájdite izomorfizmus, ak nie sú, nájdite invariant, ktorý jeden strom spĺňa a druhý nie.

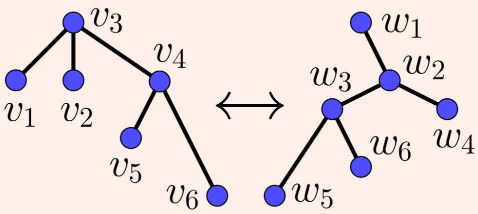
(a)



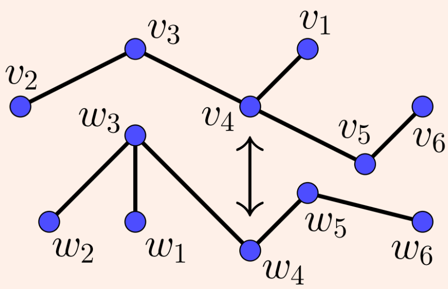
(b)



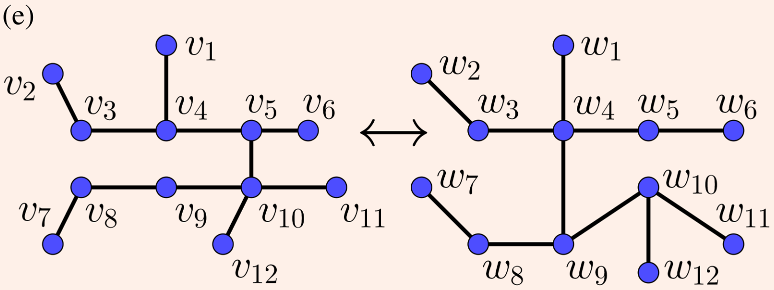
(c)



(d)



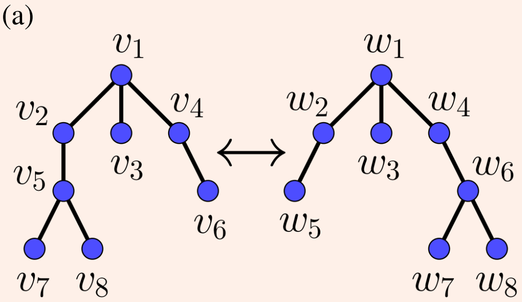
(e)



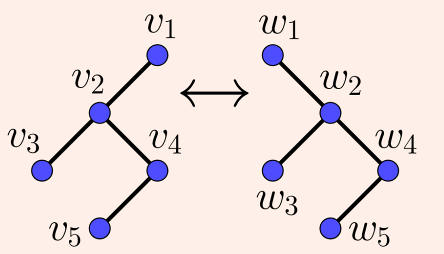
■

Cvičenie 5.19 O každom z daných párov koreňových stromov rozhodnite, či sú tieto koreňové stromy izomorfné. Ak sú, nájdite izomorfizmus, ak nie sú, nájdite invariant, ktorý jeden strom spĺňa a druhý nie.

(a)



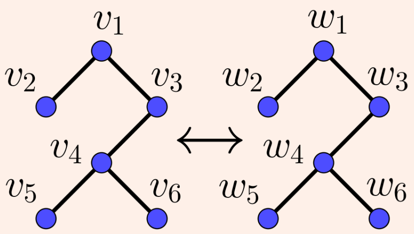
(b)



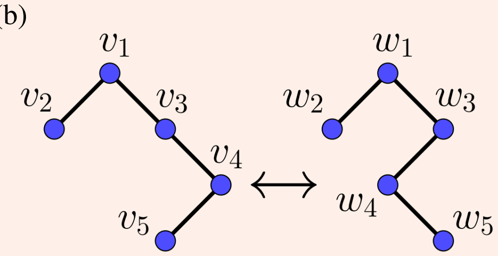
(c) Grafy z cvičenia 5.18 (c), brané ako koreňové stromy s koreňmi v_3 a w_1.

Cvičenie 5.20 O každom z daných párov binárnych stromov rozhodnite, či sú izomorfné. Ak sú, nájdite izomorfizmus, ak nie sú, nájdite invariant, ktorý jeden strom spĺňa a druhý nie.

(a)



(b)

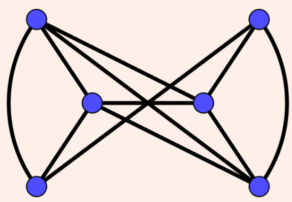


(c) Grafy z cvičenia 5.19 (b), brané ako binárne stromy.

Cvičenie 5.21 Nech Q_n je graf, ktorého množinu vrcholov tvoria všetky n-ciferné binárne čísla. Dva jeho vrcholy sú spojené hranou práve vtedy, keď sa príslušné čísla líšia práve v 1 bite.

(a) Koľko vrcholov a koľko hrán má graf Q_n pre dané $n \in \mathbb{N}$?
(b) Aké sú stupne vrcholov v grafe Q_n?
(c) Nakreslite graf Q_n pre $n \in \{1,2,3,4\}$.
(d) Napíšte matice susednosti a incidencie grafu Q_n pre $n \in \{1,2,3\}$.
(e) Má Q_n hamiltonovský cyklus pre každé $n \in \mathbb{N}$?
(f) Aký priemer má graf Q_n pre dané $n \in \mathbb{N}$?

Cvičenie 5.22 Dokážte, že graf na obrázku nižšie nie je rovinný.



Cvičenie 5.23 Dokážte, že každý strom je rovinný graf. ■

Cvičenie 5.24 Dokážte, že ak súvislý, obyčajný, rovinný graf G s v vrcholmi neobsahuje oblasť ohraničenú nepárnym cyklom, tak má maximálne $h = 2v - 4$ hrán. ■

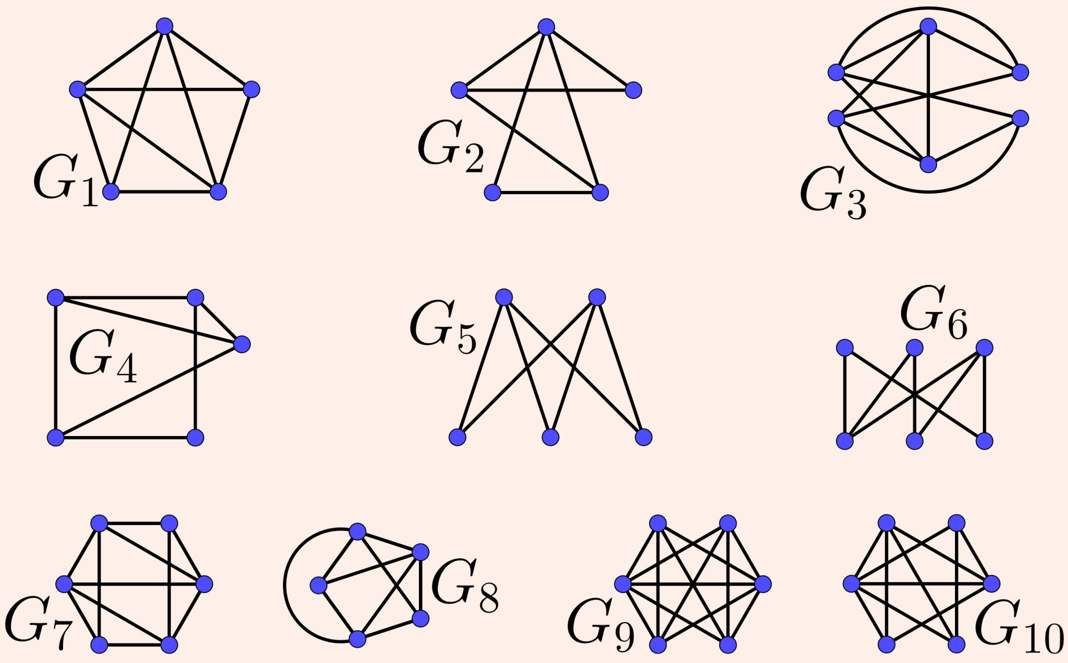
Cvičenie 5.25 Dokážte, že súvislý, rovinný, graf G s v vrcholmi, ktorý neobsahuje oblasť ohraničenú cyklom menším než C_4, má maximálne $h = 2v - 4$ hrán. ■

Cvičenie 5.26 Nakreslite obyčajný, súvislý, rovinný graf s v vrcholmi, ktorý má všetky oblasti ohraničené cyklami C_3 pre

(a) $v = 3$
(b) $v = 4$
(c) $v = 5$
(d) $v = 6$
(e) $v = 7$
(f) $v = 8$ ■

Cvičenie 5.27 Nakreslite obyčajný, súvislý, rovinný graf s $v = 7$ vrcholmi, ktorého všetky oblasti sú ohraničené cyklami C_4. Koľko má tento graf hrán? ■

Cvičenie 5.28 Pre každý z uvedených grafov rozhodnite, či je rovinný. Ak je rovinný, nakreslite ho tak, aby sa jeho hrany nepretínali. Ak rovinný nie je, tak to dokážte.



■

Cvičenie 5.29 Nakreslite obyčajný, súvislý, rovinný graf s $v = 5$ vrcholmi, ktorý má $h = 6$ hrán. Koľko má tento graf oblastí a akými cyklami sú tieto oblasti ohraničené? ■

Cvičenie 5.30 Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $v \geq 4$ existuje rovinný graf s v vrcholmi, ktorý má všetky oblasti ohraničené cyklami C_4. ■

Časť druhá

6 Binárne relácie, ich vlastnosti a reprezentácia . . . 123
6.1 Binárne relácie
6.2 Vlastnosti relácií
6.3 Operácie s reláciami
6.4 Maticová reprezentácia binárnych relácií
6.5 Cvičenia

7 Čiastočné usporiadanie, ekvivalencie, funkcie . . . 137
7.1 Čiastočné usporiadanie
7.2 Rozklad množín a relácia ekvivalencie
7.3 Funkcie
7.4 Cvičenia

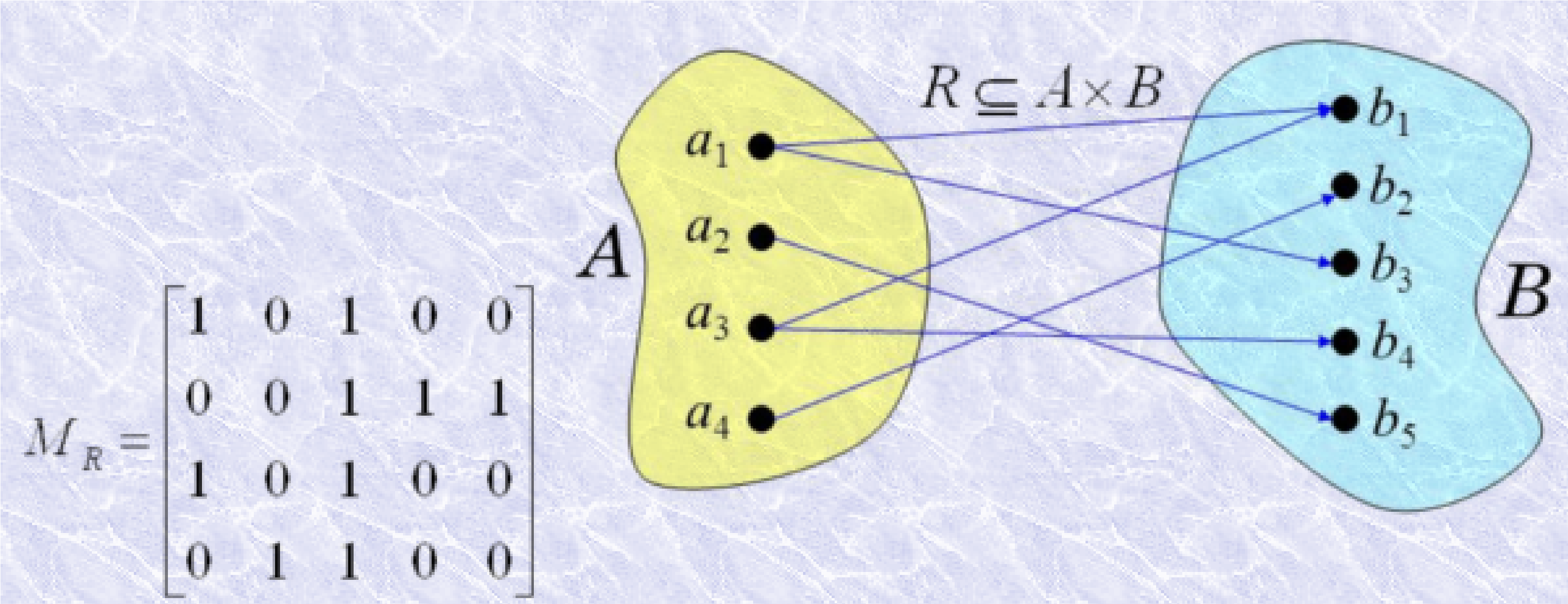
8 Vytvárajúce funkcie . . . 155
8.1 Úvod
8.2 Operácie s vytvárajúcimi funkciami
8.3 Príklady použitia vytvárajúcich funkcií
8.4 Cvičenia

9 Prehľadávanie grafov . . . 179
9.1 Úvod
9.2 Prehľadávanie grafu
9.3 Prehľadávanie grafu do šírky
9.4 Prehľadávanie grafu do hĺbky
9.5 Dôkaz korektnosti algoritmov prehľadávania do šírky a do hĺbky
9.6 Cvičenia

10 Minimálne kostry, Huffmanov kód . . . 195
10.1 Ohodnotený graf
10.2 Minimálne kostry
10.3 Huffmanov kód
10.4 Cvičenia

11 Binárne stromy, izomorfizmus stromov, hra NIM . . . 213
11.1 Prehľadávacie binárne stromy
11.2 Izomorfizmus stromov
11.3 Hra NIM
11.4 Cvičenia

12 Dijkstrov algoritmus, Prüferov kód . . . 229
12.1 Hľadanie najlacnejšej cesty Dijkstrovým algoritmom
12.2 Problém obchodného cestujúceho
12.3 Prüferov kód
12.4 Cvičenia



6. Binárne relácie, ich vlastnosti a reprezentácia

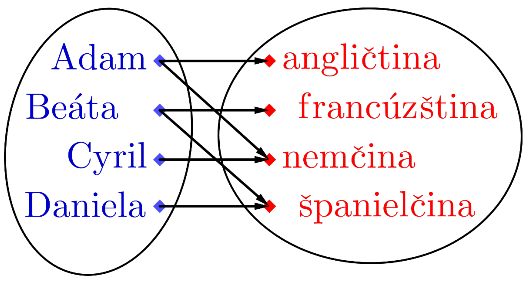
Relácia popisuje / vyjadruje vzťah medzi množinami. Vo všeobecnosti to môže byť n množín. V takom prípade hovoríme o n-árnej relácii. Nás ale budú zaujímať prevažne vzťahy medzi dvoma množinami a vtedy hovoríme o binárnej relácii. Binárne aj n-árne relácie slúžia na vyjadrovanie vzťahov medzi objektami reálneho života, pri ich popisovaní jazykom matematiky.

6.1 Binárne relácie

Ako už bolo spomenuté v úvode, binárne relácie vyjadrujú vzťah medzi dvoma množinami. Ilustrujeme si to na jednoduchom príklade.

■ **Príklad 6.1** V jazykovej škole Adam študuje angličtinu a nemčinu, Beáta francúzštinu a španielčinu, Cyril francúzštinu a Daniela španielčinu. Máme teda množinu študentov $\mathbb{A} = \{$Adam, Beáta, Cyril, Daniela$\}$ a množinu jazykov $\mathbb{B} = \{$angličtina, francúzština, nemčina, španielčina$\}$. To, aký jazyk kto študuje, sme popísali slovne, dá sa to vyjadriť aj tabuľkou alebo obrázkom

študent	**jazyk**
Adam	angličtina
Adam	nemčina
Beáta	francúzština
Beáta	španielčina
Cyril	francúzština
Daniela	španielčina



a dá sa to vyjadriť aj pomocou usporiadaných dvojíc

$$\mathfrak{R} = \{(\text{A,a}), (\text{A,n}), (\text{B,f}), (\text{B,š}), (\text{C,f}), (\text{D,š})\}.$$

Je zrejmé, že $\mathfrak{R} \subseteq \mathbb{A} \times \mathbb{B}$. Množina $\mathfrak{R}$ sa nazýva binárna relácia a vyjadruje vzťah medzi prvkami množiny $\mathbb{A}$ a prvkami množiny $\mathbb{B}$, čiže to ktorý prvok jednej množiny, je vo vzťahu s prvkom druhej množiny. ■

Vzťah medzi prvkami dvoch množín môžeme formalizovať pomocou pojmu *binárnej relácie*.

Definícia 6.1.1 — Binárna relácia. Ľubovoľná podmnožina kartézskeho súčinu $\mathbb{X}\times\mathbb{Y}$ sa nazýva binárna relácia $\mathfrak{R}$ z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$. Ak je $(x,y)\in\mathfrak{R}$, tak hovoríme, že x je v relácii s y a zapisujeme to $x\mathfrak{R}y$.
Ak platí $\mathbb{X}=\mathbb{Y}$, tak hovoríme, že $\mathfrak{R}$ je binárna relácia na množine $\mathbb{X}$.

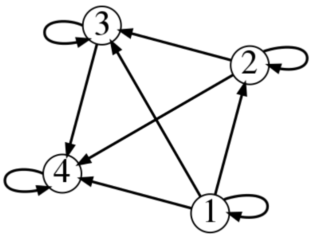
Ako sme si už ukázali v príklade 6.1, binárne relácie sa dajú popísať

1. vymenovaním množiny $\mathfrak{R}$,
2. tabuľkou,
3. šípkovým diagramom (príklad 6.1),
4. orientovaným grafom (viď príklad 6.2),
5. pomocou nejakej vlastnosti zadanej napr. predpisom (príklad 6.2),
6. maticou (viď podkapitola 6.4, str. 128).

Pri popisovaní binárnej relácie $\mathfrak{R}$ z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$ kreslíme množinu $\mathbb{X}$ vľavo, množinu $\mathbb{Y}$ vpravo a z prvku $x\in\mathbb{X}$ pôjde šípka do prvku $y\in\mathbb{Y}$ práve vtedy, ak $x\mathfrak{R}y$. Pre binárnu reláciu $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}$ (pre $\mathbb{X}=\mathbb{Y}$) zostrojíme orientovaný graf s množinou vrcholov $\mathbb{X}$.

■ **Príklad 6.2** Ukážeme si príklad relácie $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{A}=\{1,2,3,4\}$ definovanú predpisom

$$\mathfrak{R}=\{(a,b);\ a,b\in\mathbb{A}\ \wedge\ a\le b\}.$$



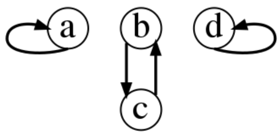
Platí $\mathfrak{R}\subseteq\mathbb{A}\times\mathbb{A}$, túto reláciu vieme popísať aj vymenovaním jej prvkov

$$\mathfrak{R}=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$$

a pomocou orientovaného grafu túto reláciu môžeme zakresliť napríklad tak, ako to vidíme na obrázku vľavo. ■

Ak máme reláciu $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}$, tak vrcholy grafu relácie $\mathfrak{R}$ budú prvky množiny $\mathbb{X}$. Ak pre $x,y\in\mathbb{X}$, je $(x,y)\in\mathfrak{R}$, tak v orientovanom grafe pôjde orientovaná hrana z vrcholu x do vrcholu y. Ak $(x,x)\in\mathfrak{R}$, tak v grafe bude slučka na vrchole x.

■ **Príklad 6.3** Reláciu $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}=\{a,b,c,d\}$ môžeme zadať aj pomocou orientovaného grafu. Nech je grafom relácie



Potom $\mathfrak{R}=\{(a,a),(b,c),(c,b),(d,d)\}$. ■

6.2 Vlastnosti relácií

Na predmete *Diskrétna matematika* sa budeme zaoberať prevažne **binárnymi reláciami na množine**, čiže binárnymi reláciami, pre ktoré $\mathbb{X}=\mathbb{Y}$. V oboch kapitolách o reláciach, pokiaľ v konkrétnom prípade nebude uvedené inak, budeme pojmom *relácia* označovať binárnu reláciu na množine. Teraz si definujeme a na príkladoch ilustrujeme niektoré vlastnosti relácií.

Definícia 6.2.1 — Reflexívna relácia. Majme reláciu $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}$. Potom relácia $\mathfrak{R}$ je reflexívna, ak pre každé $x\in\mathbb{X}:\ (x,x)\in\mathfrak{R}$.

Relácia z príkladu 6.2 je reflexívna, lebo pre všetky $x \in \mathbb{X}: \ x \leq x$. Preto má jej orientovaný graf slučku pri každom svojom vrchole. To je zároveň vlastnosť grafu každej reflexívnej relácie. Relácia z príkladu 6.3 nie je reflexívna, lebo $(b,b) \notin \mathfrak{R}$ a ani $(c,c) \notin \mathfrak{R}$. Vidno to aj z jej grafu. Pri vrchole b, ani pri vrchole c táto relácia nemá slučku.

Definícia 6.2.2 — Symetrická relácia. Majme reláciu $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}$. Potom relácia $\mathfrak{R}$ je symetrická, ak platí $(\forall x \in \mathbb{X})\,(\forall y \in \mathbb{X}): \ (x,y) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (y,x) \in \mathfrak{R}$.

Relácia z príkladu 6.3 je symetrická, pretože platí

$$\begin{aligned} (a,a) \in \mathfrak{R} \quad &\Rightarrow \quad (a,a) \in \mathfrak{R} & \qquad (b,c) \in \mathfrak{R} \quad &\Rightarrow \quad (c,b) \in \mathfrak{R} \\ (d,d) \in \mathfrak{R} \quad &\Rightarrow \quad (d,d) \in \mathfrak{R} & \qquad (c,b) \in \mathfrak{R} \quad &\Rightarrow \quad (b,c) \in \mathfrak{R} \end{aligned}$$

Ak v orientovanom grafe symetrickej relácie existuje hrana z vrcholu x do vrcholu y, tak musí existovať aj spätná hrana z vrcholu y do vrcholu x. Graf relácie z príkladu 6.3 má túto vlastnosť a graf relácie z príkladu 6.2 ju nemá. Relácia z príkladu 6.2 nie je symetrická, pretože pre $x \neq y$ neplatí implikácia $(x \leq y) \Rightarrow (y \leq x)$.
Na to, ako zistiť či daná relácia nie je symetrická si znegujeme jej definíciu. Negáciou tvrdenia

$$(\forall x \in \mathbb{X})\,(\forall y \in \mathbb{X}): \ (x,y) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (y,x) \in \mathfrak{R}$$

je tvrdenie

$$(\exists x \in \mathbb{X})\,(\exists y \in \mathbb{X}): \ (x,y) \in \mathfrak{R} \ \wedge \ (y,x) \notin \mathfrak{R}$$

Na orientovanom grafe relácie sa to prejaví tak, že existuje hrana z vrcholu x do vrcholu y, ale neexistuje spätná hrana z vrcholu y do vrcholu x.

Definícia 6.2.3 — Antisymetrická relácia. Majme reláciu $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}$. Potom relácia $\mathfrak{R}$ je antisymetrická, ak platí $(\forall x \in \mathbb{X})\,(\forall y \in \mathbb{X}): \ \big((x,y) \in \mathfrak{R} \ \wedge \ (y,x) \in \mathfrak{R}\big) \Rightarrow (x = y)$.

Relácia z príkladu 6.2 je antisymetrická, pretože platí $(x \leq y \ \wedge \ y \leq x) \Rightarrow (x = y)$. Naopak, relácia z príkladu 6.3 antisymetrická nie je, pretože $(b,c) \in \mathfrak{R}$ a $(c,b) \in \mathfrak{R}$, ale $b \neq c$.

Z vety o obmenenej implikácii, spomenutej v podkapitole o nepriamom dôkaze (podkapitola 2.2), vieme, že výroky $p \Rightarrow q$ a $\neg q \Rightarrow \neg p$ sú tautologicky ekvivalentné. Spravme teraz obmenenú implikáciu ku implikácii z definície 6.2.3. Pôvodná implikácia je

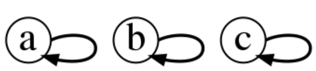
$$(\forall x \in \mathbb{X})\,(\forall y \in \mathbb{X}): \ \big((x,y) \in \mathfrak{R} \ \wedge \ (y,x) \in \mathfrak{R}\big) \Rightarrow (x = y).$$

Ku nej obrátená, tautologicky ekvivalentná, implikácia bude

$$(\forall x \in \mathbb{X})\,(\forall y \in \mathbb{X}): \ (x \neq y) \Rightarrow \big((x,y) \notin \mathfrak{R} \ \vee \ (y,x) \notin \mathfrak{R}\big).$$

Z posledne uvedenej implikácie vyplýva, že v orientovanom grafe antisymetrickej relácie medzi každými dvoma rôznymi vrcholmi existuje najviac jedna hrana. Graf relácie z príkladu 6.2 túto podmienku spĺňa, graf relácie z príkladu 6.3 ju nespĺňa.
Ak relácia nemá členy (x,y) pre $x \neq y$, tak je automaticky antisymetrická.

■ **Príklad 6.4** Napríklad relácia $\mathfrak{R} = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$, ktorej graf je na nasledovnom obrázku, je antisymetrická. Takisto je z predošlých definícií a grafu tejto relácie zrejmé, že je aj symetrická.



Z tohto príkladu vidíme, že vlastnosť *„byť antisymetrická“*, neznamená *„nebyť symetrická“*. Relácia môže byť súčasne symetrická aj antisymetrická. ■

To, kedy daná relácia nie je antisymetrická, zisťujeme tak, že znegujeme podmienku v definícii 6.2.3. Pôvodna podmienka je

$$(\forall x \in \mathbb{X})\,(\forall y \in \mathbb{X}):\ \big((x,y) \in \mathfrak{R} \,\wedge\, (y,x) \in \mathfrak{R}\big) \Rightarrow (x = y)$$

a jej negácia bude mať podobu

$$(\exists x \in \mathbb{X})\,(\exists y \in \mathbb{X}):\ \big((x,y) \in \mathfrak{R} \,\wedge\, (y,x) \in \mathfrak{R}\big) \,\wedge\, (x \neq y).$$

Na orientovanom grafe nie antisymetrickej relácie nastáva situácia, že dva rôzne vrcholy sú obojsmerne spojené hranami. Taký graf je napríklad graf relácie z príkladu 6.3. Medzi vrcholmi b a c existujú hrany v oboch smeroch a pritom $b \neq c$, sú to dva rôzne objekty z množiny $\mathbb{X}$.

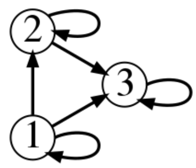
Definícia 6.2.4 — Tranzitívna relácia. Majme reláciu $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}$. Potom relácia $\mathfrak{R}$ je tranzitívna, ak platí $(\forall x \in \mathbb{X})\,(\forall y \in \mathbb{X})\,(\forall z \in \mathbb{X}):\ \big((x,y) \in \mathfrak{R} \,\wedge\, (y,z) \in \mathfrak{R}\big) \Rightarrow \big((x,z) \in \mathfrak{R}\big)$.

■ **Príklad 6.5** Nech $\mathfrak{R}$ je relácia na množine $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$ definovaná predpisom

$$\mathfrak{R} = \big\{(x,y):\ x,y \in \mathbb{X} \,\wedge\, x \leq y\big\}.$$

Orientovaný graf tejto relácie je na obrázku vpravo. Relácia $\mathfrak{R}$ je tranzitívna, pretože platí

$$(x \leq y \,\wedge\, y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)\,.$$

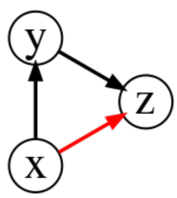


■

Vo všeobecnosti musíme na overenie tranzitívnosti danej relácie prehľadať všetky dvojice usporiadaných dvojíc, pre ktoré platí $(x,y) \in \mathfrak{R}$, $(y,z) \in \mathfrak{R}$ a zistiť či aj $(x,z) \in \mathfrak{R}$. V prípadoch ak $x = y$, alebo $y = z$, je podmienka $\big((x,y) \in \mathfrak{R} \,\wedge\, (y,z) \in \mathfrak{R}\big) \Rightarrow \big((x,z) \in \mathfrak{R}\big)$ automaticky splnená a netreba ju overovať. Overovať stačí prípady, keď $x \neq y \neq z$.

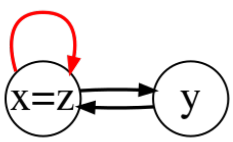
Vlastnosť *„byť tranzitívna“* na orientovanom grafe relácie znamená, že ak existuju hrana z vrcholu x do vrcholu y a existuje hrana z vrcholu y do vrcholu z, tak musí existovať aj hrana z vrcholu x do vrcholu z. Celkovo, ak je daná relácia tranzitívna, môžu nastať dva prípady.

1. $\boldsymbol{x \neq y\,,\ y \neq z\,,\ x \neq z}$

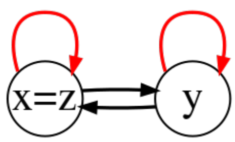


Červená hrana z vrcholu x do vrcholu z je vynútená tranzitívnosťou danej relácie a existenciou hrán z x do y a z y do z.

2. $\boldsymbol{x = z\,,\ x \neq y}$



Existenia hrán z x do y a z y do $z = x$ vynucuje aj existenciu slučky na vrchole x. Na obrázku vľavo je to zvýraznené červenou farbou. Ale rovnako táto situácia vynucuje aj existenciu slučky na vrchole y, čo je vidno na obrázku vpravo.



Ako zistíme, že daná relácia nie je tranzitívna? Znegujeme podmienku z definície 6.2.4. Pôvodná podmienka je

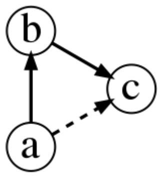
$$(\forall x \in \mathbb{X})\,(\forall y \in \mathbb{X})\,(\forall z \in \mathbb{X}):\ \big((x,y) \in \mathfrak{R} \wedge (y,z) \in \mathfrak{R}\big) \Rightarrow \big((x,z) \in \mathfrak{R}\big)$$

a jej negácia bude

$$(\exists x \in \mathbb{X})\,(\exists y \in \mathbb{X})\,(\exists z \in \mathbb{X}):\ \big((x,y) \in \mathfrak{R} \wedge (y,z) \in \mathfrak{R}\big) \wedge \big((x,z) \notin \mathfrak{R}\big).$$

Relácia z príkladu 6.3 nie je tranzitívna, pretože $(b,c) \in \mathfrak{R}$, $(c,b) \in \mathfrak{R}$, ale (b,b), ani (c,c) nepatria do relácie $\mathfrak{R}$.

■ **Príklad 6.6** Zoberme si reláciu $\mathfrak{R} = \{(a,b),(b,c)\}$ na množine $\mathbb{X} = \{a,b,c\}$.



Na obrázku vľavo je orientovaný graf relácie $\mathfrak{R}$. Táto relácia nie je tranzitívna, pretože v grafe je hrana z vrcholu a do vrcholu b, je tam aj hrana z vrcholu b do vrcholu c, avšak chýba tam pre tranzitívnosť „povinná“ hrana z vrcholu a do vrcholu c. Na obrázku je táto chýbajúca hrana znázornená čiarkovane. ■

6.3 Operácie s reláciami

Pre ľubovoľnú reláciu $\mathfrak{R}$ z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$ vieme zostrojiť aj „opačnú“ reláciu z množiny $\mathbb{Y}$ do množiny $\mathbb{X}$. Takáto „opačná“ relácia sa matematicky korektne nazýva *inverzná* relácia a dostaneme ju tak, že v relácii $\mathfrak{R}$ prehodíme poradie všetkých jej usporiadaných dvojíc.

P Inverzné relácie sú zovšeobecnením inverzných funkcií.

Definícia 6.3.1 — Inverzná relácia. Majme reláciu $\mathfrak{R}$ z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$. Inverzná relácia k relácii $\mathfrak{R}$, označujeme ju $\mathfrak{R}^{-1}$, je relácia z množiny $\mathbb{Y}$ do množiny $\mathbb{X}$ definovaná predpisom $\mathfrak{R}^{-1} = \{(y,x);\ (x,y) \in \mathfrak{R}\}$.

■ **Príklad 6.7** Majme množiny $\mathbb{X} = \{2,3,4\}$, $\mathbb{Y} = \{3,4,5,6,7\}$ a reláciu $\mathfrak{R}$ z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$, danú predpisom $\mathfrak{R} = \big\{(x,y);\ x \mid y \wedge (x,y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}\big\}$. Takže prvky relácie $\mathfrak{R}$ sú

$$\mathfrak{R} = \big\{(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4)\big\}$$

a potom inverzná relácia $\mathfrak{R}^{-1}$ bude

$$\mathfrak{R}^{-1} = \big\{(4,2),(6,2),(3,3),(6,3),(4,4)\big\}.$$

Slovne by sme inverznú reláciu $\mathfrak{R}^{-1}$ mohli popísať tak, že $(x,y) \in \mathfrak{R}^{-1}$ práve vtedy, keď *„číslo x je deliteľné číslom y“*. ■

Ak máme reláciu $\mathfrak{R}_1$ z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$ a reláciu $\mathfrak{R}_2$ z množiny $\mathbb{Y}$ do množiny $\mathbb{Z}$, tak tieto dve relácie môžeme „zložiť“. Robíme to tak, že reláciu $\mathfrak{R}_2$ aplikujeme na výsledok relácie $\mathfrak{R}_1$.

P Skladanie relácií je zovšeobecnením skladania funkcií.

Definícia 6.3.2 — Skladanie relácií. Majme reláciu $\mathfrak{R}_1$ z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$ a reláciu $\mathfrak{R}_2$ z množiny $\mathbb{Y}$ do množiny $\mathbb{Z}$. Zložením relácií $\mathfrak{R}_1$ a $\mathfrak{R}_2$ je relácia $\mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$ z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Z}$, definovaná predpisom

$$\mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1 = \Big\{ (x,z);\ \Big(\exists y \in \mathbb{Y}:\ (x,y) \in \mathfrak{R}_1 \ \wedge\ (y,z) \in \mathfrak{R}_2 \Big) \Big\}.$$

■ **Príklad 6.8** Nech $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$, $\mathbb{Y} = \{a,b,c\}$ a $\mathbb{Z} = \{x,y\}$. Ďalej nech $\mathfrak{R}_1$ je relácia z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$ daná predpisom

$$\mathfrak{R}_1 = \big\{ (1,a),(1,b),(2,b),(3,b),(3,c) \big\}$$

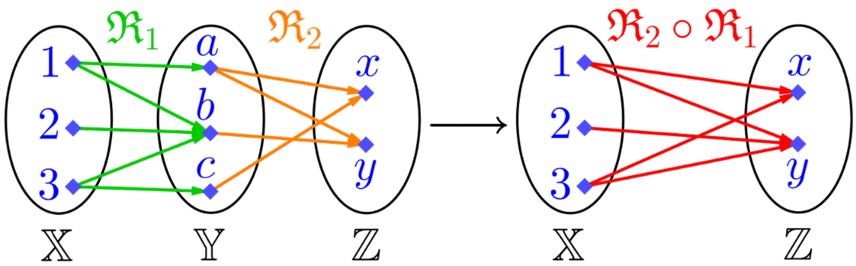
a $\mathfrak{R}_2$ je relácia z množiny $\mathbb{Y}$ do množiny $\mathbb{Z}$ daná predpisom

$$\mathfrak{R}_2 = \big\{ (a,x),(a,y),(b,y),(c,x) \big\}.$$

Potom zložená relácia $\mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$ bude

$$\mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1 = \big\{ (1,x),(1,y),(2,y),(3,x),(3,y) \big\}.$$

Uvedené skladanie relácií $\mathfrak{R}_1$ a $\mathfrak{R}_2$ si môžeme pekne ilustrovať na nasledujúcom obrázku.



■

6.4 Maticová reprezentácia binárnych relácií

V časti 6.1 sme si ukázali, že binárne relácie sa dajú reprezentovať viacerými spôsobmi. Už sme si na príkladoch ukázali reprezentáciu relácií vymenovaním ich prvkov, tabuľkou alebo šípkovým diagramom (príklad 6.1, str. 123), orientovaným grafom aj popísaním vlastností nejakej relácie. Ešte si ukážeme reprezentáciu binárnych relácií maticami.

Matice sú vhodný prostriedok na reprezentáciu binárnych relácií medzi dvoma konečnými množinami. Ak máme reláciu $\mathfrak{R}$ z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$, tak riadky matice budú zodpovedať prvkom množiny $\mathbb{X}$ a stĺpce matice budú zodpovedať prvkom množiny $\mathbb{Y}$, oboje v nejakom poradí. Čísla v matici budú len 0 alebo 1. V prípade, že nejaký prvok množiny $x \in \mathbb{X}$ je v relácii s prvkom $y \in \mathbb{Y}$, bude v matici na pozícii xy číslo 1. Na všetkých ostatných pozíciach budú čísla 0.

■ **Príklad 6.9** Majme reláciu $\mathfrak{R} = \{(1,b),(1,d),(2,c),(3,b),(3,c)\}$ z množiny $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$ do množiny $\mathbb{Y} = \{a,b,c,d\}$. Pri lexikografickom usporiadaní prvkov množín $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ bude (6.1) maticou relácie $\mathfrak{R}$.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{6.1}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} d & b & a & c \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{6.2}$$

Ak by sme ale prvky množiny $\mathbb{X}$ usporiadali v poradí $(2,3,1)$ a prvky množiny $\mathbb{Y}$ v poradí (d,b,a,c), tak maticou tej istej relácie $\mathfrak{R}$ bude (6.2). ■

Ukážeme si ešte iný príklad. Tentoraz si zoberieme reláciu na množine.

■ **Príklad 6.10** Relácia $\mathfrak{R}$ je daná na množine $\mathbb{X} = \{a,b,c,d\}$, vymenovaním svojich prvkov

$$\mathfrak{R} = \{(a,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c),(d,d)\}.$$

Pri lexikografickom usporiadaní prvkov množiny $\mathbb{X}$ bude matica relácie $\mathfrak{R}$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

■

P Matica relácie na množine je vždy štvorcová.

V časti 6.2 sme si definovali vlastnosti relácií: reflexívnosť, symetrickosť, antisymetrickosť, tranzitívnosť. Ukázali sme ako zistíme, či daná relácia tieto vlastnosti má, alebo nemá, na základe množinového zápisu alebo orientovaného grafu relácie. Často však, napr. pri reláciach na veľkých množinách alebo spracovávaní na počítači, je na overovanie vlastností relácií výhodnejšia práve ich maticová reprezentácia. Teraz si ukážeme ako z maticového zápisu danej relácie zistíme jej vlastnosti. Rovnako ako v časti 6.2 sa tu budeme zaoberať len reláciami na množine a v ich maticovej reprezentácií budú riadky aj stĺpce matice relácie vždy v rovnakom usporiadaní.

6.4.1 Reflexívnosť

Ak máme maticovú reprezentáciu reflexívnej relácie, tak všetky čísla na hlavnej diagonále matice musia byť 1. Zoberme si napr. matice relácie z príkladu 6.2, strana 124. Bude to matica

$$\text{Matica relácie z príkladu 6.2:} \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{6.3}$$

Táto matica má všetky čísla na hlavnej diagonále 1 a z toho hneď vidíme, že zodpovedajúca relácia je reflexívna. Pozrime sa teraz na maticu relácie z príkladu 6.3, strana 124.

$$\text{Matica relácie z príkladu 6.3:} \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{6.4}$$

Táto matica má v 2. a 3. riadku na hlavnej diagonále čísla 0, a preto zodpovedajúca relácie nie je reflexívna.

6.4.2 Symetrickosť

To, či daná relácia je, alebo nie je, symetrická, zistíme z jej matice rovnako ľahko ako jej reflexívnosť. Matica symetrickej relácie musí byť symetrická podľa hlavnej diagonály. Ak si maticu relácie $\mathfrak{R}$ označíme $\mathbb{R}$ a jej prvky r_{ij}, tak pre symetrickú reláciu musí platiť $\mathbb{R} = \mathbb{R}^T$, alebo inak povedané $\forall i,j: \; r_{ij} = r_{ji}$.
Relácia z príkladu 6.3 je symetrická, viď matica (6.4) a relácia z príkladu 6.2 symetrická nie je, viď matica (6.3).

6.4.3 Antisymetrickosť

Podľa definície je daná relácia na množine $\mathbb{X}$ antisymetrická, ak platí

$$(\forall x \in \mathbb{X})\,(\forall y \in \mathbb{X}):\ \big((x,y) \in \mathfrak{R}\ \wedge\ (y,x) \in \mathfrak{R}\big) \Rightarrow (x = y)\,.$$

Alebo môžeme povedať, že daná relácia na množine $\mathbb{X}$ antisymetrická nie je, ak platí

$$(\exists x \in \mathbb{X})\,(\exists y \in \mathbb{X}):\ \big((x,y) \in \mathfrak{R}\ \wedge\ (y,x) \in \mathfrak{R}\big)\ \wedge\ (x \neq y)\,.$$

Priamo z definície je zrejmé, že antisymetrickost vieme z matice danej relácie overiť rovnako ľahko ako predošlé vlastnosti. Budeme pritom overovať či daná relácie **nie je** antisymetrická, pretože tento test je jednoduchší (rýchlejší), než overovanie či antisymetrická je. Ak si maticu relácie $\mathfrak{R}$ označíme $\mathbb{R}$ a jej prvky r_{ij}, tak relácia $\mathfrak{R}$ nie je antisymetrická, ak

$$\exists\, i,j:\quad (i \neq j)\ \wedge\ (r_{ij} = r_{ji} = 1)\,.$$

Relácia z príkladu 6.3 nie je antisymetrická, viď matica (6.4). V tejto matici $r_{23} = r_{32} = 1$ a $2 \neq 3$. Relácia z príkladu 6.2 antisymetrická je, viď matica (6.3). Ešte si môžeme pozrieť aj maticu relácie z príkladu 6.4 (str. 125). Je to matica

$$\text{Matica relácie z príkladu 6.4:}\quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{6.5}$$

Táto relácia je aj symetrická, aj antisymetrická.

6.4.4 Tranzitívnosť

S overovaním tranzitívnosti danej relácie pomocou jej maticovej reprezentácie je to trochu komplikovanejšie než s ostatnými troma vlastnosťami. Preto si najskôr situáciu ilustrujeme na príklade relácie medzi dvoma množinami. Až potom sformulujeme vetu hovoriacu o tom, ako zistíme tranzitívnosť relácie z jej maticováho zápisu. Bude to veta 6.4.3.

■ **Príklad 6.11** Nech $\mathfrak{R}_1 = \{(1,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$ je relácia z množiny $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$ do množiny $\mathbb{Y} = \{a,b\}$ a nech $\mathfrak{R}_2 = \{(a,x),(a,y),(b,y),(b,z)\}$ je relácia z množiny $\mathbb{Y}$ do množiny $\mathbb{Z} = \{x,y,z\}$. Pri lexikografickom usporiadaní prvkov množín $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ a $\mathbb{Z}$ budú mať relácie $\mathfrak{R}_1$ a $\mathfrak{R}_2$ matice $\mathbb{R}_1$ a $\mathbb{R}_2$.

$$\mathbb{R}_1 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{a} \qquad \mathbb{R}_2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

a súčin týchto dvoch matíc bude

$$\mathbb{R}_1.\mathbb{R}_2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ukážeme si čo predstavuje súčin $\mathbb{R}_1.\mathbb{R}_2$. Dokážeme, že ak by sme číslo 2 v poslednom riadku nahradili číslom 1, tak takto upravená matica $\mathbb{R}_1.\mathbb{R}_2$ by bola maticou zloženej relácie $\mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$. Toto dokážeme ako lemu, aj keď sa jedná len o pomocné tvrdenie ku tomuto konkrétnemu príkladu.

Lema 6.4.1 — O súčine $\mathbb{R}_1.\mathbb{R}_2$ z príkladu 6.11. Nech $i \in \{1,2,3\}$ a $k \in \{x,y,z\}$. Potom prvok v i. riadku a k. stĺpci matice $\mathbb{R}_1.\mathbb{R}_2$ (budeme ho označovať r_{ik}) je nenulový práve vtedy, keď $(i,k) \in \mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$.

Dôkaz: v tvrdení sa jedná o ekvivalenciu, takže dokazovať ho budeme ako dve implikácie.

- $\Rightarrow$ Prvok r_{ik} matice $\mathbb{R}_1.\mathbb{R}_2$ sa počíta ako skalárny súčin i. riadku matice $\mathbb{R}_1$ a k. stĺpca matice $\mathbb{R}_2$. Označme si

$$i.\text{ riadok matice } \mathbb{R}_1: \ (s,t) \quad \text{a} \quad k.\text{ stĺpec matice } \mathbb{R}_2: \ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \ \text{kde } s,t,u,v \in \{0,1\}.$$

Potom

$$r_{ik} = \begin{array}{c} \\ i \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{pmatrix} s & t \end{pmatrix} \end{array} . \begin{array}{c} \\ a \\ b \end{array} \begin{array}{c} k \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{array} = s.u + t.v.$$

Nech $r_{ik} \neq 0$, čiže $s.u + t.u \neq 0$. Potom buď $s.u \neq 0$, alebo $t.v \neq 0$. Nech $s.u \neq 0$ (prípad $t.v \neq 0$ sa ukáže podobne). Potom $s \neq 0$ a $u \neq 0$. To ale znamená, že $(i,a) \in \mathfrak{R}_1$ a $(a,k) \in \mathfrak{R}_2$, a preto $(i,k) \in \mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$.

- $\Leftarrow$ Nech $(i,k) \in \mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$. Potom $(i,a) \in \mathfrak{R}_1$ a $(a,k) \in \mathfrak{R}_2$, alebo $(i,b) \in \mathfrak{R}_1$ a $(b,k) \in \mathfrak{R}_2$. V prvom prípade $s.u = 1$, v druhom prípade $t.v = 1$. Z toho vyplýva, že $r_{ik} = s.u + t.v \neq 0$. Takže dokázali sme, že ak $(i,k) \in \mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$, tak $r_{ik} \neq 0$.

Q.E.D.

V predošlom tvrdení sme dokázali, že $(i,k) \in \mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$ práve vtedy, keď matica $\mathbb{R}_1.\mathbb{R}_2$ má v i. riadku a k. stĺpci nenulové číslo. Preto matica $\mathbb{R}_1.\mathbb{R}_2$ je „takmer“ matica relácie $\mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$. Stačí ak všetky nenulové čísla matice $\mathbb{R}_1.\mathbb{R}_2$ nahradíme jednotkami a dostaneme tým maticu relácie $\mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$. Matica relácie $\mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$ bude teda

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

■

Výsledok dokázaný v príklade 6.11 sa dá zovšeobecniť.

Veta 6.4.2 — O matici zloženej relácie. Nech $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ a $\mathbb{Z}$ sú konečné množiny. Ďalej nech $\mathfrak{R}_1$ je relácia z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$ a $\mathfrak{R}_2$ je relácia z množiny $\mathbb{Y}$ do množiny $\mathbb{Z}$. Zvoľme si pevné usporiadanie množín $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ a $\mathbb{Z}$ a nech $\mathbb{R}_1$ je matica relácie $\mathfrak{R}_1$ a $\mathbb{R}_2$ je matica relácie $\mathfrak{R}_2$ v tomto usporiadaní. Potom matica relácie $\mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$, vzhľadom na zvolené usporiadenie, sa získa tak, že v matici $\mathbb{R}_1.\mathbb{R}_2$ všetky nenulové čísla nahradíme jednotkami.

Dôkaz: tejto vety sa robí analogicky ako dôkaz lemy 6.4.1.

Pomocou vety 6.4.2 už vieme rozhodnúť o tranzitívnosti danej relácie na základe jej maticovej reprezentácie. Podmienku určenia tranzitívnosti danej relácie na základe jej maticovej reprezentácie dokážeme ako vetu 6.4.3.

Veta 6.4.3 — Tranzitívnosť relácie na množine. Relácia $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}$ je daná maticou $\mathbb{R}$, pričom prvky množiny $\mathbb{X}$ sú pevne usporiadané. Relácia $\mathfrak{R}$ je tranzitívna práve vtedy, keď platí tvrdenie: *„ak (ij). prvok matice $\mathbb{R}^2$ je nenulový, tak aj (ij). prvok matice $\mathbb{R}$ je nenulový.“*

Dôkaz: je založený na vete 6.4.2. Tvrdenie budeme opäť dokazovať ako dve implikácie.

$\Rightarrow$ Nech relácia $\mathfrak{R}$ je tranzitívna a nech (ij). prvok matice $\mathbb{R}^2$ je nenulový. To, podľa vety 6.4.2, znamená, že $(i,j) \in \mathfrak{R} \circ \mathfrak{R}$. Musí preto existovať $k \in \mathbb{X}: (i,k) \in \mathfrak{R} \wedge (k,j) \in \mathfrak{R}$. Z tranzitívnosti relácie $\mathfrak{R}$ potom dostávame, že $(i,j) \in \mathfrak{R}$, čiže (ij). prvok matice $\mathbb{R}$ je nenulový.

$\Leftarrow$ Nech platí tvrdenie: *„ak (ij). prvok matice $\mathbb{R}^2$ je nenulový, tak aj (ij). prvok matice $\mathbb{R}$ je nenulový.“* Nech $x,y,z \in \mathbb{X}$ a pri danom usporiadaní množiny $\mathbb{X}$, x je i., y je k. a z je j. prvok množiny $\mathbb{X}$. Ďalej nech $(x,y) \in \mathfrak{R}$ a $(y,z) \in \mathfrak{R}$. Potom $(x,z) \in \mathfrak{R} \circ \mathfrak{R}$, čiže (ij). prvok matice $\mathbb{R}^2$ je nenulový. To podľa platného tvrdenia znamená, že aj (ij). prvok matice $\mathbb{R}$ je nenulový, čo ďalej znamená, že $(x,z) \in \mathfrak{R}$. Takže ak platí uvedené tvrdenie, tak relácia $\mathfrak{R}$ je tranzitívna.

Q.E.D.

Využitie vety 6.4.3 si ilustrujeme na nasledujúcich dvoch príkladoch.

■ **Príklad 6.12** Majme reláciu $\mathfrak{R} = \{(a,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c),(d,d)\}$, (príklad 6.10) na množine $\mathbb{X} = \{a,b,c,d\}$. Matica tejto relácie je

$$\mathbb{R} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{a} \quad \mathbb{R}^2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Z uvedených matíc vidíme, že ak (ij). prvok matice $\mathbb{R}^2$ je nenulový, tak aj (ij). prvok matice $\mathbb{R}$ je nenulový. To podľa vety 6.4.3 znamená, že relácia $\mathfrak{R}$ je tranzitívna. ■

■ **Príklad 6.13** Majme reláciu $\mathfrak{R} = \{(a,a),(a,c),(b,b),(c,b),(c,c),(d,d)\}$, definovanú na množine $\mathbb{X} = \{a,b,c,d\}$. Matica tejto relácie je

$$\mathbb{R} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{a} \quad \mathbb{R}^2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Z uvedených matíc vidíme, že neplatí tvrdenie *„ak (ij). prvok matice $\mathbb{R}^2$ je nenulový, tak aj (ij). prvok matice $\mathbb{R}$ je nenulový“*, pretože $\{\mathbb{R}^2\}_{12} = 1$, ale $\{\mathbb{R}\}_{12} = 0$. To podľa vety 6.4.3 znamená, že relácia $\mathfrak{R}$ nie je tranzitívna. ■

6.5 Cvičenia

Cvičenie 6.1 Nakreslite orientovaný graf relácie

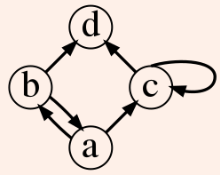
(a) $\mathfrak{R} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$, na množine $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$,

(b) $\mathfrak{R} = \{(1,1),(2,3),(3,4),(4,1)\}$, na množine $\mathbb{X} = \{1,2,3,4\}$,

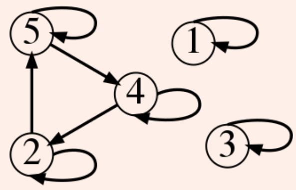
(c) $\mathbb{X} = \{1,2,3,4\}$ a $\mathbb{R} = \left\{(x,y);\ (x,y) \in \mathbb{X}^2 \ \wedge\ x^2 \geq 4\right\}$. ■

Cvičenie 6.2 Zapíšte reláciu danú orientovaným grafom ako množinu usporiadaných dvojíc

a)



b)



■

Cvičenie 6.3 Pre každú reláciu z cvičení 6.1 a 6.2 nájdite inverznú reláciu. ■

Cvičenie 6.4 Predpisom $\mathfrak{R} = \left\{(x,y);\ 3 \mid (x-y)\ \wedge\ (x,y) \in \mathbb{X}^2\right\}$ je daná relácia $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X} = \{1,2,3,4,5\}$.

(a) Zapíšte reláciu $\mathfrak{R}$ ako množinu usporiadaných dvojíc.

(b) Nakreslite orientovaný graf relácie $\mathfrak{R}$.

(c) Zostrojte reláciu $\mathfrak{R}^{-1}$. ■

Cvičenie 6.5 Predpisom $\mathfrak{R} = \left\{(x,y);\ x+y \leq 6\ \wedge\ (x,y) \in \mathbb{X}^2\right\}$ je daná relácia $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X} = \{1,2,3,4,5\}$.

(a) Zapíšte reláciu $\mathfrak{R}$ ako množinu usporiadaných dvojíc.

(b) Nakreslite orientovaný graf relácie $\mathfrak{R}$.

(c) Zostrojte reláciu $\mathfrak{R}^{-1}$. ■

Cvičenie 6.6 Predpisom $\mathfrak{R} = \left\{(x,y);\ x = y-1\ \wedge\ (x,y) \in \mathbb{X}^2\right\}$ je daná relácia $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X} = \{1,2,3,4,5\}$.

(a) Zapíšte reláciu $\mathfrak{R}$ ako množinu usporiadaných dvojíc.

(b) Nakreslite orientovaný graf relácie $\mathfrak{R}$.

(c) Zostrojte reláciu $\mathfrak{R}^{-1}$. ■

Cvičenie 6.7 Na množine $\mathbb{X} = \{1,2,3,4\}$ sú dané dve relácie

$$\mathfrak{R}_1 = \{(1,1),(1,2),(3,4),(4,2)\} \quad \text{a} \quad \mathfrak{R}_2 = \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(4,4)\}\,.$$

Nájdite relácie

(a) $\mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_1$ (b) $\mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_2$ (c) $\mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$ (d) $\mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_2$ ■

Cvičenie 6.8 Na množine $\mathbb{X} = \{1,2,3,4\}$ nájdite príklad relácie, ktorá je

(a) reflexívna a symetrická, ale nie tranzitívna,
(b) reflexívna, nie symetrická, nie tranzitívna,
(c) reflexívna a antisymetrická, ale nie tranzitívna,
(d) nie reflexívna, symetrická, nie antisymetrická, tranzitívna,
(e) nie reflexívna, nie symetrická, tranzitívna,

■

Cvičenie 6.9 Nech $\mathfrak{R}$ a $\mathfrak{S}$ sú dve relácie na množine $\mathbb{X}$. O každom z nasledujúcich výrokov rozhodnite či je pravdivý. Ak je pravdivý dokážte ho, ak nie je pravdivý, nájdite kontrapríklad.

(a) Ak $\mathfrak{R}$ je tranzitívna, tak $\mathfrak{R}^{-1}$ je tranzitívna.
(b) Ak $\mathfrak{R}$ je reflexívna, tak $\mathfrak{R}^{-1}$ je reflexívna.
(c) Ak sú $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ reflexívne, tak je $\mathfrak{R} \cup \mathfrak{S}$ reflexívna.
(d) Ak sú $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ reflexívne, tak je $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}$ reflexívna.
(e) Ak sú $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ reflexívne, tak je $\mathfrak{R} \circ \mathfrak{S}$ reflexívna.
(f) Ak $\mathfrak{R}$ je symetrická, tak $\mathfrak{R}^{-1}$ je symetrická.
(g) Ak sú $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ symetrické, tak je $\mathfrak{R} \cup \mathfrak{S}$ symetrická.
(h) Ak sú $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ symetrické, tak je $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}$ symetrická.
(i) Ak sú $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ symetrické, tak je $\mathfrak{R} \circ \mathfrak{S}$ symetrická.
(j) Ak $\mathfrak{R}$ je antisymetrická, tak $\mathfrak{R}^{-1}$ je antisymetrická.
(k) Ak sú $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ antisymetrické, tak je $\mathfrak{R} \cup \mathfrak{S}$ antisymetrická.
(l) Ak sú $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ antisymetrické, tak je $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}$ antisymetrická.
(m) Ak sú $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ antisymetrické, tak je $\mathfrak{R} \circ \mathfrak{S}$ antisymetrická.

■

Cvičenie 6.10 Nájdite maticu relácie $\mathfrak{R}$ z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$ pri usporiadaní množín $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ tak, ako je to uvedené v zadaní.

(a) $\mathfrak{R} = \big\{(1,\delta),(2,\alpha),(2,\varepsilon),(3,\beta),(3,\varepsilon)\big\}$, $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$ a $\mathbb{Y} = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$
(b) $\mathfrak{R} = \big\{(1,\delta),(2,\alpha),(2,\varepsilon),(3,\beta),(3,\varepsilon)\big\}$, $\mathbb{X} = \{3,2,1\}$ a $\mathbb{Y} = \{\varepsilon,\gamma,\beta,\alpha,\delta\}$
(c) $\mathfrak{R} = \big\{(x,a),(x,c),(y,a),(y,b),(z,d)\big\}$, $\mathbb{X} = \{x,y,z\}$ a $\mathbb{Y} = \{a,b,c,d\}$

■

Cvičenie 6.11 Nájdite maticu relácie $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}$ vzhľadom na usporiadanie množiny $\mathbb{X}$ uvedené v zadaní.

(a) $\mathfrak{R} = \big\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\big\}$, $\mathbb{X} = \{1,2,3,4,5\}$
(b) $\mathfrak{R} = \big\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\big\}$, $\mathbb{X} = \{5,3,1,2,4\}$
(c) $\mathfrak{R} = \big\{(x,y);\ (x<y) \wedge (x,y \in \mathbb{X})\big\}$, $\mathbb{X} = \{1,2,3,4\}$

■

Cvičenie 6.12 Zapíšte reláciu $\mathfrak{R}$ danú maticou, ako množinu usporiadaných dvojíc

(a)
$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} w & x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} w & x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} w \\ x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

■

Cvičenie 6.13 Je daná relácia $\mathfrak{R}$ z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$. Ako možno z jej matice určiť reláciu $\mathfrak{R}^{-1}$? ■

Cvičenie 6.14 Dané sú množiny $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$, $\mathbb{Y} = \{x,y\}$ a $\mathbb{Z} = \{a,b,c\}$ v uvedenom usporiadaní. Okrem toho sú dané relácie

$$\mathfrak{R}_1 = \big\{(1,x),(1,y),(2,x),(3,x)\big\} \qquad \text{a} \qquad \mathfrak{R}_2 = \big\{(x,b),(y,a),(y,b),(y,c)\big\}.$$

Nájdite

(a) maticu relácie $\mathfrak{R}_1$ pri daných usporiadaniach,

(b) maticu relácie $\mathfrak{R}_2$ pri daných usporiadaniach,

(c) maticu zloženej relácie $\mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$ pri daných usporiadaniach,

(d) reláciu $\mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$ ako množinu usporiadaných dvojíc. ■

Cvičenie 6.15 Na množine $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$ sú dané relácie $\mathfrak{R}_1$ a $\mathfrak{R}_2$ maticami

$$\mathbb{R}_1 = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{a} \qquad \mathbb{R}_2 = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Nájdite maticu relácie $\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$ pri rovnakom usporiadaní množiny $\mathbb{X}$.

(b) Nájdite maticu relácie $\mathfrak{R}_1 \cap \mathfrak{R}_2$ pri rovnakom usporiadaní množiny $\mathbb{X}$. ■

Cvičenie 6.16 O každej relácii z cvičení 6.4, 6.5 a 6.6 (strana 133) rozhodnite, či je reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna. ■

Cvičenie 6.17 Maticou

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

je daná relácia $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X} = \{1,2,3,4,5\}$. Zistite o tejto relácii či je reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna. ■

Cvičenie 6.18 Nasledujúce relácie sú všetky na množine prirodzených čísel $\mathbb{N}$. O každej z nich rozhodnite či je reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna.

(a) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x = y^2 \wedge (x,y) \in \mathbb{N}^2\}$
(b) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ 3 \mid (x-y) \wedge (x,y) \in \mathbb{N}^2\}$
(c) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ 3 \mid (x+2y) \wedge (x,y) \in \mathbb{N}^2\}$
(d) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ |x-y| = 2 \wedge (x,y) \in \mathbb{N}^2\}$
(e) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x-y = 2 \wedge (x,y) \in \mathbb{N}^2\}$
(f) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x > y \wedge (x,y) \in \mathbb{N}^2\}$
(g) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x \geq y \wedge (x,y) \in \mathbb{N}^2\}$

■

Cvičenie 6.19 O každej z nasledujúcich relácií na danej množine $\mathbb{X}$ overte či je reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna.

(a) $\mathbb{X} = \{a,b,c,d\}$ a $\mathfrak{R} = \{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c),(b,d),(c,d),(d,d)\}$
(b) $\mathbb{X} = \{0,1,2\}$ a $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x \leq y \wedge (x,y) \in \mathbb{X}^2\}$
(c) $\mathbb{X} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ a $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ 3 \mid (y-x) \wedge (x,y) \in \mathbb{X}^2\}$
(d) $\mathbb{X} = \mathbb{N}$ a $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x < 1+y \wedge (x,y) \in \mathbb{X}^2\}$
(e) $\mathbb{X} = \mathbb{Z}$ a $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x < 1-y \wedge (x,y) \in \mathbb{X}^2\}$
(f) $\mathbb{X} = \mathbb{Z}$ a $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x \mid y^2 \wedge (x,y) \in \mathbb{X}^2\}$
(g) $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ a $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x.y \in \mathbb{Q} \wedge (x,y) \in \mathbb{X}^2\}$
(h) $\mathbb{X} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a $(a,b)\,\mathfrak{R}\,(c,d) \Leftrightarrow \Big((a+b \leq c) \wedge (b \leq d) \wedge \big((a,b),(c,d) \in \mathbb{X}\big)\Big)$

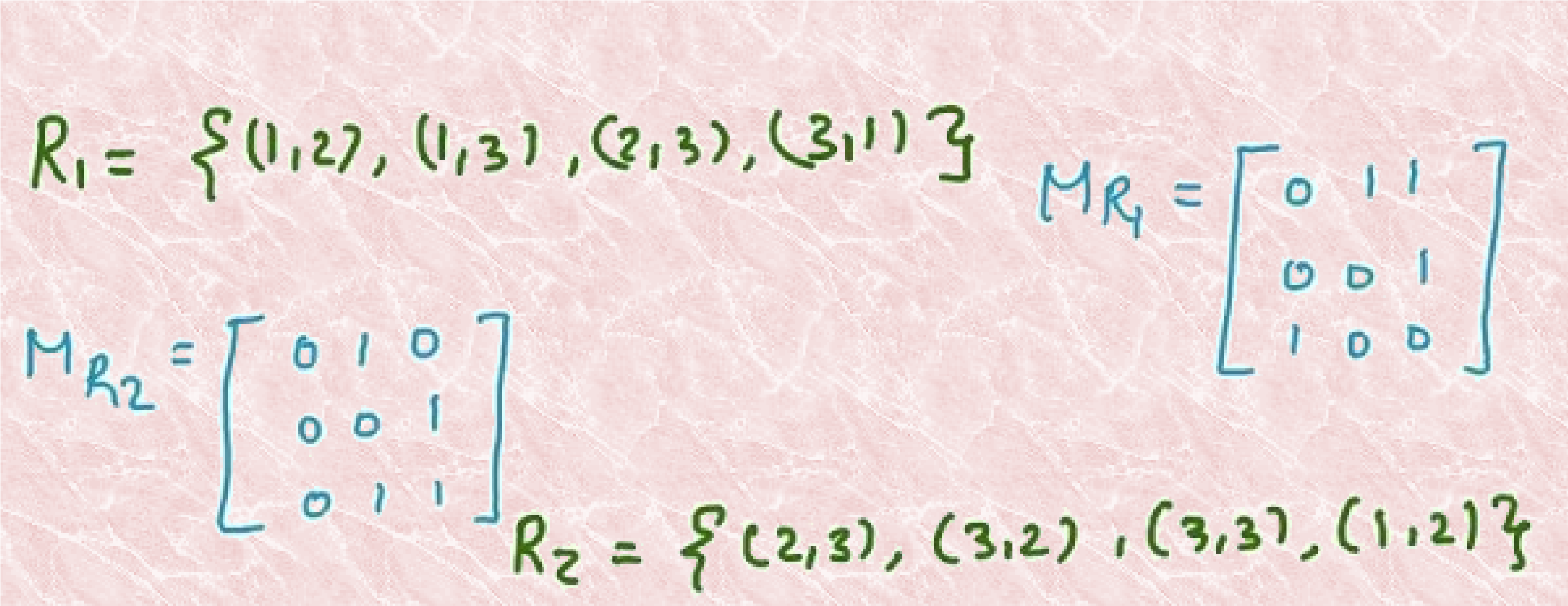
■

Cvičenie 6.20 Nech $\mathbb{X} \neq \emptyset$. Definujeme reláciu $\mathfrak{R}$ na potenčnej množine $\mathscr{P}(\mathbb{X})$ predpisom $(\mathbb{A},\mathbb{B}) \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow (\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B})$. Je táto relácia reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna? ■

Cvičenie 6.21 O každej relácii z cvičení 6.11 (strana 134), 6.12 c) a 6.15 (strana 135) zistite z jej maticovej reprezentácie, či je príslušná relácia reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna. ■

Cvičenie 6.22 Nech $\mathbb{X}$ je množina všetkých 4-bitových reťazcov. Každý bit má hodnotu 0 alebo 1. Definujeme reláciu $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}$ takto: $r_1\,\mathfrak{R}\,r_2$ práve vtedy, keď nejaký podreťazec dĺžky 2 reťazca r_1 je rovnaký ako podreťazec dĺžky 2 reťazca r_2. Napríklad $0111\,\mathfrak{R}\,1010$, oba reťazce obsahujú podreťazec 01, ale reťazce 1110 a 0001 nie sú v relácii, neobsahujú spoločný podreťazec dĺžky 2. Je relácia $\mathfrak{R}$ reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna? ■

Cvičenie 6.23 Nájdite maticu inverznej relácie ku každej relácií z cvičení 6.10, 6.11 (str. 134), 6.12 a 6.17 (str. 135). ■



7. Čiastočné usporiadanie, ekvivalencie, funkcie

7.1 Čiastočné usporiadanie

Ľahko sa dá nahliadnuť, že relácia $\mathfrak{R}$ zadaná na množine celých čísel predpisom

$$\mathfrak{R} = \left\{(x,y);\ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \ \wedge\ x \leq y\right\},$$

je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna. Túto reláciu zvykneme označovať aj symbolom „$\leq$“ a nazývať „usporiadanie“, pretože pomocou nej vieme množiny čísel usporiadať podľa veľkosti. Rovnako aj relácia $\mathfrak{D}$ zadaná na množine prirodzených čísel predpisom

$$\mathfrak{D} = \left\{(x,y);\ (x,y) \in \mathbb{N}^2 \ \wedge\ x \mid y\right\},$$

je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna. Vo všeobecnosti sa relácia s týmito vlastnosťami nazýva *čiastočné usporiadanie*.

Definícia 7.1.1 — Čiastočné usporiadanie. Relácia $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}$ sa nazýva čiastočné usporiadanie množiny $\mathbb{X}$ ak je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna. Ak relácia $\mathfrak{R}$ je čiastočné usporiadanie množiny $\mathbb{X}$ a $(x,y) \in \mathfrak{R}$, tak to zvykneme označovať $x \preceq y$.

P Relácia čiastočného usporiadania na množine, nám prvky tejto množiny istým spôsobom „usporiadava“.

Definícia 7.1.2 — Porovnateľné a neporovnateľné prvky. Majme reláciu $\preceq$, ktorá je čiastočným usporiadaním na množine $\mathbb{X}$. Ak pre $x,y \in \mathbb{X} : (x \preceq y) \ \vee\ (y \preceq x)$, tak x a y nazývame *porovnateľné prvky*. Ak pre $x,y \in \mathbb{X} : (x \not\preceq y) \ \wedge\ (y \not\preceq x)$, tak x a y nazývame *neporovnateľné prvky*.

■ **Príklad 7.1** Zoberme si napríklad reláciu $\mathfrak{D}$ $(\mid)$ na množine prirodzených čísel, spomenutú pred definíciou 7.1.1. Táto relácia je čiastočným usporiadaním množiny prirodzených čísel, ale nie každé dve prirodzené čísla sú ňou porovnateľné. Ak si napríklad zoberieme čísla 7 a 15 tak platí $(7 \nmid 15) \ \wedge\ (15 \nmid 7)$. Čísla 7 a 15 sú preto reláciou $\mid$ neporovnateľné. ■

Definícia 7.1.3 — Lineárne usporiadanie. Majme reláciu $\preceq$, ktorá je čiastočným usporiadaním na množine $\mathbb{X}$. Ak pre $\forall x, y \in \mathbb{X} : (x \preceq y) \ \vee \ (y \preceq x)$, tak sa relácia $\preceq$ nazýva lineárne usporiadanie na množine $\mathbb{X}$.

■ **Príklad 7.2** Zoberme si reláciu $\mathfrak{R}\,(\leq)$ na množine celých čísel, definovanú v úvode podkapitoly. Táto relácia je lineárne usporiadanie na množine $\mathbb{Z}$, pretože lubovoľné dve čísla ňou vieme porovnať. Platí $\forall x, y \in \mathbb{Z} : \ (x \leq y) \ \vee \ (y \leq x)$. ■

P Čiastočné usporiadanie na množine $\mathbb{X}$ sa nazýva „čiastočné“ preto, lebo môžu existovať prvky množiny $\mathbb{X}$, ktoré sa týmto usporiadaním nedajú porovnať, sú neporovnateľné.
Naproti tomu ak máme na množine $\mathbb{X}$ lineárne usporiadanie, tak týmto sa dajú porovnať ľubovoľné dva prvky množiny $\mathbb{X}$. Prvky množiny $\mathbb{X}$ môžeme „lineárne usporiadať“.

7.2 Rozklad množín a relácia ekvivalencie

Reláciu ekvivalencie môžeme definovať buď priamo, na pomocou jej vlastností, alebo sa k nej môžeme dopracovať prostredníctvom množín a ich rozkladov. Najskôr si ukážeme prístup cez rozklad množín a potom v definujeme (definícia 7.2.3) reláciu ekvivalencie pomocou jej vlastností.

7.2.1 Rozklad množiny

Začneme definíciou jedného pomocného pojmu.

Definícia 7.2.1 — Systém množín. Systémom množín budeme nazývať množinu, ktorej prvkom sú množiny, t. j. množinu množín.

P So systémom množín sme sa už stretli na 1. prednáške pri definícii potenčnej množiny (definícia 1.1.10). Ak máme množinu $\mathbb{X}$, tak jej potenčná množina $\mathscr{P}(\mathbb{X})$ je množina všetkých jej podmnožín.

■ **Príklad 7.3** Príklady systémov množín sú nasledovné množiny

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_1 &= \big\{\{0,1,3\},\{2,4,5\},\{1,2,7\}\big\} \\
\mathcal{S}_2 &= \big\{\langle k, k+1) : \ k \in \mathbb{Z}\big\} \\
\mathcal{S}_3 &= \big\{\{2n, 2n-1\} : \ n \in \mathbb{N}\big\} \\
\mathcal{S}_4 &= \big\{\{2n\} : \ n \in \mathbb{N}\big\} \\
\mathcal{S}_5 &= \big\{\{2n-1\} : \ n \in \mathbb{N}\big\}
\end{aligned}
$$

■

Definícia 7.2.2 — Rozklad množiny. Rozklad množiny $\mathbb{X}$ je taký systém $\mathcal{R}$ jej neprázdnych podmnožín, že každý prvok $x \in \mathbb{X}$ patrí práve do jednej množiny $R \in \mathcal{R}$. Množiny $R \in \mathcal{R}$ sa nazývajú triedy rozkladu $\mathcal{R}$.

■ **Príklad 7.4**

- $\mathcal{S}_2$ z príkladu 7.3 je rozklad množiny reálnych čísel $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{S}_3$ z príkladu 7.3 je rozklad množiny prirodzených čísel $\mathbb{N}$.
- $\mathcal{S}_4 \cup \mathcal{S}_5$ z príkladu 7.3 je tiež rozklad množiny prirodzených čísel $\mathbb{N}$.

■

■ **Príklad 7.5** Majme množinu $\mathbb{X} = \{1,2,3,4,5\}$. Potom

$$\mathcal{R}_1 = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5\}\} \qquad \text{a} \qquad \mathcal{R}_2 = \{\{1,3,5\},\{2\},\{4\}\}$$

sú dva rôzne rozklady množiny $\mathbb{X}$ a

$$\mathcal{R}_3 = \{\{1,3\},\{2,4\}\} \qquad \text{a} \qquad \mathcal{R}_4 = \{\{1,2,3\},\{3,4,5\}\}$$

nie sú rozklady množiny $\mathbb{X}$. Žiadna z množín v $\mathcal{R}_3$ neobsahuje číslo 5 a v prípade $\mathcal{R}_4$ je číslo 3 v dvoch rôznych množinách. ■

■ **Príklad 7.6** Nech $\mathbb{X}$ je množina študentov v poslucharni, na prednáške z diskrétnej matematiky. Ďalej nech R_i, pre $i = 1,2,\dots,n$, označuje množinu študentov sediacich v i. rade poslucháreň. Potom samozrejme platí $\forall i : R_i \subseteq \mathbb{X}$ a $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ je rozklad množiny $\mathbb{X}$. Prečo? ■

7.2.2 Relácia ekvivalencie

Ak máme akúkoľvek množinu $\mathbb{X}$ a jej rozklad $\mathcal{R}$, tak tento rozklad úplne prirodzeným spôsobom definuje binárnu reláciu $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}$ predpisom

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{X}^2 : \ \big((x,y) \in \mathfrak{R}\big) \ \Leftrightarrow \ \big(\exists\, R \in \mathcal{R} : \ x,y \in R\big)$$

Inak povedané, dva prvky množiny $\mathbb{X}$ sú v relácii práve vtedy, keď patria do rovnakej triedy rozkladu $\mathcal{R}$.

Ak by sme si zobrali rozklad z príkladu 7.6, tak relácia medzi študentami bude definovaná tak, že dvaja študenti budú v relácii práve vtedy, ak sedia v rovnakom rade poslucháreň. Táto relácia je pritom reflexívna, symetrická a tranzitívna. Vieme to ľahko overiť a platí to aj všeobecne, ako ukážeme v nasledujúcej vete.

Veta 7.2.1 — O relácii danej rozkladom množiny. Nech $\mathcal{R}$ je rozklad množiny $\mathbb{X}$ a relácia $\mathfrak{R}$ je týmto rozkladom definovaná predpisom

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{X}^2 : \ \big((x,y) \in \mathfrak{R}\big) \ \Leftrightarrow \ \big(\exists\, R \in \mathcal{R} : \ (x \in R) \ \wedge \ (y \in R)\big)$$

Potom relácia $\mathfrak{R}$ je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

Dôkaz:

- **reflexívna –** Priamo z definície rozkladu množiny a definície relácie $\mathfrak{R}$ platí
$$\forall\, x \in \mathbb{X} : \ \big(\exists\, R \in \mathcal{R} : \ (x \in R)\big) \ \Rightarrow \ \big((x,x) \in \mathfrak{R}\big),$$
a preto je relácia $\mathfrak{R}$ reflexívna.
- **symetrická –** Platí $\big((x \in R) \ \wedge \ (y \in R)\big) \ \Leftrightarrow \ \big((y \in R) \ \wedge \ (x \in R)\big)$. Preto podľa definície relácie $\mathfrak{R}$ platí $\big((x,y) \in \mathfrak{R}\big) \ \Leftrightarrow \ \big((y,x) \in \mathfrak{R}\big)$, čiže relácia $\mathfrak{R}$ je symetrická.
- **tranzitívna –** Nech $(x,y) \in \mathfrak{R}$ a $(y,z) \in \mathfrak{R}$. Potom podľa definície relácie $\mathfrak{R}$ musí existovať nejaká trieda rozkladu, označme si ju $R_1 \in \mathcal{R}$, taká, že $(x \in R_1) \ \wedge \ (y \in R_1)$. Rovnako, vzhľadom na to že $(y,z) \in \mathfrak{R}$, musí existovať aj trieda rozkladu, označme si ju $R_2 \in \mathcal{R}$, taká, že $(y \in R_2) \ \wedge \ (z \in R_2)$. Avšak, podľa definície rozkladu množiny, prvok y nemôže patriť do dvoch rôznych tried rozkladu, takže platí $R_1 = R_2 = R$ a $(x \in R) \ \wedge \ (y \in R) \ \wedge \ (z \in R)$. Potom však $(x,z) \in \mathfrak{R}$ a relácia $\mathfrak{R}$ je tranzitívna.

Q.E.D.

■ **Príklad 7.7** Majme množinu $\mathbb{X} = \{1,2,3,4,5,6\}$ a jej rozklad $\mathcal{R} = \big\{\{1,3,5\},\{2,6\},\{4\}\big\}$. Potom relácia $\mathfrak{R}$ definovaná týmto rozkladom bude

$$\mathfrak{R} = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5),(4,4),(5,1),(5,3),(5,5),(6,2),(6,6)\}$$

■

Majme rozklad $\mathcal{R}$ množiny $\mathbb{X}$ a reláciu $\mathfrak{R}$ definovanú týmto rozkladom, Potom prvky množiny $\mathbb{X}$, ktoré patria do rovnakej triedy rozkladu, považujeme za ekvivalentné, rovnocenné, v zmysle relácie $\mathfrak{R}$. Ak si napríklad zoberieme množinu, jej rozklad a reláciu ním definovanú, z príkladu 7.6, tak dvaja študenti budú v tejto relácii „ekvivalentní“, ak sedia v rovnakom rade poslucháme. Takto chápaná ekvivalencia, rovnocennosť, je motiváciou pre nasledujúcu definíciu.

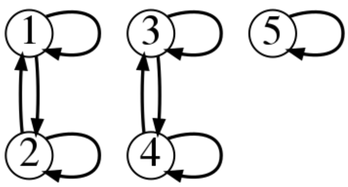
Definícia 7.2.3 — Relácia ekvivalencie. Binárna relácia na množine $\mathbb{X}$, ktorá je reflexívna, symetrická a tranzitívna, sa nazýva relácia ekvivalencie na množine $\mathbb{X}$.

Napríklad relácia z príkladu 7.7 je reláciou ekvivalencie na množine $\mathbb{X} = \{1,2,3,4,5,6\}$. Buď priamo z množinového zápisu, alebo z orientovaného grafu tejto relácie sa ľahko môžeme presvedčiť, že je reflexívna, symetrická aj tranzitívna. Okrem toho to vyplýva aj z vety 7.2.1, keďže sa jedná o reláciu definovanú rozkladom množiny $\mathbb{X}$.

■ **Príklad 7.8** Nech

$$\mathfrak{R} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(5,5)\}$$

je relácia na množine $\mathbb{X} = \{1,2,3,4,5\}$. Orientovaný graf tejto relácie je na nasledovnom obrázku



a z tohto grafu, ako aj z množinového zápisu danej relácie, vieme ľahko overiť, že táto relácia je reflexívna, symetrická aj tranzitívna. Takže $\mathfrak{R}$ je relácia ekvivalencie.
Presne podľa toho istého predpisu, ktorým sme pomocou rozkladu množiny definovali reláciu, vieme pomocou relácie definovať rozklad množiny.

V tomto príklade dostaneme rozklad $\mathcal{R} = \big\{\{1,2\},\{3,4\},\{5\}\big\}$. Podrobnejšie sa tomu budeme venovať v nasledujúcom texte. ■

Uvedieme si teraz dva príklady relácií, ktoré nie sú reláciami ekvivalencie.

■ **Príklad 7.9** Majme reláciu $\mathfrak{R}$ na množine celých čísel definovanú predpisom

$$\mathfrak{R} = \{(x,y);\ \big(x \le y\big) \ \wedge\ \big((x,y) \in \mathbb{Z}^2\big)\}.$$

Relácia $\mathfrak{R}$ je reflexívna, je aj tranzitívna, ale nie je symetrická. Napríklad $(2,3) \in \mathfrak{R}$, ale $(3,2) \notin \mathfrak{R}$. Takže táto relácia nie je reláciou ekvivalencie. Je však čiastočné usporiadanie, pretože je reflexívna, antisymetrická aj tranzitívna. ■

■ **Príklad 7.10** Majme reláciu $\mathfrak{R} = \{(a,a),(b,c),(c,b),(d,d)\}$ na množine $\mathbb{X} = \{a,b,c,d\}$. Táto relácia nie je reflexívna, pretože $(b,b) \notin \mathfrak{R}$ a $(c,c) \notin \mathfrak{R}$. Takže nie je to relácia ekvivalencie. ■

Veta 7.2.1 hovorí nielen o relácii definovanej rozkladom, ale aj o rozklade definovanom reláciou. V predpise

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{X}^2 :\ \big((x,y) \in \mathfrak{R}\big) \ \Leftrightarrow\ \big(\exists\, R \in \mathcal{R} :\ (x \in R) \ \wedge\ (y \in R)\big)$$

je medzi reláciou $\mathfrak{R}$ a príslušnosťou prvkov množiny do triedy R rozkladu $\mathcal{R}$ ekvivalencia ($\Leftrightarrow$). Rovnako ako je každým rozkladom danej množiny prirodzene definovaná relácia ekvivalencie na tejto množine, je aj každou reláciou ekvivalencie na množine prirodzene definovaný rozklad tejto množiny.

Definícia 7.2.4 — Triedy ekvivalencie. Nech $\mathfrak{R}$ je relácia ekvivalencie na množine $\mathbb{X}$. Potom pre $\forall a \in \mathbb{X}$ definujme

$$[a] = \left\{x \in \mathbb{X};\ (a,x) \in \mathfrak{R}\right\}.$$

Množinu $[a]$ nazývame trieda ekvivalencie prvku a v relácii $\mathfrak{R}$.

Trieda ekvivalencie prvku $a \in \mathbb{X}$ je teda tvorená všetkými tými prvkami množiny $\mathbb{X}$, ktoré sú s prvkom a v relácii $\mathfrak{R}$, čiže sú s ním „ekvivalentné“.

■ **Príklad 7.11** Zoberme si reláciu ekvivalencie z príkladu 7.8. Je to relácia

$$\mathfrak{R} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(5,5)\}$$

na množine $\mathbb{X} = \{1,2,3,4,5\}$. Triedy ekvivalencie tejto relácie sú

$$[1] = \{x \in \mathbb{X};\ (1,x) \in \mathfrak{R}\} = \{1,2\} \qquad [3] = \{x \in \mathbb{X};\ (3,x) \in \mathfrak{R}\} = \{3,4\}$$

$$[2] = \{x \in \mathbb{X};\ (2,x) \in \mathfrak{R}\} = \{1,2\} \qquad [4] = \{x \in \mathbb{X};\ (4,x) \in \mathfrak{R}\} = \{3,4\}$$

$$[5] = \{x \in \mathbb{X};\ (5,x) \in \mathfrak{R}\} = \{5\}$$

Ako vidíme, platí $[1] = [2]$ a $[3] = [4]$ a triedy ekvivalencie dané reláciou $\mathfrak{R}$ tvoria rozklad $\mathcal{R} = \big\{\{1,2\},\{3,4\},\{5\}\big\} = \big\{[1],[3],[5]\big\} = \big\{[1],[2],[3],[4],[5]\big\}$ množiny $\mathbb{X}$. ■

P Rovnosť $\big\{[1],[3],[5]\big\} = \big\{[1],[2],[3],[4],[5]\big\}$, uvedená v predošlom príklade platí na základe definície množiny (definícia 1.1.1) a platnosti rovností $[1] = [2]$ a $[3] = [4]$. Na počte opakovaní rovnakých prvkov totiž v množine nezáleží. Platí $\{a,b,c\} = \{a,a,b,c,c\}$.

To, že triedy ekvivalencie definovanej reláciou ekvivalencie tvoria rozklad množiny, ako bolo ukázané v príkladoch 7.8 a 7.11, nie je náhoda. Platí to všeobecne. Triedy ekvivalencie a nimi daný rozklad množiny, pekne vidno na obrázku orientovaného grafu v príklade 7.8 na strane 140. Triedy ekvivalencie, resp. nimi daný rozklad množiny, sú tam komponenty súvislosti orientovaného grafu. Ako už bolo spomenuté, skutočnosť, že triedy ekvivalencie definované reláciou ekvivalencie tvoria rozklad množiny, platí všeobecne a sformulujeme to v nasledujúcej vete.

Veta 7.2.2 — O rozklade danom reláciou ekvivalencie. Ak $\mathfrak{R}$ je relácia ekvivalencie na množine $\mathbb{X}$, tak $\mathcal{R} = \big\{\,[a]:\ a \in \mathbb{X}\,\big\}$ je rozklad množiny $\mathbb{X}$.

Dôkaz: Treba ukázať, že každý prvok $\mathbb{X}$ patrí práve jednému prvku systému množín $\mathcal{R}$.

- ▷ Nech $a \in \mathbb{X}$. Relácia $\mathfrak{R}$ je reflexívna, t. j. $(a,a) \in \mathfrak{R}$, a preto podľa definície 7.2.4 $a \in [a]$. Takže každý prvok množiny $\mathbb{X}$ patrí aspoň jednému prvku systému množín $\mathcal{R}$.
- ▷ Potrebujeme ešte ukázať, že $\forall a \in \mathbb{X}$ patrí práve jednému prvku systému množín $\mathcal{R}$. To ukážeme sporom. Pre $\forall a \in \mathbb{X}$ platí $a \in [a]$. Predpokladajme, že existuje $b \in \mathbb{X}$ také, že platí $\big(a \in [b]\big) \wedge \big([a] \neq [b]\big)$. Nerovnosť $[a] \neq [b]$ znamená, že $\exists c \in \mathbb{X}:\ \big(c \in [a]\big) \wedge \big(c \notin [b]\big)$ Prípad $\big(c \notin [a]\big) \wedge \big(c \in [b]\big)$ sa dokazuje takmer rovnakým spôsobom, naviac sa ešte využíva to, že relácia $\mathfrak{R}$ je symetrická. Ale $c \in [a] \Rightarrow (a,c) \in \mathfrak{R}$. Ďalej $a \in [b] \Rightarrow (b,a) \in \mathfrak{R}$. Keďže $(b,a) \in \mathfrak{R}$ a $(a,c) \in \mathfrak{R}$ a relácia $\mathfrak{R}$ je tranzitívna, tak aj $(b,c) \in \mathfrak{R}$ a potom platí $c \in [b]$, čo je spor s $c \notin [b]$, a preto musí platiť $[a] = [b]$.

Q.E.D.

P Vo vete 7.2.2 sme okrem iného ukázali, že dve rôzne triedy ekvivalencie sú disjunktné, čiže $\forall a,b \in \mathbb{X}: \ \big([a] \neq [b]\big) \Rightarrow \big([a] \cap [b] = \emptyset\big)$. Takže systém tried ekvivalencie na množine $\mathbb{X}$ tvorí rozklad množiny $\mathbb{X}$.

Vety 7.2.1 a 7.2.2 spolu hovoria o jednoznačnej korešpondencii medzi reláciami ekvivalencie na množine $\mathbb{X}$ a rozkladmi množiny $\mathbb{X}$.

■ **Príklad 7.12** Majme na množine celých čísel danú reláciu

$$\mathfrak{R} = \{(x,y);\ 3 \mid (y-x) \wedge (x,y) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Ľahko sa overí, že táto relácia je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

▷ **reflexívna –** pre $\forall x \in \mathbb{Z}$ platí $x - x = 0$ a $3 \mid 0$. Preto $(x,x) \in \mathfrak{R}$, t. j. relácia $\mathfrak{R}$ je reflexívna.

▷ **symetrická –** Ak $(x,y) \in \mathfrak{R}$, tak $3 \mid (y-x)$. To znamená, že $\exists k \in \mathbb{Z}$ také, že platí $y - x = 3k$. Ale potom $x - y = -3k$ a $(k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (-k \in \mathbb{Z})$, čiže $\big(3 \mid (x-y)\big) \Rightarrow \big((y,x) \in \mathfrak{R}\big)$, a preto je relácia $\mathfrak{R}$ symetrická.

▷ **tranzitívna –** Nech $(x,y) \in \mathfrak{R}$ a $(y,z) \in \mathfrak{R}$. To znamená, že existujú celé čísla $k,l \in \mathbb{Z}$ také, že platí $(y - x = 3k) \wedge (z - y = 3l)$. Ale ak posledné dve rovnosti sčítame, tak dostaneme $z - x = 3(k+l)$, čiže $\big(3 \mid (z-x)\big) \Rightarrow \big((x,z) \in \mathfrak{R}\big)$, t. j. relácia $\mathfrak{R}$ je tranzitívna.

Ukázali sme, že $\mathfrak{R}$ je reláciou ekvivalencie na množine celých čísel a definuje na nej rozklad, ktorý bude mať tri triedy ekvivalencie.

$$\begin{aligned}
[0] &= \{x \in \mathbb{Z};\ 3 \mid (x-0)\} = \{x;\ x - 0 = 3k,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{3k;\ k \in \mathbb{Z}\} \\
[1] &= \{x \in \mathbb{Z};\ 3 \mid (x-1)\} = \{x;\ x - 1 = 3k,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{3k+1;\ k \in \mathbb{Z}\} \\
[2] &= \{x \in \mathbb{Z};\ 3 \mid (x-2)\} = \{x;\ x - 2 = 3k,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{3k+2;\ k \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

Iné triedy ekvivalencie už neexistujú, pretože každé celé číslo sa dá zapísať v tvare $3k$, $3k+1$ alebo $3k+2$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Takýto rozklad množiny celých čísel sa nazýva aj rozklad na zvyškové triedy. Do tej istej triedy ekvivalencie patria všetky celé čísla, ktoré dávajú rovnaký zvyšok po delení číslom 3. ■

7.3 Funkcie

S funkciami sa študenti FEI STU stretli už aj na predmetoch *Matematika 1* a *Matematika 2*. Na týchto predmetoch sa funkcie skúmajú z pohľadu matematickej analýzy, t. j. hľadajú sa definičné obory, obory funkčných hodnôt, predpisy inverzných funkcií, limity, derivácie, integrály, ...

Teraz sa budeme zaoberať funkciami z iného pohľadu. Funkcie jednej premenej budeme skúmať ako špeciálny prípad binárnych relácií, inverzné funkcie ako špeciálny prípad inverzných relácií a zložené funkcie ako špeciálny prípad zložených relácií. Ilustrujeme si to na jednoduchom príklade.

■ **Príklad 7.13** Zoberme si funkciu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanú predpisom $f(x) = x^2$. Potom

- pre $x = 0$ máme $f(0) = 0$,
- pre $x = 2$ máme $f(2) = 4$,
- pre $x = 4$ máme $f(4) = 16, \ldots$

Uvedené priradenia môžeme zapísať aj ako usporiaadné dvojice $(0,0), (2,4), (4,16), \ldots$ a na množinu týchto usporiadaných dvojíc sa potom môžeme pozerať ako na binárnu reláciu na reálnych číslach. ■

Funkciu si teraz definujeme ako istý druh množiny usporiadaných dvojíc.

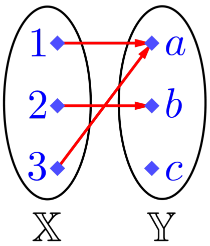
Definícia 7.3.1 — Funkcia. Nech $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ sú množiny. Funkcia f z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$, zapisujeme $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, je taká podmnožina kartézskeho súčinu $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, že pre každé $x \in \mathbb{X}$ existuje práve jedno $y \in \mathbb{Y}$ také, že $(x,y) \in f$.
Množina $\mathbb{X}$ sa nazýva *obor*, alebo *definičný obor*, funkcie f a množina $\mathbb{Y}$ sa nazýva *koobor* funkcie f. Množina $\{y;\ y \in \mathbb{Y} \wedge \big(\exists x \in \mathbb{X} :\ (x,y) \in f\big)\big\}$ sa nazýva *obor hodnôt* funkcie f. Definičný obor funkcie f sa zvykne označovať $D(f)$ a obor funkčných hodnôt funkcie f sa zvykne označovať $H(f)$ a platí $H(f) \subseteq \mathbb{Y}$.

P

- Niekedy sa za definičný obor neberie celá množina $\mathbb{X}$ $\big(D(f) = \mathbb{X}\big)$, ale len jej podmnožina $\big(D(f) \subset \mathbb{X}\big)$. Funkciám, pre ktoré $D(f) \subset \mathbb{X}$, sa niekedy vraví aj *parciálne funkcie*.
- Skutočnosť, že existuje *práve jedno $x \in \mathbb{X}$* sa zapisuje ako $\exists!\, x \in \mathbb{X}$.

Vidíme, že medzi binárnymi reláciami a funkciami, tak ako sú definované v definícii 7.3.1, je úzky vzájomný vzťah. Funkcia $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ je zároveň binárna relácia z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$ a za istých podmienok to platí aj opačne. Napríklad funkciu z príkladu 7.13 môžeme zapísať aj ako $f = \{(x,x^2) :\ x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Na nasledujúcich troch príkladoch si ukážeme, kedy daná relácia je a kedy nie je funkciou.

■ **Príklad 7.14** Majme binárnu reláciu[1] $f = \{(1,a),(2,b),(3,a)\}$ z množiny $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$ do množiny $\mathbb{Y} = \{a,b,c\}$.

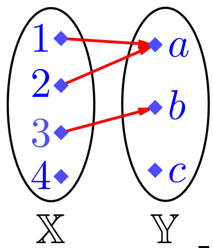


Podľa definície 7.3.1, je $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ funkcia z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$. Šípkový diagram tejto relácie / funkcie vidíme na obrázku vľavo. Každému vzoru, prvku množiny $\mathbb{X}$, prislúcha jeden obraz, prvok množiny $\mathbb{Y}$. ■

Ukážeme si aj dva príklady relácií, ktoré nie sú funkciami.

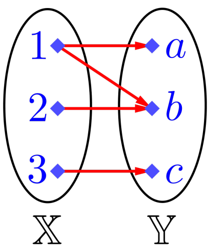
■ **Príklad 7.15** Majme binárnu reláciu $g = \{(1,a),(2,a),(3,b)\}$ z množiny $\mathbb{X} = \{1,2,3,4\}$ do množiny $\mathbb{Y} = \{a,b,c\}$.

Podľa definície 7.3.1 relácia g z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$ nie je funkcia. Šípkový diagram tejto relácie vidíme na obrázku vpravo. Prvok $4 \in \mathbb{X}$ nemá v relácii g obraz z množiny $\mathbb{Y}$. Relácia g je len parciálna funkcia s definičným oborom $D(g) = \{1,2,3\} \subset \mathbb{X}$.



■

■ **Príklad 7.16** Majme binárnu reláciu $h = \{(1,a),(1,b),(2,b),(3,c)\}$ z množiny $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$ do množiny $\mathbb{Y} = \{a,b,c\}$.



Podľa definície 7.3.1 relácia h z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$ nie je funkcia. Šípkový diagram tejto relácie vidíme na obrázku vľavo. Prvok $1 \in \mathbb{X}$ má dva rôzne obrazy v množine $\mathbb{Y}$. ■

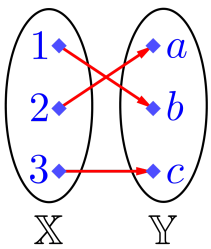
[1] V podkapitole o funkciách budeme binárne relácie označovať malými písmenami latinskej abecedy.

Vlastnosti funkcií ako sú injektívnosť, surjektívnosť a bijektívnosť vieme pre funkcie zadané pomocou relácií definovať analogicky ku definíciam týchto vlastností, ktoré poznáme z matematickej analýzy.

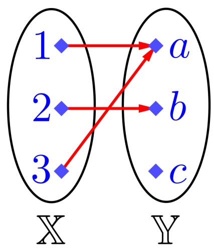
Definícia 7.3.2 — Injektívna funkcia. Funkcia $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ sa nazýva injektívna, niekedy len stručne injekcia, alebo po slovensky prostá, ak pre každé $y \in \mathbb{Y}$ existuje najviac jedno $x \in \mathbb{X}$ také, že $f(x) = y$.

P Uvedená definícia injektívnej funkcie presne zodpovedá tej, s ktorou sme sa už stretli na matematickej analýze.

■ **Príklad 7.17** Ukážeme si príklady dvoch funkcií, z ktorých jedna je a druhá nie je, injektívna. Obe funkcie budú z množiny $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$ do množiny $\mathbb{Y} = \{a,b,c\}$ a zadáme ich šípkovým diagramom.



Táto funkcia je injektívna.



Funkcia z príkladu 7.14 nie je injektívna.

■

Podmienka injektívnosti, uvedená v definícii 7.3.2, sa dá zapísať a v matematickej analýze sa obvykle aj zapisuje ako

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{X} : \ (x_1 \neq x_2) \Rightarrow \big(f(x_1) \neq f(x_2)\big),$$

alebo, čo je ekvivalentné (veta o obmenenej implikácii), ako

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{X} : \ \big(f(x_1) = f(x_2)\big) \Rightarrow (x_1 = x_2).$$

Ďalšou vlastnosťou funkcií, ktorú si definujeme, je surjektívnosť.

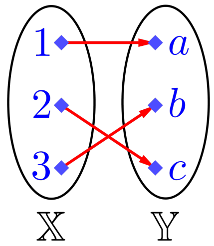
Definícia 7.3.3 — Surjektívna funkcia. Funkcia $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ sa nazýva surjektívna, niekedy len stručne surjekcia, ak platí $H(f) = Y$.

P V slovenskej terminológii sa surjekcia zvykne nazývať aj „funkcia na množinu …“. Napríklad, ak by sme mali surjektívnu funkciu $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, tak by sme povedali *„$f$ je funkcia na množinu $\mathbb{Y}$.“*

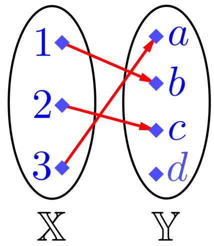
Podmienka surjektívnosti, uvedená v definícii 7.3.3, sa dá ekvivalentne zapísať a v matematickej analýze sa väčšinou aj zapisuje ako

$$(\forall y \in \mathbb{Y})\,(\exists x \in \mathbb{X}) : \ f(x) = y.$$

■ **Príklad 7.18** Ukážeme si príklady dvoch funkcií, z ktorých jedna je a druhá nie je surjektívna. Obe funkcie zadáme šípkovým diagramom.



Táto funkcia je surjektívna.



Táto funkcia nie je surjektívna. ■

Keď už máme definovanú injektívnosť a surjektívnosť, môžeme tieto dve vlastnosti spojiť a definovať bijektívnosť.

Definícia 7.3.4 — Bijektívna funkcia. Funkcia $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, ktorá je súčasne injektívna aj surjektívna, sa nazýva bijektívna funkcia, alebo stručne bijekcia.

Funkcie uvedené v príkladoch 7.17 a 7.18 vľavo, t. j. tie ktoré sú injektívne, resp. surjektívne, sú zároveň aj bijekciami, čiže majú obe uvedené vlastnosti. O bijektívnych funkciách platí nasledujúca veta.

Veta 7.3.1 — O inverznej funkcii. Ak $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ je bijektívna funkcia, tak relácia definovaná predpisom

$$f^{-1} = \{(y,x);\ (x,y) \in f\}$$

je bijektívna funkcia z množiny $\mathbb{Y}$ do množiny $\mathbb{X}$. Funkcia f^{-1} sa nazýva inverzná funkcia ku funkcii f.

Dôkaz: musíme dokázať, že f^{-1} je funkcia a naviac aj bijekcia.

1. **f^{-1} je funkcia** Funkcia f je injekcia a zároveň surjekcia.
   - ▷ Funkcia f je surjekcia. To, podľa definície 7.3.3 a poznámky za ňou, znamená že $\Big((\forall y \in \mathbb{Y})\,(\exists x \in \mathbb{X}) :\ f(x) = y\Big) \Leftrightarrow \Big((\forall y \in \mathbb{Y})\,(\exists x \in \mathbb{X}) :\ (x,y) \in f\Big)$, takže podľa definície relácie f^{-1} platí $(\forall y \in \mathbb{Y})\,(\exists x \in \mathbb{X}) :\ (y,x) \in f^{-1}$.
   - ▷ Funkcia f je injekcia. To, podľa definície 7.3.2 znamená, že pre $\forall y \in \mathbb{Y}$ existuje najviac jedno $x \in \mathbb{X}$ také, že $\big((x,y) \in f\big) \Leftrightarrow \big((y,x) \in f^{-1}\big)$.

   Uvedené dva body hovoria o tom, že pre každé $y \in \mathbb{Y}$ existuje práve jedno $x \in \mathbb{X}$ také, že $(y,x) \in f^{-1}$. Takže podľa definície 7.3.1 je f^{-1} funkcia z množiny $\mathbb{Y}$ do množiny $\mathbb{X}$.
2. **f^{-1} je bijekcia** Potrebujeme ukázať, že funkcia f^{-1} je injektívna a súčasne surjektívna.
   - ▷ f je funkcia, čiže pre $\forall x \in \mathbb{X}$ existuje práve jedno $y \in \mathbb{Y}$ také, že $(x,y) \in f$ alebo ekvivalentne $(y,x) \in f^{-1}$. To potom znamená, že f^{-1} je injekcia, pretože nemôžu existovať $y_1, y_2 \in \mathbb{Y} :\ y_1 \neq y_2$ také, že $(y_1,x) \in f^{-1}$ aj $(y_2,x) \in f^{-1}$.
   - ▷ Platí, že $D(f) = \mathbb{X}$, pretože f je funkcia. Takže platí

     $$(\forall x \in \mathbb{X})\,(\exists y \in \mathbb{Y}) :\ \big((x,y) \in f\big) \Leftrightarrow \big((y,x) \in f^{-1}\big),$$

     čo znamená, že f^{-1} je surjektívna funkcia.

Tým sme dokázali, že f^{-1} je funkcia a je injektívna a surjektívna súčasne, t. j. f^{-1} je bijektívna funkcia. Q.E.D.

P V matematickej analýze sa pod pojmom *funkcia* obvykle myslí to, čo my nazývame *parciálna funkcia* (viď poznámka za definíciou 7.3.1). Rozdiel medzi funkciou a parciálnou funkciou v našom podaní je v tom, že pre funkciu platí $D(f) = \mathbb{X}$ a pre pre parciálnu funkciu platí $D(f) \subseteq \mathbb{X}$. Veta 7.3.1 pre parciálne funkcie neplatí. Pre parciálne funkcie platí takáto veta:

Veta: *Nech $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ je injektívna parciálna funkcia. Potom funkcia definovaná predpisom*

$$f^{-1} = \{(y,x);\ (x,y) \in f\}$$

je injektívna parciálna funkcia z množiny $\mathbb{Y}$ do množiny $\mathbb{X}$. Funkcia f^{-1} sa nazýva inverzná funkcia ku funkcii f.

Ak bijektívnu funkciu $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ chápeme ako reláciu $\mathfrak{R}_f$ medzi množinami $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$, tak inverzná funkcia f^{-1} zodpovedá inverznej relácii $\mathfrak{R}_f^{-1}$.

■ **Príklad 7.19** Majme bijektívnu funkciu / reláciu $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ z množiny $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$ do množiny $\mathbb{Y} = \{a,b,c\}$, definovanovanú predpisom

$$f = \{(1,a),(2,c),(3,b)\} = \mathfrak{R}_f.$$

Potom inverzná funkcia / relácia $f^{-1} : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ bude mať predpis

$$f^{-1} = \{(a,1),(b,3),(c,2)\} = \mathfrak{R}_f^{-1}.$$

■

Funkcia je teda len špeciálny prípad relácie rovnako ako inverzná funkcia je len špeciálny prípad inverznej relácie. A keďže relácie možno aj skladať, nebude žiadnym prekvapením, že zložená funkcia je len špeciálny prípad zloženej relácie.

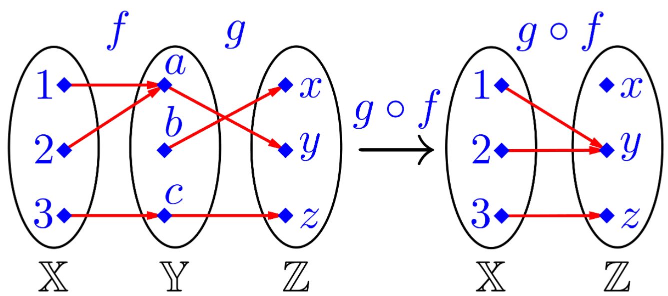
Definícia 7.3.5 — Zložená funkcia. Nech $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ a $g : \mathbb{Y} \to \mathbb{Z}$. Zloženou funkciou $g \circ f : \mathbb{X} \to \mathbb{Z}$ nazývame funkciu danú predpisom

$$\big(g \circ f\big)(x) = g\big(f(x)\big).$$

■ **Príklad 7.20** Nech $f = \{(1,a),(2,a),(3,c)\}$ je funkcia z množiny $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$ do množiny $\mathbb{Y} = \{a,b,c\}$ a $g = \{(a,y),(b,x),(c,z)\}$ je funkcia z množiny $\mathbb{Y} = \{a,b,c\}$ do množiny $\mathbb{Z} = \{x,y,z\}$. Potom $g \circ f : \mathbb{X} \to \mathbb{Z}$ bude funkcia

$$g \circ f = \{(1,y),(2,y),(3,z)\}.$$

Šípkový diagram funkcie $g \circ f$ bude



Funkciu f môžeme chápať aj ako reláciu $\mathfrak{R}_f \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ a funkciu g ako reláciu $\mathfrak{R}_g \subseteq \mathbb{Y} \times \mathbb{Z}$. Zložená funkcia $g \circ f$ potom presne zodpovedá zloženej relácii $\mathfrak{R}_g \circ \mathfrak{R}_f$ a aj ich šípkové diagramy sú zhodné. ■

7.4 Cvičenia

Cvičenie 7.1 O každej relácii z cvičení 6.4, 6.5 a 6.6 (strana 133) rozhodnite, či je to čiastočné usporiadanie. ■

Cvičenie 7.2 Maticou

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & & & & & \\ 2 & & & & & \\ 3 & & & & & \\ 4 & & & & & \\ 5 & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

je daná relácia $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X} = \{1,2,3,4,5\}$. Je táto relácia čiastočným usporiadaním? ■

Cvičenie 7.3 Nasledujúce relácie sú všetky na množine prirodzených čísel $\mathbb{N}$. O každej z nich rozhodnite či je to čiastočné usporiadanie.

(a) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x = y^2 \wedge (x,y) \in \mathbb{N}^2\}$
(b) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ 3 \mid (x-y) \wedge (x,y) \in \mathbb{N}^2\}$
(c) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ 3 \mid (x+2y) \wedge (x,y) \in \mathbb{N}^2\}$
(d) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ |x-y| = 2 \wedge (x,y) \in \mathbb{N}^2\}$
(e) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x-y = 2 \wedge (x,y) \in \mathbb{N}^2\}$
(f) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x > y \wedge (x,y) \in \mathbb{N}^2\}$
(g) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x \geq y \wedge (x,y) \in \mathbb{N}^2\}$

■

Cvičenie 7.4 O každej z nasledujúcich relácií na danej množine $\mathbb{X}$ overte, či je to čiastočné usporiadanie.

(a) $\mathbb{X} = \{a,b,c,d\}$ a $\mathfrak{R} = \{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c),(b,d),(c,d),(d,d)\}$
(b) $\mathbb{X} = \{0,1,2\}$ a $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x \leq y \wedge (x,y) \in \mathbb{X}^2\}$
(c) $\mathbb{X} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ a $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ 3 \mid (y-x) \wedge (x,y) \in \mathbb{X}^2\}$
(d) $\mathbb{X} = \mathbb{N}$ a $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x < 1+y \wedge (x,y) \in \mathbb{X}^2\}$
(e) $\mathbb{X} = \mathbb{Z}$ a $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x < 1-y \wedge (x,y) \in \mathbb{X}^2\}$
(f) $\mathbb{X} = \mathbb{Z}$ a $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x \mid y^2 \wedge (x,y) \in \mathbb{X}^2\}$
(g) $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ a $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x.y \in \mathbb{Q} \wedge (x,y) \in \mathbb{X}^2\}$
(h) $\mathbb{X} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a $(a,b)\,\mathfrak{R}\,(c,d) \Leftrightarrow \Big((a+b \leq c) \wedge (b \leq d) \wedge \big((a,b),(c,d) \in \mathbb{X}\big)\Big)$

■

Cvičenie 7.5 Nech $\mathbb{X} \neq \emptyset$. Definujeme reláciu $\mathfrak{R}$ na potenčnej množine $\mathscr{P}(\mathbb{X})$ predpisom $(\mathbb{A},\mathbb{B}) \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow (\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B})$. Je táto relácia čiastočné usporiadanie? ■

Cvičenie 7.6 O každej relácii z cvičení 6.11 (strana 134), 6.12 c) a 6.15 (strana 135) zistite z jej maticovej reprezentácie, či je čiastočným usporiadaním. ■

Cvičenie 7.7 Nech relácia $\mathfrak{R}_1$ je čiastočné usporiadanie na množine $\mathbb{X}_1$ a relácia $\mathfrak{R}_2$ je čiastočné usporiadanie na množine $\mathbb{X}_2$. Dokážte, že relácia $\mathfrak{R}$ definovaná predpisom

$$(x_1,x_2)\,\mathfrak{R}\,(x_3,x_4) \iff \Big((x_1\,\mathfrak{R}_1\,x_3) \wedge (x_2\,\mathfrak{R}_2\,x_4)\Big)$$

je čiastočné usporiadanie na množine $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$. ■

Cvičenie 7.8 Nech $\mathbb{X}$ je množina všetkých 4-bitových reťazcov. Každý bit má hodnotu 0 alebo 1. Definujeme reláciu $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}$ takto: $r_1 \mathfrak{R} r_2$ práve vtedy, keď nejaký podreťazec dĺžky 2 reťazca r_1 je rovnaký ako podreťazec dĺžky 2 reťazca r_2. Napríklad $0111 \mathfrak{R} 1010$, pretože oba reťazce obsahujú podreťazec 01, ale reťazce 1110 a 0001 nie sú v relácii, pretože neobsahujú spoločný podreťazec dĺžky 2. Je relácia $\mathfrak{R}$ čiastočné usporiadanie? ■

Cvičenie 7.9 Zistite, či sú nasledujúce relácie reláciami ekvivalencie na množine $\mathbb{A} = \{1,2,3,4,5\}$. Ak áno, vypíšte všetky triedy ekvivalencie.

(a) $\mathfrak{R} = \{(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,3),(4,4),(5,5)\}$
(b) $\mathfrak{R} = \{(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(5,5)\}$
(c) $\mathfrak{R} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
(d) $\mathfrak{R} = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(3,1),(3,3),(3,5),(4,4),(5,1),(5,3),(5,5)\}$
(e) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ (1 \le x \le 5) \wedge (1 \le y \le 5) \wedge (x,y) \in \mathbb{A}^2\}$
(f) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ 4 \mid (x-y) \wedge (x,y) \in \mathbb{A}^2\}$
(g) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ 3 \mid (x+y) \wedge (x,y) \in \mathbb{A}^2\}$
(h) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x \mid (2-y) \wedge (x,y) \in \mathbb{A}^2\}$ ■

Cvičenie 7.10 Ako musí vyzerať relácia ekvivalencie, ak má len jednu triedu ekvivalencie? ■

Cvičenie 7.11 Zistite, či sú dané relácie reláciami ekvivalencie na množine všetkých ľudí.

(a) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x$ je rovnako vysoký ako $y\}$
(b) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x$ žije v tom istom štáte ako $y\}$
(c) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x$ má to isté krstné meno ako $y\}$
(d) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x$ je vyšší než $y\}$
(e) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x$ má tých istých rodičov ako $y\}$
(f) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x$ má tú istú farbu vlasov ako $y\}$ ■

Cvičenie 7.12 Zapíšte ako množinu usporiadaných dvojíc reláciu ekvivalencie na množine $\{1,2,3,4\}$ danú príslušným rozkladom. Vypíšte aj všetky triedy ekvivalencie $[1],[2],[3],[4]$.

(a) $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$
(b) $\{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}$
(c) $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$
(d) $\{\{1,2,3\},\{4\}\}$
(e) $\{\{1,2,3,4\}\}$ ■

Cvičenie 7.13 Nech $\mathbb{X} = \{1,2,3,4,5\}$ a $\mathbb{Y} = \{3,4\}$. Definujme reláciu $\mathfrak{R}$ na množine $\mathscr{P}(\mathbb{X})$ predpisom $(\mathbb{A} \mathfrak{R} \mathbb{B}) \Leftrightarrow (\mathbb{A} \cup \mathbb{Y} = \mathbb{B} \cup \mathbb{Y})$.

(a) Dokážte, že $\mathfrak{R}$ je relácia ekvivalencie.
(b) Nájdite $[\mathbb{C}]$, pre $\mathbb{C} = \{1,3\}$.
(c) Koľko existuje rôznych tried ekvivalencie danej relácie $\mathfrak{R}$? ■

Cvičenie 7.14 Ak je $\mathfrak{R}$ relácia ekvivalencie na konečnej množine $\mathbb{X}$ a ak $|\mathbb{X}| = |\mathfrak{R}|$, tak čo vieme s istotou povedať o tom, ako musí relácia $\mathfrak{R}$ vyzerať? ■

Cvičenie 7.15 Uveďte príklad relácie ekvivalencie na množine $\{1,2,3,4,5,6\}$, ktorá má práve štyri triedy ekvivalencie. ■

Cvičenie 7.16 Koľko relácií ekvivalencie existuje na množine $\{1,2,3\}$? ■

Cvičenie 7.17 Definujme reláciu ρ na množine $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, t. j. množine všetkých funkcií $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, predpisom $(f \rho g) \Leftrightarrow \big(f(0) = g(0)\big)$.

(a) Dokážte, že ρ je relácia ekvivalencie na množine $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(b) Nech pre $\forall x \in \mathbb{R}:\ f(x) = x$. Popíšte $[f]$. ■

Cvičenie 7.18 Nech $\mathbb{X} = \{1,2,\ldots,10\}$. Definujme reláciu $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}^2$ predpisom $\big((a,b)\,\mathfrak{R}\,(c,d)\big) \Leftrightarrow (a+d = b+c)$.

(a) Dokážte, že $\mathfrak{R}$ je relácia ekvivalencie na množine $\mathbb{X}^2$.

(b) Vypíšte jeden prvok každej triedy ekvivalencie relácie $\mathfrak{R}$. ■

Cvičenie 7.19 Nech $\mathbb{X} = \{1,2,\ldots,10\}$. Definujme reláciu $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}^2$ predpisom $\big((a,b)\,\mathfrak{R}\,(c,d)\big) \Leftrightarrow (ad = bc)$. Dokážte, že $\mathfrak{R}$ je relácia ekvivalencie na množine $\mathbb{X}^2$. ■

Cvičenie 7.20 Nech $\mathfrak{R}$ je reflexívna a tranzitívna relácia na množine $\mathbb{X}$. Dokážte, že $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{R}^{-1}$ je relácia ekvivalencia na množine $\mathbb{X}$. ■

Cvičenie 7.21 Nech $\mathfrak{R}_1$ a $\mathfrak{R}_2$ sú dve relácie ekvivalencie na množine $\mathbb{X}$.

(a) Dokážte, že $\mathfrak{R}_1 \cap \mathfrak{R}_2$ je relácia ekvivalencie na množine $\mathbb{X}$.

(b) Popíšte triedy ekvivalencie $\mathfrak{R}_1 \cap \mathfrak{R}_2$ pomocou tried ekvivalencie relácií $\mathfrak{R}_1$ a $\mathfrak{R}_2$. ■

Cvičenie 7.22 Daná je funkcia $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$. Definujme reláciu $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}$ predpisom $\big(x \mathfrak{R} y\big) \Leftrightarrow \big(f(x) = f(y)\big)$. Dokážte, že $\mathfrak{R}$ je relácia ekvivalencie na množine $\mathbb{X}$. ■

V nasledujúcej úlohe budeme používať pojem „*charakteristická funkcia množiny*“, a preto si ho najskôr definujeme.

Definícia 7.4.1 — Charakteristická funkcia množiny. Nech $\mathscr{U}$ je univerzum a $\mathbb{A} \subseteq \mathscr{U}$. Potom pre $\forall x \in \mathscr{U}$ definujeme funkciu f predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{ak } x \in \mathbb{A} \\ 0\,, & \text{ak } x \notin \mathbb{A} \end{cases}$$

Takto definovaná funkcia $f : \mathbb{A} \to \{0,1\}$ sa nazýva charakteristická funkcia množiny $\mathbb{A}$.

Cvičenie 7.23 Nech $\mathscr{U}$ je univerzum, $\mathbb{A} \subseteq \mathscr{U}$ a f je charakteristická funkcia množiny $\mathbb{A}$. Na $\mathscr{U}$ definujeme reláciu $\mathfrak{R}$ predpisom $\big(x \mathfrak{R} y\big) \Leftrightarrow \big(f(x) = f(y)\big)$. Podla cvičenia 7.22 je $\mathfrak{R}$ relácia ekvivalencie na $\mathscr{U}$. Ako budú vyzerať triedy ekvivalencie pre reláciu $\mathfrak{R}$? ■

Cvičenie 7.24 Nech O je pevne daný bod v rovine. Nech $\mathfrak{R}$ je relácia ekvivalencie na množine všetkých bodov roviny daná predpisom $\big(A\mathfrak{R}B\big) \Leftrightarrow \big(|AO| = |BO|\big)$, kde $|AO|$, resp. $|BO|$ označujú dĺžky úsečiek AO, resp. BO. Načrtnite triedu ekvivalencie nejakého bodu $C \neq O$. ■

Cvičenie 7.25 Relácia ekvivalencie na množine $\mathbb{X}$ je daná maticou. Ako pomocou matice relácie určíme triedu ekvivalencie daného prvku $x \in \mathbb{X}$? ■

Cvičenie 7.26 Nájdite všetky triedy ekvivalencie relácie $\mathfrak{R}$ danej maticou

$$\mathfrak{R} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

■

Cvičenie 7.27 Ako len pomocou matice relácie zistíme, či je daná relácia funkciou? ■

Cvičenie 7.28 Nech A je matica funkcie $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ vzhľadom na nejaké usporiadanie množín $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$. Akú podmienku musí matica A spĺňať, aby funkcia f bola surjekcia? ■

Cvičenie 7.29 Pre každú z daných relácii $\mathfrak{R}$ z množiny $\mathbb{X} = \{1,2,3,4\}$ do množiny $\mathbb{Y} = \{a,b,c,d\}$ zistite, či sa jedná o funkciu. Pokiaľ je daná relácia funkcia, tak nájdite jej obor hodnôt, nakreslite jej šípkový diagram, zistite či sa jedná o injekciu, surjekciu, bijekciu. Pokiaľ je daná funkcia bijektívna, nájdite k nej inverznú funkciu.

(a) $\mathfrak{R} = \big\{(1,a),(2,a),(3,c),(4,b)\big\}$
(b) $\mathfrak{R} = \big\{(1,c),(2,a),(2,d),(3,b),(4,c)\big\}$
(c) $\mathfrak{R} = \big\{(1,c),(2,d),(3,a),(4,b)\big\}$
(d) $\mathfrak{R} = \big\{(1,d),(2,d),(4,a)\big\}$
(e) $\mathfrak{R} = \big\{(1,b),(2,b),(3,b),(4,b)\big\}$ ■

Cvičenie 7.30 Koľko existuje rôznych funkcií $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ z množiny $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$ do množiny $\mathbb{Y} = \{a,b,c,d\}$? ■

Cvičenie 7.31 Koľko existuje rôznych injektívnych funkcií $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, ak

(a) $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$ a $\mathbb{Y} = \{a,b,c,d\}$?
(b) $\mathbb{X} = \{1,2,3,4\}$ a $\mathbb{Y} = \{a,b,c,d\}$?
(c) $\mathbb{X} = \{1,2,3,4,5\}$ a $\mathbb{Y} = \{a,b,c,d\}$? ■

Cvičenie 7.32 Koľko existuje rôznych surjektívnych funkcií $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, ak

(a) $\mathbb{X} = \{1,2,3,4\}$ a $\mathbb{Y} = \{a,b,c,d\}$?
(b) $\mathbb{X} = \{1,2,3,4\}$ a $\mathbb{Y} = \{a,b,c\}$?
(c) $\mathbb{X} = \{1,2,3,4\}$ a $\mathbb{Y} = \{a,b,c,d,e\}$? ■

Cvičenie 7.33 Koľko existuje rôznych bijektívnych funkcií $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$, ak

(a) $\mathbb{X}=\{1,2,3,4\}$ a $\mathbb{Y}=\{a,b,c,d,e\}$?

(b) $\mathbb{X}=\{1,2,3,4,5\}$ a $\mathbb{Y}=\{a,b,c,d\}$?

(c) $\mathbb{X}=\{1,2,3,4,5\}$ a $\mathbb{Y}=\{a,b,c,d,e\}$? ■

Cvičenie 7.34 Koľko existuje rôznych bijektívnych funkcií $f:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ na množine $\mathbb{X}=\{1,2,\ldots,n\}$? ■

Cvičenie 7.35 Na množine $\mathbb{X}=\{a,b,c\}$ je daná funkcia $f=\{(a,b),(b,c),(c,b)\}$.

(a) Zapíšte zložené funkcie $f\circ f$ a $f\circ f\circ f$ ako množiny usporiadaných dvojíc.

(b) Zapíšte zložené funkcie $f\circ f$ a $f\circ f\circ f$ pomocou matíc.

(c) Definujeme funkciu

$$f^n=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n\text{-krát}}.$$

Zapíšte funkcie f^9 a f^{623} ako množiny usporiadaných dvojíc a pomocou matíc. ■

Cvičenie 7.36 Na množine $\mathbb{X}=\{0,1,2,3,4\}$ máme danú funkciu $f(x)=4x \pmod 5$. Zapíšte funkciu f ako množinu usporiadaných dvojíc a nakreslite jej šípkový diagram. Zistite či je funkcia f injekcia, surjekcia, bijekcia. ■

Cvičenie 7.37 Na množine $\mathbb{X}=\{0,1,2,3,4,5\}$ máme danú funkciu $f(x)=4x \pmod 6$. Zapíšte funkciu f ako množinu usporiadaných dvojíc a nakreslite jej šípkový diagram. Zistite či je funkcia f injekcia, surjekcia, bijekcia. ■

Cvičenie 7.38 Na množine $\mathbb{N}$ definujte funkciu, ktorá

(a) je injekcia, ale nie surjekcia.

(b) je surjekcia, ale nie injekcia.

(c) je bijekcia, ale nie identická funkcia (identická funkcia je $f(n)=n$).

(d) nie je ani injekcia, ani surjekcia. ■

Cvičenie 7.39 Riešte úlohu 7.38, ale pre funkciu $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$. ■

Cvičenie 7.40 Majme $f:\mathbb{A}\to\mathbb{B}$ a $\mathbb{S},\mathbb{T}\subseteq\mathbb{A}$. Dokážte, že platí

(a) $f(\mathbb{S}\cup\mathbb{T})=f(\mathbb{S})\cup f(\mathbb{T})$

(b) $f(\mathbb{S}\cap\mathbb{T})\subseteq f(\mathbb{S})\cap f(\mathbb{T})$

(c) ak f je injekcia, tak $f(\mathbb{S}\cap\mathbb{T})=f(\mathbb{S})\cap f(\mathbb{T})$ ■

Cvičenie 7.41 Majme $f:\mathbb{A}\to\mathbb{B}$ a $\mathbb{S},\mathbb{T}\subseteq\mathbb{B}$. Definujeme $f^{-1}(\mathbb{S})=\{a\in\mathbb{A}:\ f(a)\in\mathbb{S}\}$. Dokážte, že platí

(a) $f^{-1}(\mathbb{S}\cup\mathbb{T})=f^{-1}(\mathbb{S})\cup f^{-1}(\mathbb{T})$

(b) $f^{-1}(\mathbb{S}\cap\mathbb{T})=f^{-1}(\mathbb{S})\cap f^{-1}(\mathbb{T})$

(c) $f^{-1}(\overline{\mathbb{S}})=\overline{f^{-1}(\mathbb{S})}$ ■

Cvičenie 7.42 Majme dané funkcie $g : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ a $f : \mathbb{Y} \to \mathbb{Z}$. O každom z nasledujúcich výrokov zistite, či je pravdivý. Ak je daný výrok pravdivý dokážte ho, ak nie je pravdivý, nájdite kontrapríklad.

(a) Ak g je injekcia, tak aj $f \circ g$ je injekcia.
(b) Ak f je surjekcia, tak aj $f \circ g$ je surjekcia.
(c) Ak g je surjekcia, tak aj $f \circ g$ je surjekcia.
(d) Ak f aj g sú surjekcie, tak aj $f \circ g$ je surjekcia.
(e) Ak f aj g sú bijekcie, tak aj $f \circ g$ je bijekcia.
(f) Ak $f \circ g$ je injekcia, tak aj f je injekcia.
(g) Ak $f \circ g$ je injekcia, tak aj g je injekcia.
(h) Ak $f \circ g$ je surjekcia, tak aj f je surjekcia.
(i) Ak f a $f \circ g$ sú injekcie, tak aj g je injekcia.
(j) Ak f a $f \circ g$ sú surjekcie, tak aj g je surjekcia. ■

Cvičenie 7.43 Nech $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ označuje množinu všetkých funkcií z množiny $\mathbb{R}$ do množiny $\mathbb{R}$. Pre $a \in \mathbb{R}$ definujeme funkciu $E_a : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ predpisom $E_a(f) = f(a)$.

(a) Je funkcia E_a injektívna? Zdôvodnite!
(b) Je funkcia E_a surjektívna? Zdôvodnite! ■

Cvičenie 7.44 Nech $\mathscr{U}$ je univerzum a $\mathbb{A} \subseteq \mathscr{U}$. Charakteristickú funkciu množiny $\mathbb{A}$, viď definícia 7.4.1 (strana 149), označíme $C_{\mathbb{A}}(x)$. Dokážte že platí

(a) $\forall x \in \mathscr{U} : \; C_{\mathbb{A}\cap\mathbb{B}}(x) = C_{\mathbb{A}}(x).C_{\mathbb{B}}(x)$
(b) $\forall x \in \mathscr{U} : \; C_{\mathbb{A}\cup\mathbb{B}}(x) = C_{\mathbb{A}}(x) + C_{\mathbb{B}}(x) - C_{\mathbb{A}}(x).C_{\mathbb{B}}(x)$
(c) $\forall x \in \mathscr{U} : \; C_{\overline{\mathbb{A}}}(x) = 1 - C_{\mathbb{A}}(x)$
(d) $\forall x \in \mathscr{U} : \; C_{\mathbb{A}\setminus\mathbb{B}}(x) = C_{\mathbb{A}}(x).\big(1 - C_{\mathbb{B}}(x)\big)$
(e) Ak $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$, tak $\forall x \in \mathscr{U} : \; C_{\mathbb{A}}(x) \leq C_{\mathbb{B}}(x)$
(f) $\forall x \in \mathscr{U} : \; C_{\mathbb{A}\triangle\mathbb{B}}(x) = C_{\mathbb{A}}(x) + C_{\mathbb{B}}(x) - 2C_{\mathbb{A}}(x).C_{\mathbb{B}}(x)$

Poznámka: Symbol $\triangle$ je symetrická diferencia množín, definovaná na strane 41. ■

Cvičenie 7.45 Majme dané množiny $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$, pričom $|\mathbb{A}| = m$, $|\mathbb{B}| = n$ a $m \neq n$. Určte podmienku na to, aby funkcia $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ mohla byť injekcia. Môže byť potom funkcia f aj surjekcia? ■

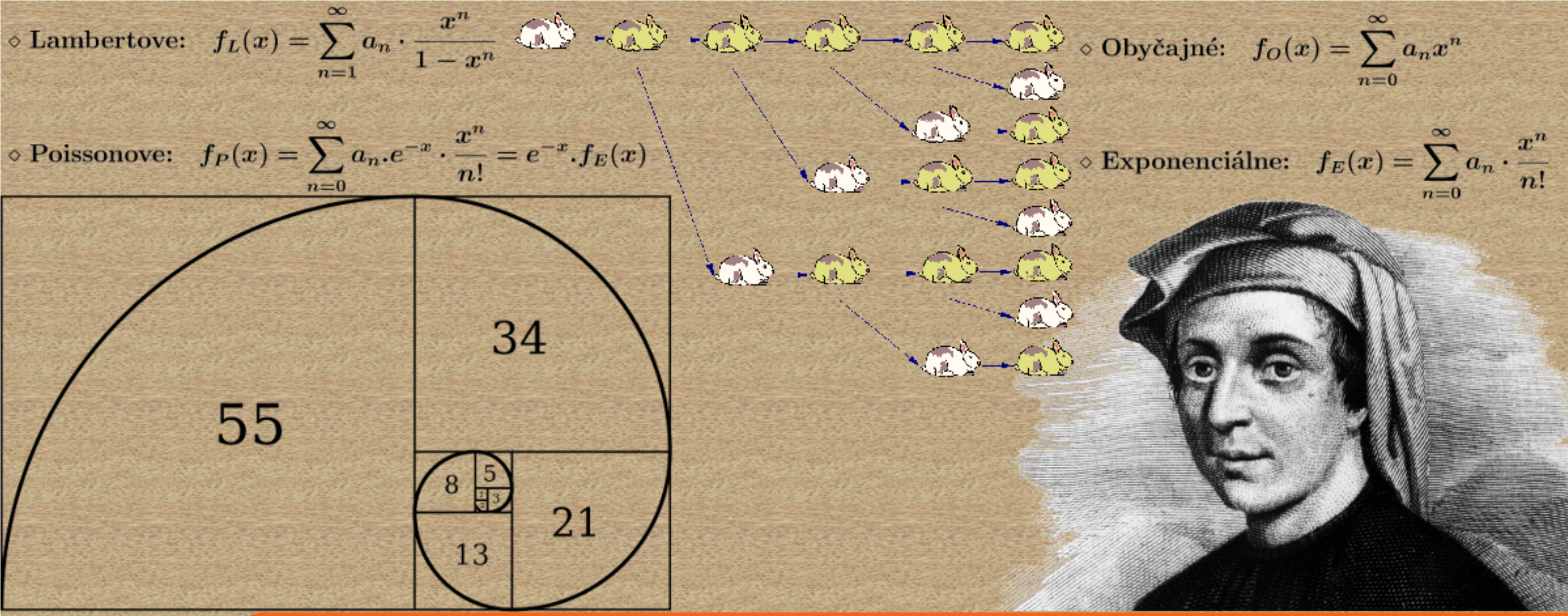
Cvičenie 7.46 Ukážte, že existuje bijekcia z množiny $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ do množiny $\mathbb{B} \times \mathbb{A}$. ■

Cvičenie 7.47 Zistite

(a) koľko existuje surjekcií z trojprvkovej množiny na dvojprvkovú množinu.
(b) koľko existuje injekcií z trojprvkovej množiny na štvorprvkovú množinu. ■

Cvičenie 7.48 Ktoré z nasledujúcich vlastností fukcií sa zachovávajú pri kompozícii funkcií? Svoje tvrdenia dokážte!

(a) Injektívnosť? (b) Surjektívnosť? (c) Bijektívnosť?



8. Vytvárajúce funkcie

8.1 Úvod

V tejto kapitole sa zoznámime s jednou veľmi užitočnou technikou počítania, spájajúcou diskrétnu matematiku s kalkulom a majúcou široké uplatnenie aj v informatike. Hneď na začiatku by sme chceli upozorniť na to, že sa bude jednať len o veľmi stručný úvod do problematiky vytvárajúcich funkcií, ktorého cieľom je iba zoznámiť čitateľa s existenciou vytvárajúcich funkcií a ich základnými možnosťami použitia pri riešení niektorých jednoduchších problémov. Pre hlbšie pochopenie problematiky vytvárajúcich funkcií doporučujeme čitateľom knihu [13], ktorá poskytuje ucelenejší pohľad na problematiku vytvárajúch funkcií a je písaná jednoduchým a veľmi prístupným štýlom. Táto kniha je súhrnom jednosemestrovej prednášky o vytvárajúcich funkciách na Moskovskej univerzite, určenej pre študentov bakalárskeho štúdia. Ďalším výborným zdrojom informácií o vytvárajúcich funkciách je kniha [30]. Táto kniha síce nebola písaná primárne ako učebnica, avšak je dostatočne podrobná a zrozumiteľná a ako uvádza v jej úvode autor, bola „otestovaná“ na študentoch Pensylvánskej univerzity, na kurze diskrétnej matematiky. Kniha [30] má naviac tú veľkú výhodu, že jej elektronická verzia je voľne dostupná na stránke autora. Okrem toho môžu záujemci nájsť základné informácie o vytvárajúich funkciách aj v knihe [15], kde je im venovaná 10. kapitola a v legendárnej knihe *The Art of Computer Programming* [12] od Donalda E. Knutha, kde je vytvárajúcim funkciám venovaná podkapitola 1.2.9. Prevažná časť tejto kapitoly je stručným kompilátom z uvedených kníh.

Ako bolo spomenuté na začiatku kapitoly, študenti informatiky sa budú vo svojej praxi stretávať s vytvárajúcimi funkciami. Väčšinou to bude v prípadoch, v ktorých budú potrebovať vyjadriť rekurentne danú postupnosť explicitne. Či už to bude priamo na predmete *Programovanie*, skúste si naprogramovať riešenia cvičení 8.18 alebo 8.25 bez použitia vytvárajúcich funkcií, alebo neskôr na predmete *Analýza a zložitosť algoritmov*.

Vytvárajúce funkcie sú už pomerne starou záležitosťou. Do matematiky ich ako prvý zaviedol francúzsky matematik Abraham de Moivre[1] začiatkom 18. storočia, pri riešení všeobecných lineárnych rekurencií. Krátko po ňom techniku používania vytvárajúcich funkcií ďalej rozvinul škótsky

[1] S menom de Moivre sa môžeme stretnúť napríklad v súvislosti s umocňovaním komplexných čísel v goniometrickom tvare (Moivreova veta).

matematik James Stirling[2]. Stirling vo svojej práci *Methodus Differentialis* z roku 1730 ukázal, ako sa na vytvárajúce funkcie dajú aplikovať aritmetické operácie, derivovanie a integrovanie. Ďalším slávnym matematikom používajúcim vytvárajúce funkcie bol Leonhard Euler. Euler vo svojich prácach z rokov 1741 a 1750 používal vytvárajúce funkcie pri počítaní rozkladov. No a posledným tu spomenutým slávnym matematikom, ktorý rozvíjal metódy využitia vytvárajúcich funkcií, bol Pierre-Simon Laplace[3]. Laplace vo svojej práci *Théorie Analytique des Probabilités* z roku 1812 zaviedol využitie vytvárajúcich funkcií do štatistiky.

8.1.1 Mocninové rady

Definícia mocninového radu jednej premennej je nasledovná

Definícia 8.1.1 — Mocninový rad jednej premennej. Nech $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ je nekonečná postupnosť reálnych, prípadne komplexných, čísel a $x_0 \in \mathbb{R}$, prípadne $x_0 \in \mathbb{C}$. Mocninový rad jednej premennej je nekonečný rad v tvare

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k .$$

Namiesto zdĺhavého označenia *mocninový rad jednej premennej*, budeme v ďalšom texte používať len stručné označenie *mocninový rad*. Čísla a_k sa nazývajú *koeficienty* mocninového radu, číslo x_0 sa nazýva *stred* mocninového radu a x je reálna, prípadne komplexná premenná.

P Viac ako uvedenú definíciu mocninového radu v texte o vytvárajúcich funkciách potrebovať nebudeme. Predchádzajúca definícia sa v učebniciach analýzy pre jednoduchosť zvykne uvádzať len pre komplexné čísla, keďže tie zahŕňajú aj reálne čísla. V zjednodušujúcich textoch, čo je aj náš prípad, sa zasa zvyknú spomínať len reálne čísla. Takže v nasledujúcom texte budú všetky koeficienty a_k vždy reálne. Okrem toho bude pri vytvárajúcich funkciách stred radu $x_0 = 0$.

Matematická analýza skúma rôzne vlastnosti mocninových a nielen mocninových radov. Najdôležitejšou z nich je konvergencia radu, resp. polomer konvergencie radu. Niektoré mocninové rady zodpovedajú analytickým funkciám a naopak niektoré funkcie sa dajú rozvinúť do mocninového radu. V prípade záujmu si v nejakej základnej učebnici matematickej analýzy môžeme pozrieť časť venovanú Taylorovým radom, resp. Taylorovým polynómom.

Rozvinutie funkcie do Taylorovho radu je spôsob aproximácie funkcie pomocou nekonečného mocninového radu a zároveň je to niekedy jediný spôsob ako robiť zložitejšie operácie s danou funkciou (skúste napríklad nájsť neurčitý integrál $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$). To, ako vyzerajú niektoré známe funkcie, vyjadrené pomocou Maclaurinovho radu[4], si môžeme pozrieť na strane 157 vo vzorcoch (8.1) až (8.7).

V diskrétnej matematike, predovšetkým v kombinatorike, sa na mocninové rady pozeráme len ako na nekonečné súčty násobkov mocnín premennej x a za stred radu väčšinou kladieme $x_0 = 0$. Mocninovému radu $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, z definície 8.1.1, sa v diskrétnej matematike zvykne hovoriť *formálny mocninový rad*. Označenie *formálny* znamená, že sa na tento rad budeme pozerať výlučne ako na nekonečný súčet násobkov mocnín premennej x a nemusíme za ním vždy hľadať nejakú

[2] S menom Jamesa Stirlinga sme sa mohli stretnúť napríklad v súvislosti so známou *stirlingovou formulou* na aproximáciu hodnôt faktoriálu $n! \cong \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

[3] Pierre-Simon Laplace bol slávny francúzsky matematik, fyzik, mechanik, astronóm, filozof... S jeho menom sa môžeme stretnúť napríklad v súvislosti s *laplaceovou transformáciou*.

[4] Maclaurinov rad je Taylorov rad so stredom $x_0 = 0$.

analytickú funkciu a skúmať jej vlastnosti. Na rozdiel od matematickej analýzy nás v diskrétnej matematike, v prevažnej väčšine prípadov, nebude zaujímať, či a kde daný rad konverguje. Formálny mocninový rad je vlastne vytvárajúca funkcia (definícia bude uvedená neskôr) a väčšinu ďalej uvádzaných operácií s vytvárajúcimi funkciami môžeme robiť bez ohľadu na konvergenciu príslušného radu.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{8.1}$$

$$\ln\frac{1}{1-x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \tag{8.2}$$

$$\ln(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} \tag{8.3}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{8.4}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \tag{8.5}$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{8.6}$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \tag{8.7}$$

Nie všetky vyššie uvedené rady sú konvergetné pre všetky reálne (komplexné) čísla, rovnako ako nie všetky uvedené funkcie sú definované pre všetky reálne (komplexné) čísla. Ak sa obmedzíme na reálne funkcie, tak funkcie zo vzorcov (8.2), resp. (8.3), sú definované len pre $x \in (-\infty, 1)$, resp. $x \in (-1, \infty)$ a ich mocninové rady konvergujú len pre $x \in (-1, 1)$. Pomocou rozvoja funkcie do mocninového radu sme funkcii $f(x)$ priradili nekonečnú postupnosť koeficientov $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Uvedený vzťah medzi funkciami a nekonečnými postupnosťami funguje aj opačným smerom. Nekonečným postupnostiam vieme v niektorých prípadoch priradiť funkcie. Už zo strednej školy by sme mali poznať vzťah[5]

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}, \quad \text{pre } x \in (-1, 1).$$

Ľavá a prostredná časť uvedenej rovnosti je geometrický rad utvorený z geometrickej postupnosti, ktorej prvý člen je 1 a kvocient je x. Vieme, že ak $|x| < 1$, tak uvedený rad konverguje a jeho súčet je funkcia na pravej strane rovnosti. Takže nekonečnej postupnosti $\{1\}_{k=0}^{\infty}$ zodpovedá funkcia $\frac{1}{1-x}$.

8.1.2 Motivačné príklady

Vytvárajúce funkcie spájajú nekonečné rady s funkciami. V tejto časti si ukážeme niekoľko jednoduchých motivačných príkladov, na ktorých si predvedieme, ako sa dajú vytvárajúce funkcie využiť pri riešení úloh. Rovnako ako v knihe [15] však musíme poznamenať, že pri týchto prvých príkladoch sa jedná o umelo vytvorené úlohy, ktoré sa dajú riešiť aj bez vytvárajúcich funkcií.

[5] Súčet geometrického radu utvoreného z geometrickej postupnosti, ktorej kvocient je v absolútnej hodnote menší než 1. V stredoškolskej terminológii sa to zvykne označovať aj ako „súčet nekonečnej geometrickej postupnosti“.

Lepšou a realistickejšou ilustráciou využitia vytvárajúcich funkcií budú až úlohy o rekurentných postupnostiach v neskoršej časti tejto kapitoly.

■ **Príklad 8.1** K dispozícii máme 5 jednoeurových mincí, 3 dvojeurové mince a 1 päťeurovú bankovku. Koľkými spôsobmi môžeme zaplatiť sumu 9 € ?

Riešenie: čísla v tejto úlohe sú tak malé, že nie je problém nájsť riešenie úlohy vyskúšaním všetkých možností. My si však ukážeme riešenie úlohy pomocou vytvárajúcich funkcií.

Vieme, že ak násobíme dve mocniny s rovnakým základom, tak ich exponenty sa sčítavajú. To znamená, že $x^i x^j = x^{i+j}$. Ďalej si musíme uvedomiť, že ak máme súčin dvoch polynómov, ktorých koeficienty pri všetkých členoch x^k sú rovné 1

$$\left(1+x+x^2+\cdots+x^m\right)\left(1+x+x^2+\cdots+x^n\right) = 1+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_{m+n}x^{m+n}\,,$$

tak koeficient a_k pri x^k vo výslednom polynóme zodpovedá počtu spôsobov, ktorými môžeme číslo k zapísať ako súčet dvoch čísel $0 \le i \le k$ a $0 \le j \le k$, čiže $k = i + j$ a $x^k = x^i x^j$.

V zadaní úlohy vystupuje 5 jednoeurových mincí, ktorým zodpovedá polynóm s členmi x^k, kde $0 \le k \le 5$. Potom 3 dvojeurové mince, ktorým zodpovedá polynóm s členmi x^{2k}, kde $0 \le k \le 3$ a napokon 1 päťeurová bankovka, ktorej zodpovedá polynóm s členmi x^{5k}, kde $0 \le k \le 1$. Takže zadanie úlohy môžeme modelovať súčinom polynómov

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x^2+x^4+x^6)(1+x^5) =$$

$$= 1+x+2x^2+2x^3+3x^4+4x^5+4x^6+5x^7+4x^8+\boldsymbol{5x^9}+4x^{10}+4x^{11}+3x^{12}+2x^{13}+2x^{14}+x^{15}+x^{16}$$

Pri člene x^9 je koeficient 5, čo znamená, že sumu 9 € vieme za daných podmienok zaplatiť 5 rôznymi spôsobmi. ■

V súvislosti s riešením predošlého príkladu si treba uvedomiť, že aj konečná postupnosť $\{a_k\}_{k=0}^{n}$ sa dá chápať ako nekonečná postupnosť $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$, kde $b_i = a_i$ pre $0 \le i \le n$ a $b_i = 0$ pre $i > n$. Nasledujúci príklad je prevzatý z knihy [13].

■ **Príklad 8.2** Autobusové lístky sú označené 6 miestnymi číslami zostavenými z cifier 0 až 9. Lístok budeme považovať za „šťastný“, ak súčet jeho prvých troch cifier je rovný súčtu jeho posledných troch cifier. Napríklad lístok s číslom 123 060 je „šťastný“, ale lístok s číslom 123 456 nie je „šťastný“. Koľko existuje „šťastných“ lístkov, za predpokladu, že existujú všetky lístky od 000 000 až po 999 999 ?

Riešenie: všetky „šťastné“ lístky si rozdelíme do tried podľa súčtu ich prvej, resp. poslednej, trojice cifier. Budeme mať teda 28 tried „šťastných“ lístkov, od triedy 0, ktorej zodpovedá trojica 000, až po triedu 27, ktorej zodpovedá trojica 999. Očividne v triede 0, rovnako ako v triede 27, bude len 1 lístok. Označme si ako a_k číslo, ktoré vyjadruje počet rozkladov čísla k na súčet troch cifier, t. j. $k = p+q+r$, kde $p,q,r \in \{0,\dots,9\}$. Je zrejmé, že počet „štastných“ lístkov v triede k bude potom a_k^2. Takže „šťastných“ lístkov bude spolu

$$\sum_{k=0}^{27} a_k^2\,.$$

Už nám zostáva len nájsť všetky čísla a_k. Čísla $\{a_k\}_{k=0}^{27}$ vypočítame rovnakým spôsobom, ako sme to robili v príklade 8.1. Čiže budú to koeficienty polynómu

$$\left(1+x+x^2+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9\right)^3\,.$$

Uvedený polynóm sa pri troche trpezlivosti dá vypočítať aj ručne. Tí menej trpezliví môžu použiť nejakú pomôcku, napríklad online nástroj *Wolfram Alpha*[6]. Dostaneme tak polynóm

$$1+3x^1+6x^2+10x^3+15x^4+21x^5+28x^6+36x^7+45x^8+$$
$$+55x^9+63x^{10}+69x^{11}+73x^{12}+75x^{13}+75x^{14}+73x^{15}+69x^{16}+63x^{17}+$$
$$+55x^{18}+45x^{19}+36x^{20}+28x^{21}+21x^{22}+15x^{23}+10x^{24}+6x^{25}+3x^{26}+x^{27}$$

Teraz už poznáme všetky čísla a_k a vieme vypočítať

$$\sum_{k=0}^{27} a_k^2 = 55\,252$$

Takže „šťastných“ čísel je presne 55 252.
Výhodou vytvárajúcich funkcií je však to, že s nimi môžeme narábať aj ako s funkciami. To znamená, že napríklad môžeme vyjadriť

$$1+x+x^2+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9 = \frac{x^{10}-1}{x-1}$$

Potom dostaneme

$$f(x) = \left(1+x+x^2+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9\right)^3 = \left(\frac{x^{10}-1}{x-1}\right)^3 = \frac{x^{30}-3x^{20}+3x^{10}-1}{x^3-3x^2+3x-1}$$

Toto je výhodou najmä vtedy, ak by sme, napríklad pre veľké hodnoty, nemohli použiť nami uvedený postup. Napríklad by sme mohli modifikovať zadanie úlohy tak, že čísla lístkov nebudú 6 ciferné, ale budú $2n$ ciferné, kde $n \in \mathbb{N}$ bude nejaké veľké číslo. V knihe [13] máme uvedený aj spôsob, akým môžeme pomocou nástrojov infinitezimálneho počtu, jednoducho vypočítať aspoň kvalifikovaný odhad počtu „šťastných“ lístkov. ■

Trikom, ktorý sme použili v predošlých dvoch úlohach, môžeme dokázať binomickú vetu a rôzne ďalšie kombinatorické identity. Binomická veta hovorí o tom, čomu sa rovná n-tá mocnina súčtu dvoch čísel. Poznáme ju zo strednej školy a jej zjednodušená podoba[7] je

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n. \tag{8.8}$$

Ľavá strana uvedenej rovnosti je súčin $\underbrace{(1+x)\dots(1+x)}_{n \text{ krát}}$. Z predošlých dvoch príkladov vieme, že

$$(1+x)^n = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n\,,$$

a koeficient a_k, pri člene x^k, zodpovedá počtu spôsobov, ktorými môžeme zapísať číslo k ako súčet n čísel 0, alebo 1. Čiže a_k zodpovedá počtu rôznych riešení rovnice

$$k = c_1 + \cdots + c_n\,, \quad \text{kde } c_1, \ldots, c_n \in \{0,1\}\,.$$

[6]`https://www.wolframalpha.com`

[7]Úplná podoba binomickej vety je:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{i}a^{n-i}b^i + \cdots + \binom{n}{n}a^0b^n\,.$$

Zo stredoškolskej kombinatoriky by sme mali vedieť, že počet riešení uvedenej rovnice je $\binom{n}{k}$, pretože sa jedná o počet výberov k prvkov z n prvkovej množiny, pričom na poradí výberu nezáleží. Odtiaľ dostávame $a_k = \binom{n}{k}$ a tým je dokázaná binomická veta (8.8). Ak teraz vo vzorci (8.8) dosadíme za premennú x konkrétne hodnoty $x = 1$ a $x = -1$, tak dostaneme dve známe kombinatorické identity:

$$\text{pre } x = 1: \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \tag{8.9}$$

$$\text{pre } x = -1: \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \tag{8.10}$$

8.2 Operácie s vytvárajúcimi funkciami

V úvodnej časti sme si pripomenuli, čo je to mocninový rad a v ilustračných príkladoch sme naznačili spojitosť medzi nekonečnými postupnosťami a funkciami vyjadrenými pomocou mocninových radov. V tejto časti si formálne definujeme vytvárajúce funkcie a ukážeme si, aké operácie s nimi môžeme robiť.

Existuje viacero typov vytvárajúcich funkcií. Ak sa lepšie pozrieme na obrázok z úvodu kapitoly, tak tam uvidíme štyri rôzne typy vytvárajúcich funkcií. Informatici sa však v praxi budú stretávať väčšinou len s *obyčajnými* a s *exponenciálnymi vytvárajúcimi funkciami.* Preto si teraz uvedieme definície a príklady takýchto vytvárajúcich funkcií.

Definícia 8.2.1 — Obyčajná vytvárajúca funkcia. Nech $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je nekonečná postupnosť reálnych čísel. Obyčajná vytvárajúca funkcia tejto postupnosti, je mocninový rad

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Ak má postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ len konečne veľa nenulových členov, tak jemu zodpovedajúca vytvárajúca funkcia sa nazýva aj vytvárajúci polynóm.

Premenná x v definícii 8.2.1 je reálna, alebo komplexná. Mocninový rad, zodpovedajúci nekonečnej postupnosti, sme v definícii označili symbolom $a(x)$. Vieme však, že vo všeobecnosti tento rad nemusí konvergovať. Pokiaľ ale tento rad konverguje pre nejakú konkrétnu hodnotu x_0, tak z matematickej analýzy vieme, že bude konvergovať aj pre všetky hodnoty x spĺňajúce podmienku $|x| \le |x_0|$. V takom prípade zodpovedá mocninový rad $a(x)$ analytickej funkcii.

■ **Príklad 8.3** Majme danú nekonečnú postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde pre $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+ : \; a_n = 1$. Tejto postupnosti zodpovedá rad

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \tag{8.11}$$

Rad (8.11) by sme mali poznať už zo strednej školy. Jedná sa o geometrický rad, ktorého prvý člen je 1 a kvocient je x. Ďalej vieme, že pre hodnoty x, spĺňajúce podmienku $|x| < 1$, tento rad konverguje. To znamená, že pre hodnoty $x \in (-1, 1)$ bude rad (8.11) konvergovať, čiže bude zodpovedať nejakej analytickej funkcii. Mali by sme poznať aj vzorec na výpočet súčtu konvergujúceho geometrického radu. V prípade radu (8.11) je tento súčet $\frac{1}{1-x}$, pre hodnoty $x \in (-1, 1)$. Čiže nekonečnej postupnosti $\{a_n = 1\}_{n=0}^{\infty}$ a jej vytvárajúcej funkcii (8.11) zodpovedá analytická funkcia $a(x) = \frac{1}{1-x}$. ■

Rad $a(x)$ z definície obyčajnej vytvárajúcej funkcie bude vo všeobecnosti konvergovať pre nejakú hodnotu $x_0 \neq 0$ práve vtedy, ak bude postupnosť $\left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\}_{n=0}^{\infty}$ ohraničená. Ak by uvedená postupnosť bola neohraničená, tak by mohla byť ohraničená napríklad postupnosť $\left\{\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}}\right\}_{n=0}^{\infty}$, čím sa dostávame ku definícii exponenciálnej vytvárajúcej funkcie.

Definícia 8.2.2 — Exponenciálna vytvárajúca funkcia. Nech $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je nekonečná postupnosť reálnych čísel. Exponenciálna vytvárajúca funkcia tejto postupnosti je rad

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \cdot x^n .$$

P Nebude asi žiadnym prekvapením, že názov exponenciálnej vytvárajúcej funkcie je odvodený od exponenciánej funkcie. Napríklad pre postupnosť $\{a_n = 1\}_{n=0}^{\infty}$ dostávame

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \qquad \big(\text{viď (8.1), strana 157}\big)$$

Tento rad konverguje pre všetky hodnoty $x \in \mathbb{R}$. On dokonca konverguje aj pre všetky hodnoty $x \in \mathbb{C}$, ale komplexnými číslami a funkciami teraz ctených čitateľov nechceme strašiť.

Ako už bolo spomenuté v podkapitole 8.1.1 v súvislosti s formálnymi mocninovými radmi, nie vždy, presnejšie málokedy, musíme brať ohľad na to, či a kde daný rad, predstavujúci nejakú vytvárajúcu funkciu, konverguje. Prvý a hlavný dôvod je ten, že väčšina operácií s vytvárajúcimi funkciami je dobre definovaná a realizovateľná bez ohľadu na konvergenciu zodpovedajúcich radov. Druhým dôvodom je fakt, že pomocou vytvárajúcich funkcií často len potrebujeme získať predstavu o tom, ako asi vyzerá riešenie daného problému. Ak už akýmkoľvek spôsobom získame predstavu o riešení daného problému, tak môžeme inými metódami, napríklad matematickou indukciou, overiť, či sa jedná o správne riešenie. V nasledujúcich podkapitolách si ukážeme niektoré z týchto operácií.

8.2.1 Súčet vytvárajúcich funkcií

Najelementárnejšia operácia, ktorá sa dá robiť s vytvárajúcimi funkciami, je ich súčet, resp. ich lineárna kombinácia. Definícia súčtu, presnejšie povedané lineárnej kombinácie, dvoch vytvárajúch funkcií je úplne intuitívna.

Definícia 8.2.3 — Súčet vytvárajúcich funkcií. Nech $a(x)$ je vytvárajúca funkcia postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $b(x)$ je vytvárajúca funkcia postupností $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom $\alpha a(x) + \beta b(x)$ je vytvárajúca funkcia postupnosti $\{\alpha a_n + \beta b_n\}_{n=0}^{\infty}$.

■ **Príklad 8.4** Ako bude vyzerať vytvárajúca funkcia postupnosti $\{a_n = 2\}_{n=0}^{\infty}$?

Riešenie: z príkladu 8.3 vieme, že vytvárajúca funkcia jednotkovej postupnosti $\{b_n = 1\}_{n=0}^{\infty}$ je $b(x) = \frac{1}{1-x}$. Pre postupnosť zo zadania úlohy platí, že $a_n = 2b_n$ pre všetky $n \in \mathbb{Z}_0^+$. Preto vytvárajúca funkcia postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ bude

$$a(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-x} = \frac{2}{1-x} .$$

■

8.2.2 Vytvárajúca funkcia nekonečnej postupnosti posunutej doprava

Ak máme nekonečnú postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a jej zodpovedajúcu vytvárajúcu funkciu $a(x)$, tak sa môžeme zaoberať otázkou, ako bude vyzerať vytvárajúca funkcia, keď postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ posunieme o k miest doprava alebo doľava.

Najskôr si ukážeme ako vyzerá vytvárajúca funkcia postupnosti posunutej doprava, pretože je to jednoduchšia úloha. Majme danú postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, ktorá má vytvárajúcu funkciu $a(x)$ a chceme nájsť vytvárajúcu funkciu postupnosti $\{\underbrace{0,\dots,0}_{k \text{ núl}},a_0,a_1,\dots,a_n,\dots\}$. Vytvárajúcu funkciu tejto posunutej postupnosti si označme ako $a_k^+(x)$, pričom index k znamená posunutie o k miest a exponent $+$ znamená posunutie doprava. Potom vytvárajúca funkcia $a_k^+(x)$ bude mať podobu

$$a_k^+(x) = 0x^0 + 0x^1 + \cdots + 0x^{k-1} + a_0x^k + a_1x^{k+1} + \cdots + a_nx^{k+n} + \cdots$$

Z definície vytvárajúcej funkcie $a(x)$ platí

$$a(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \quad \Longrightarrow \quad a_k^+(x) = x^k.a(x)$$

Lema 8.2.1 — Vytvárajúca funkcia postupnosti posunutej doprava. Majme danú nekonečnú postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a nech $a(x)$ je jej vytvárajúca funkcia. Potom vytvárajúca funkcia postupnosti $\{a'_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $a'_i = 0$ pre $i \in \{0,\dots,k-1\}$ a $a'_i = a_{i-k}$ pre $i \geq k$, bude

$$a_k^+(x) = x^k.a(x)\,.$$

Dôkaz: vyplýva z definície obyčajnej vytvárajúcej funkcie a argumentov uvedených pred touto lemou. Q.E.D.

■ **Príklad 8.5** Nájdite vytvárajúcu funkciu jednotkovej postupnosti, posunutej o 1 miesto doprava.

Riešenie: musíme nájsť vytvárajúcu funkciu nekonečnej postupnosti $\{0,1,1,\dots,1,\dots\}$. Vieme, že vytvárajúca funkcia jednotkovej postupnosti $\{a_n = 1\}_{n=0}^{\infty}$ je $a(x) = \frac{1}{1-x}$. Potom podľa lemy 8.2.1, bude mať hľadaná vytvárajúca funkcia podobu

$$a_1^+(x) = x.a(x) = \frac{x}{1-x}\,.$$

■

Ako nájdeme vytvárajúcu funkciu nekonečnej postupnosti posunutej o k miest doľava, si ukážeme až v podkapitole 8.2.4.

8.2.3 Súčin vytvárajúcich funkcií

Súčin dvoch vytvárajúcich funkcií sa počíta tak, že sa obvyklým spôsobom vynásobia zodpovedajúce nekonečné rady. To, ako bude tento súčin vyzerať, naznačujú už príklady 8.1 a 8.2. Ilustrujeme si to najskôr na príklade a potom uvedieme definíciu.

■ **Príklad 8.6** Majme dve nekonečné postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ a ich vytvárajúce funckie

$$\begin{aligned} a(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \\ b(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots \end{aligned}$$

Ak spravíme súčin vytvárajúcich funkcií $a(x)$ a $b(x)$, tak tento bude mat podobu

$$\begin{aligned} a(x).b(x) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + \cdots = \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots \end{aligned}$$

V súčine $a(x).b(x)$ dostaneme koeficient c_n pri člene x^n, ako súčet všetkých súčinov koeficientov z radu $a(x)$, resp. $b(x)$, pri členoch x^i, resp. x^j, takých, že $i + j = n$. ■

Definícia 8.2.4 — Súčin vytvárajúcich funkcií. Majme dve nekonečné postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ a ich vytvárajúce funkcie

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{a} \qquad b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n .$$

Potom súčin týchto dvoch vytvárajúcich funkcií bude

$$a(x).b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n , \quad \text{kde} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} .$$

■ **Príklad 8.7** Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $\{a_n = n\}_{n=0}^{\infty}$.

Riešenie: najskôr si uvedomme, ako vyzerá súčin dvoch vytvárajúcich funkcií, z ktorých jedna zodpovedá nekonečnej jednotkovej postupnosti. Čiže $\{b_n = 1\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ľubovoľná postupnosť. Súčin vytvárajúcich funkcií týchto postupností je

$$b(x).c(x) = c_0 + (c_0 + c_1)x + \cdots + (c_0 + \cdots + c_n)x^n + \cdots \tag{8.12}$$

Vytvárajúcu funkciu postupnosti $\{b_n = 1\}_{n=0}^{\infty}$ už poznáme z príkladu 8.3. Je to funkcia $b(x) = \frac{1}{1-x}$. Preto vieme, že

$$\frac{c(x)}{1-x} = c_0 + (c_0 + c_1)x + \cdots + (c_0 + \cdots + c_n)x^n + \cdots ,$$

kde $c(x)$ je vytvárajúca funkcia postupnosti $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$. Vezmime si teraz ako postupnosť $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, jednotkovú postupnosť posunutú o jedno miesto doprava. Čiže $c_0 = 0$ a $c_n = 1$ pre všetky $n \geq 1$. Potom $b(x).c(x)$ z rovnice (8.12), je vytvárajúca funkcia postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ zo zadania úlohy. Vytvárajúcu funkciu postupnosti $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ opäť už poznáme z príkladu 8.5. Je to funkcia $c(x) = \frac{x}{1-x}$. Preto vytvárajúca funkcia postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ bude

$$a(x) = \frac{x}{(1-x)^2} .$$

■

8.2.4 Vytvárajúca funkcia nekonečnej postupnosti posunutej doľava

V podkapitole 8.2.2 sme si ukázali, ako dostaneme vytvárajúcu funkciu nekonečnej postupnosti posunutej doprava. V prípade posunutia postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ o k miest doľava, je situácia mierne zložitejšia. Postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ posunutá o k miest doľava, bude mať podobu $\{a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+n}, \ldots\}$. Čiže môžeme ju zapísať ako $\{a'_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $a'_i = a_{k+i}$, pre všetky $i \in \mathbb{Z}_0^+$. Jej vytvárajúcu funkciu budeme označovať analogicky ako sme to robili pri posune doprava, t. j. $a_k^-(x)$, kde exponent $-$ znamená posun doľava.

Vytvárajúca funkcia pôvodnej postupnosti má tvar

$$a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Z uvedenej vytvárajúcej funkcie dostaneme vytvárajúcu funkciu posunutej postupnosti $\{a'_n\}_{n=0}^{\infty}$, ak od nej odčítame prvých k členov a ostatné členy vydelíme x^k. To znamená

$$\begin{aligned} a_k^-(x) &= \frac{\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots\right) - \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{k-1} x^{k-1}\right)}{x^k} = \\ &= \frac{a(x) - \left(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{k-1} x^{k-1}\right)}{x^k} . \end{aligned}$$

Lema 8.2.2 — Vytvárajúca funkcia postupnosti posunutej doľava. Majme danú nekonečnú postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a nech $a(x)$ je jej vytvárajúca funkcia. Potom vytvárajúca funkcia postupnosti $\{a'_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $a'_i = a_{k+i}$ pre $i \in \mathbb{Z}_0^+$, bude

$$a_k^-(x) = \frac{a(x) - \left(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{k-1}x^{k-1}\right)}{x^k}.$$

Dôkaz: vyplýva z definície obyčajnej vytvárajúcej funkcie a argumentov uvedených pred touto lemou. Q.E.D.

■ **Príklad 8.8** Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $\{a_n = n\}_{n=0}^{\infty}$, posunutej o 2 miesta doľava.

Riešenie: našou úlohou je nájsť vytvárajúcu funkciu postupnosti $\{2,3,4,\ldots,n\ldots\}$. Z príkladu 8.7 vieme, že postupnosť $\{a_n = n\}_{n=0}^{\infty}$ má vytvárajúcu funkciu $a(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$. Podľa lemy 8.2.2 bude vytvárajúca funkcia postupnosti $\{2,3,4,\ldots,n\ldots\}$

$$a_2^-(x) = \frac{a(x)-x}{x^2} = \frac{\frac{x}{(1-x)^2} - x}{x^2} = \frac{x - x(1-x)^2}{x^2(1-x)^2} = \frac{2x^2 - x^3}{x^2(1-x)^2} = \frac{2-x}{(1-x)^2}.$$

■

8.2.5 Substitúcia αx, pre $\alpha \in \mathbb{R}$, do vytvárajúcej funkcie

Majme nekonečnú postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a jej vytvárajúcu funkciu $a(x)$. Čo sa stane, ak do vytvárajúcej funkcie $a(x)$ substituujeme namiesto premennej x súčin αx, kde $\alpha \in \mathbb{R}$?

Lema 8.2.3 — Substitúcia αx, pre $\alpha \in \mathbb{R}$, do vytvárajúcej funkcie. Nech $a(x)$ je vytvárajúca funkcia postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Potom $a(\alpha x)$ bude vytvárajúca funkcia postupnosti $\{\alpha^n a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Dôkaz: vieme, že

$$a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Takže po substitúcii dostaneme

$$a(\alpha x) = a_0 + a_1 \alpha x + a_2 \alpha^2 x^2 + \cdots + a_n \alpha^n x^n + \cdots$$

Preto funkcia $a(\alpha x)$ bude vytvárajúcou funkciou postupnosti $\{\alpha^n a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Q.E.D.

■ **Príklad 8.9** Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $\{3^n\}_{n=0}^{\infty}$.

Riešenie: z príkladu 8.3 vieme, že vytvárajúcou funkciou postupnosti $\{a_n = 1\}_{n=0}^{\infty}$ je $a(x) = \frac{1}{1-x}$. Potom podľa lemy 8.2.3 bude $a(3x) = \frac{1}{1-3x}$ vytvárajúcou funkciou postupnosti $\{3^n\}_{n=0}^{\infty}$. ■

Pomocou jednoduchého triku a substitúcie αx do vytvárajúcej funkcie môžeme z nekonečnej postupnosti vybrať jej každý druhý člen. Majme nekonečnú postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a jej vytvárajúcu funkciu $a(x)$. Z postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ chceme vybrať len všetky párne, resp. všetky nepárne členy. Pre vytvárajúce funkcie týchto podpostupností platí

$$\frac{1}{2}\big(a(x) + a(-x)\big) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \cdots + a_{2n} x^{2n} + \cdots \tag{8.13}$$

$$\frac{1}{2}\big(a(x) - a(-x)\big) = a_1 x^1 + a_3 x^3 + a_5 x^5 \cdots + a_{2n+1} x^{2n+1} + \cdots \tag{8.14}$$

Vytvárajúca funkcia $\frac{1}{2}\big(a(x)+a(-x)\big)$ zodpovedá postupnosti $\{a_0,0,a_2,0,a_4,0,\ldots,0,a_{2n},0,\ldots\}$ a funkcia $\frac{1}{2}\big(a(x)-a(-x)\big)$ zodpovedá postupnosti $\{0,a_1,0,a_3,0,a_5,0,\ldots,0,a_{2n+1},0,\ldots\}$. Pomocou rozšírenia uvedeného triku a použitím všetkých komplexných koreňov rovnice $x^k = 1$ vieme z postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ vybrať jej každý k-ty člen. V prípade potreby môžu záujemci nájsť ďalšie informácie napríklad v knihe [12].

8.2.6 Substitúcia x^k, pre $k \in \mathbb{N}$, do vytvárajúcej funkcie

Ďalším trikom, umožňujúcim „nafúknutie" pôvodnej nekonečnej postupnosti, je substitúcia x^k za premennú x do vytvárajúcej funkcie.

Lema 8.2.4 — Substitúcia x^k, pre $k \in \mathbb{N}$, do vytvárajúcej funkcie. Nech $a(x)$ je vytvárajúca funkcia postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Potom $a\left(x^k\right)$ bude vytvárajúca funkcia postupnosti $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $b_{kn} = a_n$, pre $\forall n \in \mathbb{N}$ a $b_i = 0$ ak $i \neq kn$.

Dôkaz: vieme, že

$$a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

Takže po substitúcii dostaneme

$$a\left(x^k\right) = a_0 + a_1x^k + a_2x^{2k} + \cdots + a_nx^{nk} + \cdots$$

Preto funkcia $a\left(x^k\right)$ bude vytvárajúcou funkciou postupnosti

$$\left\{ a_0, \underbrace{0,\ldots,0}_{(k-1)\text{ núl}}, a_1, \underbrace{0,\ldots,0}_{(k-1)\text{ núl}}, a_2, \ldots, \underbrace{0,\ldots,0}_{(k-1)\text{ núl}}, a_n, \underbrace{0,\ldots,0}_{(k-1)\text{ núl}}, \ldots \right\}. \quad \text{Q.E.D.}$$

■ **Príklad 8.10** Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $\left\{2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right\}_{n=0}^{\infty}$. Zápis $\lfloor x \rfloor$ označuje dolnú celú časť čísla x. Čiže $\lfloor 3.6 \rfloor = 3$ a $\lfloor -2.4 \rfloor = -3$.

Riešenie: našou úlohou je nájsť vytvárajúcu funkciu postupnosti $\{1,1,2,2,4,4,\ldots,2^n,2^n,\ldots\}$. Vieme, že vytvárajúcou funkciou postupnosti $\{a_n = 1\}_{n=0}^{\infty}$ je $a(x) = \frac{1}{1-x}$. Podľa lemy 8.2.3 je $b(x) = \frac{1}{1-2x}$ vytvárajúcou funkciou postupnosti $\{b_n = 2^n\}_{n=0}^{\infty}$. My potrebujeme túto postupnosť „nafúknuť" tak, že medzi každé dve susedné čísla vložíme nulu. Potrebujeme vytvoriť postupnosť $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1,0,2,0,4,0,\ldots\}$. Vytvárajúcou funkciou postupnosti $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, bude, podľa lemy 8.2.4, funkcia $c(x) = \frac{1}{1-2x^2}$. Podľa lemy 8.2.1 bude $c_1^+(x) = \frac{x}{1-2x^2}$ vytvárajúcou funkciou postupnosti $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ posunutej o jedno miesto doprava. Potom podľa definície 8.2.3 bude

$$d(x) = \frac{1}{1-2x^2} + \frac{x}{1-2x^2} = \frac{1+x}{1-2x^2}$$

vytvárajúcou funkciou postupnosti $\left\{2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right\}_{n=0}^{\infty}$. ■

8.2.7 Derivovanie vytvárajúcich funkcií

Podobu derivácie[8] vytvárajúcej funkcie dostaneme priamo z definície vytvárajúcej funkcie a z vlastností derivácií, ktoré poznáme z matematickej analýzy. Ak máme danú nekonečnú postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a jej vytvárajúcu funkciu

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots,$$

tak jej derivácia bude

[8] Pri derivovaní sa na vytvárajúcu funkciu pozeráme opäť len ako na formálny mocninový rad a využívame skutočnosť, že derivácia súčtu je súčet derivácií.

$$a'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

Lema 8.2.5 — Derivácia vytvárajúcej funkcie. Daná je nekonečná postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a jej vytvárajúca funkcia $a(x)$. Potom $a'(x)$ je vytvárajúca funkcia postupnosti $\{(n+1)a_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$.

Dôkaz: vyplýva z vyššieuvedeného. Q.E.D.

Použitím derivácie vytvárajúcej funkcie veľmi jednoduchým spôsobom dostaneme napríklad riešenie príkladu 8.7.

■ **Príklad 8.11** Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $\{a_n = n\}_{n=0}^{\infty}$.

Riešenie: vieme, že vytvárajúca funkcia jednotkovej postupnosti $\{b_n = 1\}_{n=0}^{\infty}$ je $b(x) = \frac{1}{1-x}$. Deriváciou tejto funkcie dostaneme vytvárajúcu funkciu postupnosti $\{1, 2, 3, \dots\}$, ktorú už len stačí posunúť o 1 miesto doprava, aby sme dostali postupnosť zo zadania úlohy. Takže $b'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, podľa lemy 8.2.1, ešte násobíme x, čím dostávame hľadanú vytvárajúcu funkciu $a(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$. ■

8.2.8 Integrovanie vytvárajúcich funkcií

Integrovanie[9] vytvárajúcich funkcií sa tiež robí veľmi jednoducho. Ak máme danú nekonečnú postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a jej vytvárajúcu funkciu

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

tak jej neurčitý integrál bude

$$\int a(x)\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n x^n\,dx = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \cdots$$

Lema 8.2.6 — Integrál vytvárajúcej funkcie. Majme danú nekonečnú postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a nech $a(x)$ je jej vytvárajúca funkcia. Potom $\int a(x)\,dx$ je vytvárajúca funkcia postupnosti

$$\left\{0, \frac{a_0}{1}, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \dots\right\}.$$

Dôkaz: vyplýva z vyššieuvedeného. Q.E.D.

Použitím integrovania vytvárajúcej funkcie vieme veľmi jednoducho dostať napríklad vytvárajúcu funkciu harmonickej postupnosti.

■ **Príklad 8.12** Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $\left\{a_n = \frac{1}{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$.

Riešenie: vieme, že vytvárajúca funkcia jednotkovej postupnosti $\{b_n = 1\}_{n=0}^{\infty}$ je $b(x) = \frac{1}{1-x}$. Integrovaním funkcie $b(x)$ dostaneme vytvárajúcu funkciu postupnosti $\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$, ktorú stačí už len posunúť o 1 miesto doľava. Platí

$$\int b(x)\,dx = \int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln(1-x).$$

[9] Pri integrovaní sa na vytvárajúcu funkciu pozeráme opäť len ako na formálny mocninový rad a využívame skutočnosť, že integrál súčtu je súčet integrálov.

Na aditívnu konštantu sme v predošlom integráli nezabudli, ale pre jednoduchosť sme ju zvolili nulovú. Podľa lemy 8.2.2 ešte musíme odpočítať prvý člen postupnosti ($a_0 = 0$) a vydeliť túto funkciu x, aby sme dostali hľadanú vytvárajúcu funkciu. Takže vytvárajúca funkcia harmonickej postupnosti je

$$a(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}\,.$$

■

8.3 Príklady použitia vytvárajúcich funkcií

V tejto časti si ilustrujeme využitie vytvárajúcich funkcií na zaujímavejších príkladoch, než boli jednoduché príklady z predošlých podkapitol. Začneme známou Fibonacciho postupnosťou.

8.3.1 Fibonacciho postupnosť

Fibonacci bol jeden z najvýznamnejších stredovekých matematikov. Žil na prelome 12. a 13. storočia v Pise a svoje práce väčšinou podpisoval menom *Leonardus Pisanus*, resp. *Leonardus filius Bonacij*, čiže v preklade *Leonard, syn Bonacciho*, z čoho vzniklo *Fibonacci*. Fibonacci pomohol do matematiky zaviesť pozičnú desiatkovú číselnú sústavu, nulu ako číslo[10] a s jeho menom je neoddeliteľne spojená *Fibonacciho postupnosť*.

Fibonacciho postupnosť, ktorú pravdepodobne všetci poznáme už zo základnej a strednej školy, sa niekedy nazýva aj *zajačia postupnosť*, pretože súvisí s úlohou o rozmnožovaní párov zajacov. Je to rekurentná postupnosť definovaná vzťahom

$$a_0 = a_1 = 1 \qquad \text{a} \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\,, \text{ pre } n \geq 0\,.$$

Čiže prvé dva členy postupnosti sa rovnajú 1 a každý ďalší člen dostaneme ako súčet predchádzajúcich dvoch členov. Fibonacciho postupnosť vyzerá takto

$$\{1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,\ldots\}$$

Pri Fibonacciho postupnosti nie je problém zistiť, čomu sa rovná prvý, desiaty, alebo, s trochou trpezlivosti, aj stý člen. Ale čo spravíme, ak potrebujeme vypočítať n-tý člen, pre nejaké obrovské číslo $n \in \mathbb{N}$? Na to potrebujeme explicitné vyjadrenie členov postupnosti, t. j. musíme nájsť takú funkciu $F(x)$, aby $F(n) = a_n$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

Ideme teda hľadať explicitné vyjadrejnie členov Fibonacciho postupnosti. Začneme tým, že si utvoríme vytvárajúcu funkciu Fibonacciho postupnosti

$$f(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 + \cdots$$

Teraz sa pozrime na rekurentný vzťah, ktorým je Fibonacciho postupnosť definovaná $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. Čo dostaneme, ak si vytvoríme dve kópie Fibonacciho postupnosti, jednu posunieme o 1 miesto doprava, druhú posunieme o 2 miesta doprava a tieto posunuté postupnosti sčítame? Pozrime sa na to

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr} & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & \ldots \\ + & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & \ldots \\ \hline & 0 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & \ldots \end{array}$$

Vidíme, že sme dostali „takmer“ Fibonacciho postupnosť. Len člen a_0 v nej chýba a je nahradený nulou. Pomocou lemy 8.2.1 spravíme uvedenú operáciu nie na samotnej postupnosti, ale na jej vytvárajúcej funkcii. Tým dostaneme

[10] Nula bola v časoch Fibonacciho relatívnou novinkou. Ľudia sa jej už od staroveku báli a vyhýbali sa jej. Len na konci 10. storočia, čiže necelých 200 rokov pred Fibonacciho pôsobením, používanie nuly pápežskou bulou povolil pápež Silvester II. Mimochodom bol to jediný pápež, ktorý bol pôvodným vzdelaním matematik a astronóm a prvý francúzsky pápež.

$$(x+x^2)f(x) = f(x) - 1 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}\,.$$

Už teda poznáme vytvárajúcu funkciu Fibonacciho postupnosti a pomocou nej nájdeme explicitné vyjadrenie jej členov. To dosiahneme pomocou rozkladu zlomku $\frac{1}{1-x-x^2}$ na parciálne zlomky. Nájdeme si korene polynómu $1-x-x^2$. Sú nimi $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ a $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Ľahko sa potom overí, že platí

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_2\left(1-\frac{x}{x_2}\right)} - \frac{1}{x_1\left(1-\frac{x}{x_1}\right)}\right).$$

Preto vytvárajúcu funkciu Fibonacciho postupnosti môžeme písať v tvare

$$f(x) = \frac{1}{x_2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{x_2}} - \frac{1}{x_1\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{x_1}}\,.$$

Z lemy 8.2.3 ďalej vieme, že

$$f(x) = \frac{1}{x_2\sqrt{5}} \cdot \left(1 + \frac{x}{x_2} + \frac{x^2}{x_2^2} + \frac{x^3}{x_2^3} + \cdots\right) - \frac{1}{x_1\sqrt{5}} \cdot \left(1 + \frac{x}{x_1} + \frac{x^2}{x_1^2} + \frac{x^3}{x_1^3} + \cdots\right).$$

Z uvedeného zápisu už priamo vidíme, že

$$a_0 = \frac{1}{x_2\sqrt{5}} - \frac{1}{x_1\sqrt{5}}, \quad a_1 = \frac{1}{x_2^2\sqrt{5}} - \frac{1}{x_1^2\sqrt{5}}, \ \ldots, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}}\right), \ \ldots$$

Ak teraz za x_1 a x_2 dosadíme konkrétne hodnoty $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ a využijeme rovnosť $x_1.x_2 = -1 \ \Rightarrow (x_1.x_2)^{n+1} = (-1)^{n+1}$, tak dostaneme explicitné vyjadrenie členov Fibonacciho postupnosti

$$F(n) = a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right), \quad \text{pre } \forall n \in \mathbb{N}. \tag{8.15}$$

K tomuto vzorcu sa dá dospieť aj viacerými inými spôsobmi, ako sa ľahko môžeme presvedčiť v doporučenej literatúre. Explicitné vyjadrenie členov Fibonacciho postupnosti (8.15) môžeme už považovať za finálne, alebo ho ešte môžeme upraviť. Jednak preto, že v ňom je zbytočne veľa členov $(-1)^i$ a jednak preto, aby výsledný vzorec bol rovnaký, ako nám dá veta 8.3.1 v podkapitole 8.3.3. Platí

$$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} = (-1)^{n+1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \quad \text{a} \quad \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} = (-1)^{n+1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

Preto (8.15) môžeme písať ako

$$F(n) = a_n = \frac{(-1)^n(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Keďže $(-1)^n(-1)^{n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$, môžeme (8.15) ešte upraviť do tvaru.

$$F(n) = a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right), \quad \text{pre } \forall n \in \mathbb{Z}_0^+. \tag{8.16}$$

V tvare (8.16) dostaneme explicitné vyjadrenie členov Fibonacciho postupnosti, ak ho budeme hľadať pomocou vety 8.3.1.

8.3.2 Fibonacciho postupnosť inak

V predošlej podkapitole sme si ukázali, ako sa dá pomocou vytvárajúcich funkcií odvodiť explicitné vyjadrenie Fibonacciho postupnosti. V tejto podkapitole si toto explicitné vyjadrenie Fibonacciho postupnosti odvodíme ešte raz, avšak iným a trochu jednoduchším spôsobom. Takto si nielen pripomenieme to, že väčšina matematických problémov sa dá riešiť viac než len jedným spôsobom, ale zároveň si takto aj overíme správnosť explicitného vyjadrenia Fibonacciho postupnosti z predošlej podkapitoly. Majme teda danú postupnosť definovanú rekurentným vzťahom

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \,, \text{ pre } \; n \geq 0 \,. \tag{8.17}$$

Predpokladajme, že existuje riešenie rekurencie (8.17) v tvare $a_n = q^n$, kde $q \in \mathbb{C}$. Potom musí platiť

$$q^{n+2} = q^{n+1} + q^n$$

a po vykrátení oboch strán rovnice číslom q^n

$$q^2 = q^1 + 1 \quad \Rightarrow \quad q^2 - q - 1 = 0 \,.$$

Posledná kvadratická rovnica má dve riešenia

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{a} \qquad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \,.$$

Takže $a_n = q_1^n$ a $a_n = q_2^n$ sú riešenia rekurencie $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ a je zrejmé, že aj ich ľubovoľná lineárna kombinácia

$$a_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n \,, \quad \text{kde } c_1, c_2 \in \mathbb{C} \tag{8.18}$$

bude riešením rekurencie (8.17). Aby sme dostali Fibonacciho postupnosť, musíme nájsť také konštanty c_1 a c_2, pre ktoré dostaneme $a_0 = a_1 = 1$. Musí preto platiť sústava rovníc

$$\begin{aligned} 1 = a_0 &= c_1 q_1^0 + c_2 q_2^0 \\ 1 = a_1 &= c_1 q_1^1 + c_2 q_2^1 \end{aligned}$$

Riešime teda sústavu dvoch lineárnych rovníc o dvoch neznámych

$$\begin{aligned} 1 &= c_1 + c_2 \\ 1 &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \end{aligned}$$

Jej riešením sú čísla

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \qquad \text{a} \qquad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) .$$

Dosadením čísel c_1 a c_2 do vzťahu (8.18) dostaneme explicitné vyjadrenie n-tého člena Fibonacciho postupnosti

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) , \quad \text{pre } \; \forall n \in \mathbb{Z}_0^+ \,,$$

ktoré je ekvivaletné s explicitným vyjadrením (8.16) z predošlej podkapitoly.

8.3.3 Všeobecné rekurentné postupnosti

Pre všeobecné rekurentné postupnosti platí nasledujúca veta, ktorú uvedieme bez dôkazu. Jej dôkaz nie je komplikovaný, je len pracný na rozpisovanie. Robí sa podobným spôsobom, akým sme robili explicitné vyjadrenie členov Fibonacciho postupnosti v predošlých podkapitolách.

Veta 8.3.1 — Explicitné vyjadrenie rekurentných postupností. Nech $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je číselná postupnosť, ktorej prvých r členov $\{a_0, \dots, a_{r-1}\}$ je daných a ďalšie členy sú definované rekurentným vzťahom

$$a_n = c_{r-1}a_{n-1} + c_{r-2}a_{n-2} + \cdots + c_1 a_{n-r+1} + c_0 a_{n-r}\,, \quad \text{kde } c_0, \dots, c_{r-1} \in \mathbb{R}\,. \tag{8.19}$$

Na základe rekuretného vzťahu (8.19) definujúceho postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, si zostrojíme polynóm

$$x^r - c_{r-1}x^{r-1} - c_{r-2}x^{r-2} - \cdots - c_1 x - c_0 \tag{8.20}$$

a nájdeme všetky jeho komplexné korene. Nech $x_1, \dots, x_k$ sú všetky rôzne komplexné korene polynómu (8.20), pričom koreň x_i má násobnosť t_i. Potom existujú konštanty s_{ij}, kde $1 \le i \le k$ a $1 \le j \le t_i$ také, že platí

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} \left(s_{i,1}x_i^n + s_{i,2}nx_i^n + s_{i,3}n^2x_i^n + \cdots + s_{i,t_i}n^{t_i-1}x_i^n \right)\,.$$

Predošlá veta možno na prvý pohľad vyzerá odstrašujúco, avšak zdanie klame. Naviac, v príkladoch sa budeme väčšinou zaoberať rekurentnými postupnosťami, ktorých členy sú definované pomocou 2–3 predošlých členov, takže polynóm obvykle bude len kvadratický alebo kubický. Konštanty s_{ij}, spomenuté vo vete, budeme počítať pomocou prvých r členov rekuretnej postupnosti, ktoré budú dané. Pomocou nich zostrojíme sústavu r lineárnych rovníc o r neznámych. Naviac determinant tejto sústavy bude vždy nenulový, a preto bude mať táto sústava vždy práve jedno riešenie.

■ **Príklad 8.13** Dané sú prvé dva členy $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a rekurentný vzťah $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, pre $n \ge 2$, definujúci jej ďalšie členy. Nájdite explicitné vyjadrenie členov tejto postupnosti.

Riešenie: prvé členy tejto postupnosti sú $\{1,2,4,8,16,\dots\}$. Prvá možnosť riešenia, je postupovať rovnako ako v prípade Fibonacciho postupnosti. To znamená zostrojíme vytvárajúcu funkciu danej postupnosti

$$a(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + \dots$$

Ak 3 násobok danej postupnosti posunieme o 1 miesto doprava a -2 násobok danej postupnosti posunieme o 2 miesta doprava a tieto postupnosti sčítame, tak dostaneme

$$\left(3x - 2x^2\right).a(x) = a(x) - 1 + x\,.$$

Z toho si ľahko odvodíme vytvárajúcu funkciu

$$a(x) = \frac{1-x}{1-3x+2x^2} = \frac{1-x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{1-2x}\,.$$

Z príkladu 8.9 a lemy 8.2.3 už vieme, ako bude postupnosť, zodpovedajúca vytvárajúcej funkcii $a(x)$, vyzerať. Bude to postupnosť $\{a_n = 2^n\}_{n=0}^{\infty}$. Takže už vieme ako bude vyzerať explicitné vyjadrenie členov danej postupnosti.

Druhá možnosť riešenia je použiť vetu 8.3.1. Daný rekurentný vzťah, definujúci členy postupnosti, si prepíšeme tak, aby sme všetky členy postupnosti mali na ľavej strane rovnice a na pravej strane rovnice bola nula. K rekurencii potom zostrojíme zodpovedajúci polynóm

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0 \quad \longrightarrow \quad x^2 - 3x + 2\,.$$

Uvedený polynóm $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ má dva korene $x_1 = 1$ a $x_2 = 2$. Podľa vety 8.3.1 musia existovať konštanty $s_{1,1}$ a $s_{2,1}$ také, že platí

$$a_n = s_{1,1}1^n + s_{2,1}2^n\,. \tag{8.21}$$

Už len potrebujeme nájsť tieto konštanty. Poznáme prvé dva členy postupnosti $a_0 = 1$ a $a_1 = 2$. Keďže rovnosť (8.21) musí platiť aj pre tieto členy, dosadíme ich hodnoty do rovnosti (8.21) a dostaneme sústavu dvoch lineárnych rovníc o dvoch neznámych

$$\begin{array}{rclcrcl} 1 & = & s_{1,1} + s_{2,1}2^0 & \Longrightarrow & s_{1,1} + s_{2,1} & = & 1 \\ 2 & = & s_{1,1} + s_{2,1}2^1 & \Longrightarrow & s_{1,1} + 2s_{2,1} & = & 2 \end{array}$$

Riešením uvedenej sústavy sú konštanty $s_{1,1} = 0$ a $s_{2,1} = 1$. Preto explicitné vyjadrenie členov danej postupnosti bude $a_n = 2^n$. ∎

8.3.4 Počet binárnych stromov na n vrcholoch

Predtým než začneme s odvodzovaním vzorca pre počet binárnych stromov na n vrcholoch, si definujeme *Newtovone binomické koeficienty*. Každý sa už na stredoškolskej kombinatorike mohol stretnúť s pojmom *binomický koeficient*. Binomické koeficienty sú definované pre nezáporné celé čísla n, k pomocou vzťahu

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\dots\big(n-(k-1)\big)}{k!}$$

a používajú sa napríklad pri počítaní kombinácií, prípadne v binomickom rozvoji $\big((a \pm b)^n\big)$ atď. Newtonove binomické koeficienty, sú zovšeobecnením binomických koeficientov pre komplexné hodnoty n.

Definícia 8.3.1 — Newtonove binomické koeficienty. Nech $\alpha \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{Z}_0^+$. Potom Newtonov binomický koeficient $\binom{\alpha}{k}$ je definovaný vzťahom

$$\binom{\alpha}{0} = 1 \qquad \text{a} \qquad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots\big(\alpha-(k-1)\big)}{k!}\,, \quad \text{pre } k \geq 1\,.$$

Zovšeobecnené binomické koeficienty zaviedol Isaac Newton pri skúmaní rozvoja $(1+x)^\alpha$. Ak je n celé číslo, tak binomická veta hovorí, ako bude vyzerať rozvoj $(1+x)^n$. Ako však bude tento rozvoj vyzerať, ak exponent nie je celé číslo, alebo je to dokonca komplexné číslo. Newton zistil[11], že rozvoj $(1+x)^\alpha$ bude mať pre ľubovoľné $\alpha \in \mathbb{C}$ tvar

$$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots \tag{8.22}$$

Z (8.22) vidíme, že nekonečná postupnosť $\left\{\binom{\alpha}{n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ má vytvárajúcu funkciu $(1+x)^\alpha$, ktorá konverguje pre všetky $|x| < 1$. Pre Newtonove (zovšeobecnené) binomické koeficienty, podobne ako pre binomické koeficienty, sa dajú dokázať rôzne identity. Tým sa tu však podrobnejšie zaoberať nebudeme. Záujemci, v prípade potreby, nájdu dostatok informácií v doporučenej literatúre. My

[11] My to vieme zistiť tiež. Stačí rozvinúť funkciu $(1+x)^\alpha$ do Taylorovho radu so stredom $x_0 = 0$ (Maclaurinov rad).

si tu odvodíme len jednu takúto identitu, pretože ju neskôr budeme potrebovať. Predtým, než uvedieme príklad, definujeme si jeden pomocný pojem, ktorý nám zjednoduší zápis.

Definícia 8.3.2 — Dvojný faktoriál (semifaktoriál). Dvojný faktoriál čísla $n \in \mathbb{Z}_0^+$, označujeme $n!!$ a definuje sa nasledovne. Pre $n = 0$ platí $0!! = 1$ a pre $n \geq 1$ je $n!!$ súčin všetkých celých čísel i, kde $1 \leq i \leq n$, takých, že číslo i má rovnakú paritu ako číslo n.

Pre lepšiu zrozumiteľnosť rozpíšeme definíciu dvojného faktoriálu zvlášť pre nepárne a zvlášt pre párne čísla

$$\begin{aligned}(2n-1)!! &= 1.3\ldots(2n-1) \qquad \text{napríklad} \qquad 7!! = 1.3.5.7 = 105\\ (2n)!! &= 2.4\ldots 2n \qquad\qquad \text{napríklad} \qquad 8!! = 2.4.6.8 = 384\end{aligned}$$

Priamo z definície dvojného faktoriálu je zrejmá rovnosť

$$(2n-1)!!(2n)!! = (2n)! \qquad \Longrightarrow \qquad (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{(2n)!!} \tag{8.23}$$

a rovnako triviálne sa nahliadne platnosť rovnosti

$$(2n)!! = \underbrace{2.4\ldots(2n)}_{n \text{ činiteľov}} = 2^n\,(1.2\ldots n) = 2^n n! \tag{8.24}$$

■ **Príklad 8.14** Pre Newtonov binomický koeficient dokážte identitu

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^{(n-1)}}{4^n(2n-1)} \cdot \binom{2n}{n}$$

Riešenie: začneme tým, že si $\binom{\frac{1}{2}}{n}$ rozpíšeme podľa definície 8.3.1. Ďalej sú to už len jednoduché úpravy algebraických výrazov a využitie rovností (8.23), (8.24) a definície binomických koeficientov zo strednej školy

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}^{n \text{ činiteľov}}}{n!} \cdot \frac{2^n}{2^n} = \frac{\overbrace{(1-2)\,(1-4)\ldots(1-2(n-1))}^{(n-1) \text{ činiteľov}}}{2^n n!} =$$

$$= \frac{\overbrace{(1-2)(1-4)\ldots(3-2n)}^{(n-1) \text{ činiteľov}}}{2^n n!} \cdot \frac{(-1)^{(n-1)}}{(-1)^{(n-1)}} = \frac{(-1)^{(n-1)}\big(1.3\ldots(2n-3)\big)}{2^n n!} \cdot \frac{(2n-1)}{(2n-1)} =$$

$$= \frac{(-1)^{(n-1)}(2n-1)!!}{2^n(2n-1)n!} = \frac{(-1)^{(n-1)}}{2^n(2n-1)n!} \cdot \frac{(2n)!}{(2n)!!} =$$

$$= \frac{(-1)^{(n-1)}}{2^n(2n-1)n!} \cdot \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(-1)^{(n-1)}}{2^{2n}(2n-1)} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(-1)^{(n-1)}}{4^n(2n-1)} \cdot \binom{2n}{n}$$

■

Poďme sa teraz venovať binárnym stromom. Pri zisťovaní počtu binárnych stromov na n vrcholoch, bude pre nás výhodnejšie použiť induktívnu (rekurzívnu) definíciu 4.4.1 (strana 80) binárnych stromov. Táto definícia hovorí

> *Binárny strom je buď prázdny strom, t. j. nemá žiadnu hranu ani vrchol, alebo je to koreňový strom s koreňom a usporiadanou dvojicou podstromov (B_1, B_2), kde B_1 aj B_2 sú binárne stromy.*

Budeme teraz skúmať nekonečnú postupnosť $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde b_n je počet všetkých neizomorfných binárnych stromov na n vrcholoch. Prvé členy tejto postupnosti ľahko nájdeme aj skúšaním všetkých možností a zistíme, že

$$b_0 = 1\,,\ \ b_1 = 1\,,\ \ b_2 = 2\,,\ \ b_3 = 5\,,\ \ b_4 = 14\,,\ \ldots$$

Podľa definície 4.4.1 je aj prázdny strom binárnym stromom, a preto $b_0 = 1$. Vytvárajúca funkcia postupnosti $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ bude

$$b(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots$$

Ak by sa nám podarilo nájsť rekuretné vyjadrenie postupnosti $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, tak podľa vety 8.3.1 by sme už ľahko našli aj explicitné vyjadrenie jej členov. V tomto prípade to však nebude také jednoduché, pretože rekurentné vyjadrenie postupnosti $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ síce existuje, ale nie je lineárne.

Vráťme sa opäť ku definícii 4.4.1, ktorej podstatnú časť máme odcitovanú vyššie. Ak poznáme hodnoty $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$, tak ako pomocou nich vypočítame hodnotu b_n? Binárny strom na n vrcholoch je tvorený koreňom (1 vrchol) a usporiadanou dvojicou (B_1, B_2) binárnych stromov, ktoré majú dokopy $(n-1)$ vrcholov. Preto musí pre $n \geq 1$ platiť

$$b_n = b_0b_{n-1} + b_1b_{n-2} + \cdots + b_{n-2}b_1 + b_{n-1}b_0 = \sum_{i=0}^{n-1} b_ib_{n-1-i}\,. \tag{8.25}$$

Vzorec (8.25) nám ale, podľa definície 8.2.4, vyjadruje koeficient pri člene x^{n-1} v súčine vytvárajúcich funkcií $b(x).b(x) = b^2(x)$. Alebo inak povedané, b_n je, pre $n \geq 1$, koeficient pri člene x^n vo vytvárajúcej funkcii $xb^2(x)$. Takže funkcia $xb^2(x)$ bude „takmer" zodpovedať postupnosti $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$. Rozdiel je len v člene b_0, pretože prvý člen postupnosti, ktorú vytvára funkcia $xb^2(x)$, bude 0 a nie 1. Odtiaľ dostávame vzťah pre vytvárajúcu funkciu $b(x)$

$$xb^2(x) = b(x) - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad xb^2(x) - b(x) + 1 = 0 \tag{8.26}$$

na poslednú rovnicu v (8.26) sa môžeme pozerať ako na funkcionálnu kvadratickú rovnicu a podľa známeho vzorca nájsť jej riešenie

$$b(x)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} \tag{8.27}$$

Keďže $b_0 = 1$, zvolíme si ku funkcionálnej rovnici (8.26) počiatočnú podmienku $b(0) = 1$ a pozrieme sa bližšie na dve možnosti $(\pm)$ v (8.27).

- Ak by sme zobrali $b(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$, čomu sa bude rovnať $b(0)$? Musíme vypočítať limitu pre $x \to 0$

  $$\text{Limita} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} \quad \text{neexistuje!} \tag{8.28}$$

  Čitateľ zlomku má limitu 2 a menovateľ konverguje k nule, ale znamienko sa líši v závislosti od smeru. Limita zľava je $-\infty$ a limita zprava je ∞. Takže obojstranná limita neexistuje.

- Ak zoberieme $b(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$, čomu sa teraz bude rovnať $b(0)$? Počítame limitu pre $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \cdot \frac{1+\sqrt{1-4x}}{1+\sqrt{1-4x}} = \lim_{x\to 0} \frac{4x}{2x\left(1+\sqrt{1-4x}\right)} = 1 \quad (8.29)$$

Z (8.28) a (8.29) vidíme, že jediné vyhovujúce riešenie rovnice (8.26) je $b(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$. Vytvárajúcu funkciu už máme, potrebujeme ku nej ešte nájsť zodpovedajúcu nekonečnú postupnosť. Platí $\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{\frac{1}{2}}$ a z (8.22) a lemy 8.2.3 vieme, že

$$\sqrt{1-4x} = \binom{\frac{1}{2}}{0} + \binom{\frac{1}{2}}{1}(-4)x + \binom{\frac{1}{2}}{2}(-4)^2x^2 + \cdots + \binom{\frac{1}{2}}{n}(-4)^n x^n + \cdots$$

Máme teda vytvárajúcu funkciu $b(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ a poďme si nájsť jej zodpovedajúcu postupnosť krok po kroku

- ▷ Funkcii $\sqrt{1-4x}$ prináleží nekonečná postupnosť $\left\{(-4)^n\binom{\frac{1}{2}}{n}\right\}_{n=0}^{\infty}$.
- ▷ Funkcii $-\sqrt{1-4x}$ prináleží nekonečná postupnosť $\left\{(-1)(-4)^n\binom{\frac{1}{2}}{n}\right\}_{n=0}^{\infty}$.
- ▷ Funkcii $1-\sqrt{1-4x}$ bude zodpovedať „takmer“ rovnaká postupnosť ako funkcii $-\sqrt{1-4x}$. Rozdiel je len v tom, že sa eliminuje konštantý člen 1.
- ▷ Koeficient $\frac{1}{x}$ pri vytvárajúcej funkcii $1-\sqrt{1-4x}$ nám, podľa lemy 8.2.2, posunie postupnosť o 1 miesto doľava. Konštantný člen sa už rovná 0, a preto je násobenie koeficientom $\frac{1}{x}$ dobre definované.
- ▷ Napokon nám násobenie koeficientom $\frac{1}{2}$ zníži hodnotu každého člena postupnosti na polovicu.

Podľa predošlých bodov už vieme, ako bude vyzerať explicitné vyjadrenie nekonečnej postupnosti zodpovedajúcej vytvárajúcej funkcii $b(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$. To znamená, že už vieme explicitne vyjadriť počet binárnych stromov na n vrcholoch. Platí

$$b_n = -\frac{(-4)^{(n+1)}}{2} \cdot \binom{\frac{1}{2}}{n+1} \quad (8.30)$$

V príklade 8.14 sme si odvodili identitu pre číslo $\binom{\frac{1}{2}}{n}$, čo teraz využijeme na zjednodušenie výrazu (8.30).

$$b_n = -\frac{(-4)^{(n+1)}}{2} \cdot \binom{\frac{1}{2}}{n+1} = -\frac{(-4)^{(n+1)}}{2} \cdot \frac{(-1)^n}{4^{(n+1)}(2n+1)}\binom{2n+2}{n+1} =$$

$$= \frac{(-4)^{(n+1)}}{2} \cdot \frac{(-1)^{(n+1)}}{4^{(n+1)}(2n+1)}\binom{2n+2}{n+1} = \frac{4^{(n+1)}}{2.4^{(n+1)}(2n+1)}\binom{2n+2}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{2(2n+1)} \cdot \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{1}{2(2n+1)} \cdot \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)} =$$

$$\frac{2}{2(2n+1)} \cdot \binom{2n}{n}\frac{(2n+1)(n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$$

Práve sme odvodili explicitné vyjadrenie počtu binárnych stromov na n vrcholoch. Tento počet je $b_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$. Čísla b_n sa nazývajú *Catalanove čísla* a môžeme sa s nimi stretnúť nielen v súvislosti s počtom binárnych stromov na n vrcholoch, ale aj vo viacerých iných súvislostiach, v diskrétnej matematike a informatike. Iné príklady ich použitia môžeme nájsť napríklad v knihe [13] a v ďalších knihách z doporučenej literatúry.

8.4 Cvičenia

Cvičenie 8.1 Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $\{\underbrace{1,1,\dots,1,1}_{n \text{ jednotiek}},0,0\dots\}$. ■

Cvičenie 8.2 Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $\{\underbrace{n,n,\dots,n,n}_{n\times n},0,0\dots\}$. ■

Cvičenie 8.3 Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde

$$a_n = \begin{cases} (n+1)(n+2)\,, & \text{pre } 0 \le i \le (k-1) \\ 0\,, & \text{pre } i \ge k\,, \qquad\qquad \text{kde } k \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

■

Cvičenie 8.4 Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $\{\alpha n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$. ■

Cvičenie 8.5 Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $\{n^2\}_{n=0}^{\infty}$. ■

Cvičenie 8.6 Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $\{\alpha^n n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$. ■

Cvičenie 8.7 Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde

$$a_n = \begin{cases} 0\,, & \text{pre } n = 0 \\ \frac{\alpha^n}{n}\,, & \text{pre } n \ge 1\,, \quad \text{kde } \alpha \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

■

Cvičenie 8.8 Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde

$$a_n = \begin{cases} 0\,, & \text{pre } n = 0 \\ \frac{\alpha^n}{n!}\,, & \text{pre } n \ge 1\,, \quad \text{kde } \alpha \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

■

Cvičenie 8.9 Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde

$$a_n = \begin{cases} 0\,, & \text{pre } n \text{ párne} \\ \frac{\alpha^n}{n!}\,, & \text{pre } n \text{ nepárne}\,. \end{cases}$$

■

Cvičenie 8.10 Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde

$$a_n = \begin{cases} 0\,, & \text{pre } n \text{ nepárne} \\ \frac{\alpha^n}{n!}\,, & \text{pre } n \text{ párne}\,. \end{cases}$$

Cvičenie 8.11 Dokážte kombinatorickú identitu

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Cvičenie 8.12 Dokážte kombinatorickú identitu

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}.$$

Cvičenie 8.13 Vypočítajte súčet

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$.

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

Cvičenie 8.14 *Multinomická veta* je zovšeobecnením binomickej vety a hovorí o tom ako sa umocňuje súčet viacerých členov. Pre ľubovoľné $m \in \mathbb{N}$ a $n \in \mathbb{Z}_0^+$ platí

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=n \\ k_1,k_2,\ldots,k_m \geq 0}} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} x_1^{k_1}.x_2^{k_2}\ldots x_m^{k_m}$$

Výraz $\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ sa nazýva *multinomický koeficient* a vypočíta sa zo vzťahu

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1!.k_2!\ldots k_m!}$$

Dokážte multinomickú vetu rovnakým spôsobom, aký sme na strane 159 použili pri dôkaze binomickej vety.

Cvičenie 8.15 Zistite aký koeficient bude pri člene

(a) $a^2b^3c^5$ vo výraze $(a+b-c)^{12}$
(b) $a^3b^2c^7$ vo výraze $(a+b-c)^{12}$
(c) ab^6c^2 vo výraze $\left(2\sqrt{a}-b^3+c^2\right)^5$
(d) $a^2b^2c^6d^2$ vo výraze $\left(2a-3b^2+\frac{c^3}{2}-\frac{d}{3}\right)^7$
(e) x^4 vo výraze $\left(1-x+2x^2\right)^5$
(f) x^5 vo výraze $\left(1+x+x^2+x^3\right)^6$
(g) x^4 vo výraze $\left(1-x+x^2-x^3\right)^6$
(h) x^5 vo výraze $\left(1-x+x^2-x^3\right)^8$

Cvičenie 8.16 Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $\{2^n + 3^n\}_{n=0}^{\infty}$. ■

Cvičenie 8.17 Pre Newtonove binomické koeficienty dokážte identitu

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}.$$

■

Cvičenie 8.18 Postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je daná rekuretne pomocou niekoľkých prvých členov a rekurentného vzťahu definujúceho ďalšie členy. Nájdite explicitné vyjadrenie člen a_n pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

(a) $a_0 = a_1 = 1$, pre $n \geq 2$ $\quad a_n = 3_{n-1} - 2a_{n-2}$

(b) $a_0 = 1, a_1 = 2$, pre $n \geq 2$ $\quad a_n = 6_{n-1} - 9a_{n-2}$

(c) $a_0 = a_1 = 1, a_2 = 2$, pre $n \geq 3$ $\quad a_n = 5_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3}$

(d) $a_0 = a_1 = a_2 = 1$, pre $n \geq 3$ $\quad a_n = 6_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$

(e) $a_0 = a_1 = 1$, pre $n \geq 2$ $\quad a_n = 2_{n-1} + 2a_{n-2}$

(f) $a_0 = a_1 = 1$, pre $n \geq 2$ $\quad a_n = 2_{n-1} - 2a_{n-2}$

■

Cvičenie 8.19 Hraciu plochu rozmeru $1 \times n$ ofarbujeme troma rôznymi farbami. Koľko, pre dané $n \in \mathbb{N}$, existuje takých zafarbení, pri ktorých žiadne dve susedné polia nie sú zafarbené rovnakou farbou?
Návod: *Odvoďte si rekurentný vzťah.* ■

Cvičenie 8.20 Koľko n-ciferných čísel zložených len z jednotiek a dvojek neobsahuje žiadne dve jednotky bezprostredne za sebou? ■

Cvičenie 8.21 Nech $n \in \mathbb{N}$. Koľko existuje slov dĺžky n, zložených len z písmen `a`, `b` a `c` tak, že neobsahujú dvojicu bezprostredne za sebou idúcich písmen `a`? ■

Cvičenie 8.22 Nech $n \in \mathbb{N}$. Koľko existuje slov dĺžky n, zložených len z písmen `a`, `b`, `c` a `d` tak, že neobsahujú dvojicu bezprostredne za sebou idúcich písmen `a` alebo `b` a ani dvojice písmen `ab` alebo `ba`?? ■

Cvičenie 8.23 Nech $n \in \mathbb{N}$. Pre dané n zistite, koľko kostier má graf W_n, tzv. koleso na $(n+1)$ vrcholoch. ■

Cvičenie 8.24 Správne uzátvorkovaný výraz, obsahujúci n párov zátvoriek je taký, v ktorom sa dva páry zátvoriek „nekrížia“. Čiže ak si pri čítaní zľava-doprava očíslujeme otváracie zátvorky dvoch párov ako 1. a 2., tak najskôr musí prísť uzatváracia zátvorka 2. a potom až uzatváracia zátvorka 1. Napríklad pre $n = 1$ existuje len 1 správne uzátvorkovaný výraz $()$, pre $n = 2$ máme 2 správne uzátvorkované výrazy $()()$ a $(())$, ... Dokážte, že pre n párov zátvoriek zodpovedá počet správne uzátvorkovaných výrazov Catalanovmu číslo $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. ■

Cvičenie 8.25 Nech $n \in \mathbb{N}$. Pre dané n vypočítajte determinant matice rozmeru $n \times n$

(a) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(b) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

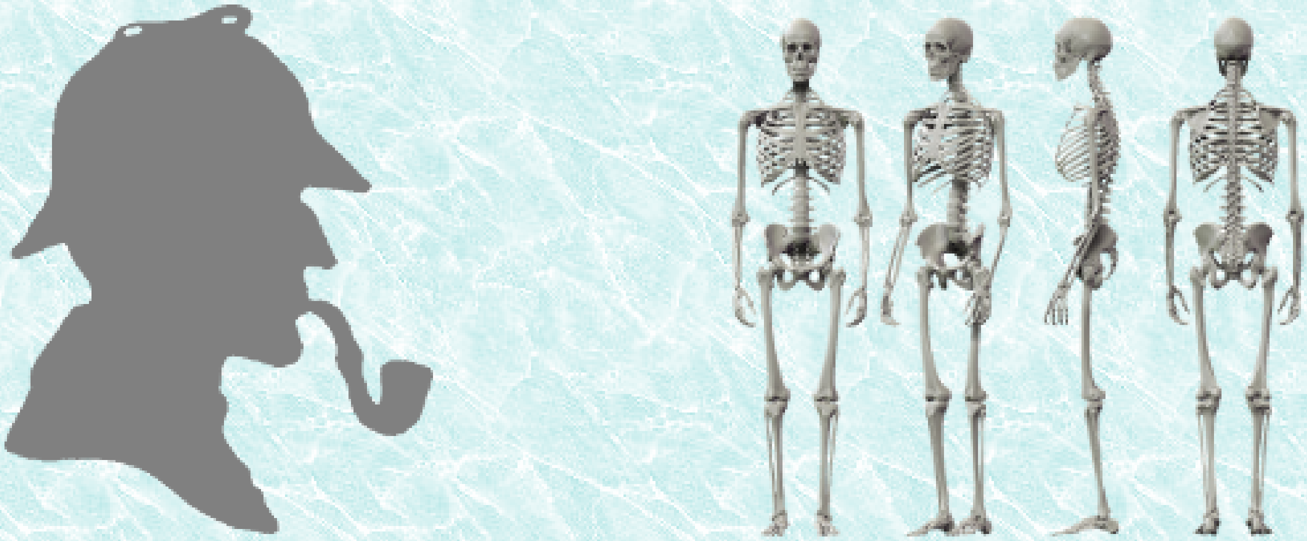
(c) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(d) $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(e) $$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 5 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 3 & 5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 \end{pmatrix}$$

(f) $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

■



9. Prehľadávanie grafov

9.1 Úvod

Na konci kapitoly 3 bol v podkapitole 3.5 (strana 62) definovaný pojem *kostra* grafu. Kostra grafu sa v aplikáciach často využíva a potrebujeme ju všade tam, kde je potreba nájsť „najmenší“ súvislý faktor daného grafu. Pritom pojem „najmenší“ je tu chápaný v zmysle počtu hrán. Algoritmus hľadania kostry grafu, použitý v dôkaze vety 3.5.1, bol veľmi neefiktívny a prakticky nepoužiteľný. Avšak jeho triviálnou modifikáciou dostaneme nasledujúci algoritmus hľadania kostry daného grafu, ktorý je oveľa lepší /efektívnejší.

Konštrukcia kostry grafu

VSTUP: Súvislý obyčajný graf $G = (V, E)$.

VÝSTUP: $S = (V', E')$ – kostra grafu G.

INICIALIZÁCIA

$V' := V$;

$E' := \{\}$;

VYTVÁRANIE KOSTRY S

for $\{$ *pre všetky hrany* $h \in E$ $\}$ **do**

  if $\{$ *pridaním hrany* h *do* E' *nevznikne cyklus v* S $\}$ **then**

    $E' := E' \cup \{h\}$;

  end

  if $\{\, |E'| = |V'| - 1 \,\}$ **then**

    STOP;

  end

end

Zistiť, či pridaním jednej konkrétnej hrany vznikne cyklus, je oveľa rýchlejšia operácia, než hľadanie všetkých cyklov v danom grafe. Preto je modifikovaný algoritmus, ktorý je uvedený na predošlej strane, oveľa efektívnejší než predtým uvedená alternatíva hľadania všetkých cyklov v danom grafe. Ale ani tento modifikovaný algoritmus hľadania kostry daného grafu ešte nie je optimálny. Ešte rýchlejšie a efektívnejšie sú dva prehľadávacie algoritmy, ktoré si uvedieme v nasledujúcej podkapitolách tejto kapitoly. Sú to algoritmy prehľadávania grafu *do šírky* a prehľadávania grafu *do hĺbky*.

9.2 Prehľadávanie grafu

Skôr než uvedieme popis algoritmov prehľadávania grafu do šírky a do hĺbky, uvedieme si dátové štruktúry *fronta* a *zásobník*, ktoré nám popis oboch algoritmov zjednotia a zjednodušia. Pri prehľadávaní grafov budeme ich hrany ukladať práve do fronty, resp. do zásobníka.

9.2.1 Fronta (FIFO) a zásobník (LIFO)

Fronta (po anglicky *queue*) a *zásobník* (po anglicky *stack*) sú v informatike často používané dátové štruktúry, slúžiace na dočasné ukladanie dát. Tieto dve štruktúry sa odlišujú spôsobom prístupu k uloženým dátam.

Fronta – FIFO

Skratka FIFO znamená *„First-In-First-Out"*. Čiže dáta, ktoré ako prvé do fronty uložíme, z neho aj ako prvé vyberieme. Takúto dátovú štruktúru si môžeme predstaviť ako „rúru", do ktorej z jednej strany veci vkladáme a z druhej vyberáme. Takže to, čo sme do „rúry" skôr vložili, z nej na druhej strane musíme aj skôr vybrať. FIFO fronta je napríklad výstupný žlab pre ťah lotérie, aký vidíme na obrázku 9.1. Alebo „fronta", či „rad", ľudí stojacich pri pokladni v obchode. Ľudia, ktorí poznajú operačné systémy UNIX-ového typu, sa už určite stretli s pojmom *pipe*, alebo po slovensky *rúra*. Pomocou rúr sa v UNIX-e dajú zreťazovať výstupy a vstupy príkazov, čo je častá prax. *Pipe* v UNIX-e je vlastne fronta (FIFO).

Obr. 9.1: Príklad fronty (FIFO)

Obr. 9.2: Príklad zásobníka (LIFO)

Zásobník – LIFO

Skratka LIFO znamená *„Last-In-First-Out"*. Čiže dáta, ktoré sme ako posledné do zásobníka vložili, z neho ako prvé vyberieme. Typický príklad LIFO zásobníka, je zásobník do pištole, aký vidíme na obrázku 9.2.

Frontu budeme v algoritme označovať písmenom F a zásobník písmenom Z. Pri oboch budeme používať dve funkcie. Prvá bude funkcia $F.\texttt{vyber}()$, resp. $Z.\texttt{vyber}()$, ktorá nám z fronty, resp. zásobníka, vyberie nasledujúci objekt. Druhá funkcia bude $F.\texttt{vloz}(x)$, resp. $Z.\texttt{vloz}(x)$, ktorá nám do fronty resp. zásobníka, vloží objekt x.

Označovanie hrán a ich vrcholov

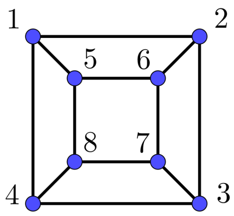
Pri prehľadávaní grafu, či už do šírky, alebo do hĺbky, budeme pracovať s neorientovanými grafmi. Čiže hrana medzi vrcholmi u a v bude dvojprvková množina (neusporiadaná dvojica) $\{u,v\}$. Samotné hrany budeme označovať písmenami $h, h', \ldots$

Avšak pri prehľadávaní grafu budeme konštruovať koreňový strom, a preto jeho hranám dáme istú „orientáciu“. *Počiatočným vrcholom hrany* budeme nazývať ten jej vrchol, ktorý je bližšie ku koreňu stromu a *koncový vrchol hrany*, bude ten jej vrchol, ktorý je ďalej od koreňa stromu. Z tohoto dôvodu zavedieme aj dve funkcie, ktoré v algoritmoch budeme používať. Funkcia `zaciatok`(h) nám vráti počiatočný vrchol hrany h a funkcia `koniec`(h) nám vráti koncový vrchol hrany h.

9.3 Prehľadávanie grafu do šírky

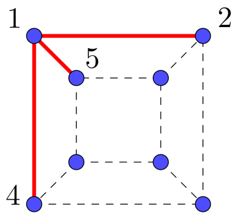
Kostra grafu je strom a pokiaľ si v strome vyberieme jeden konkrétny vrchol, tak dostávame koreňový strom. Algoritmus prehľadávania grafu do šírky, po anglicky *„Breadth-first search“* (BFS), je založený na myšlienke prehľadávania vrcholov grafu v poradí, ktoré závisí od ich vzdialenosti od koreňa stromu. Preto je tento algoritmus vhodný na nájdenie najkratšej vzdialenosti medzi zvoleným vrcholom grafu (koreňom) a ľubovoľným iným vrcholom grafu. Všetky vrcholy na jednej úrovni koreňového stromu sa spracujú skôr, než prejdeme na ďalšiu úroveň. Čiže na začiatku máme len koreň stromu, nultú úroveň. V prvom kroku prehľadávania spracujeme všetky vrcholy prvej úrovne atď. Predvedieme si to na príklade.

■ **Príklad 9.1**

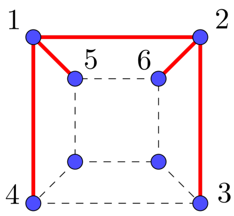


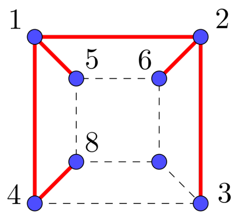
Na obrázku vľavo, je daný graf, ktorého vrcholy sú označené číslami 1 až 8. Nájdite jeho kostru prehľadávaním do šírky, pri lexikografickom usporiadaní vrcholov.

<u>Riešenie:</u> Začneme vrcholom 1 a v prvom kroku pridáme všetky s ním incidujúce hrany a ich druhé koncové vrcholy, pri ktorých nám nevznikne cyklus. Dostaneme strom na nasledovnom obrázku

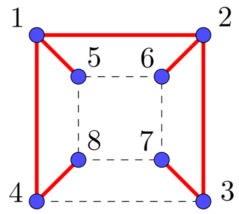


Týmto je zostrojená 1. úroveň koreňového stromu. Ku vrcholu 1 nám pribudli vrcholy 2, 4 a 5. Samozrejme pribudli aj hrany medzi týmito vrcholmi a koreňom stromu (vrcholom 1). V druhom kroku postupne prehľadáme vrcholy 2, 4 a 5 v uvedenom poradí a pridáme všetky s nimi incidujúce hrany a ich druhé koncové vrcholy, pri ktorých nám nevznikne cyklus. Postup je zobrazený na nasledujúcich obrázkoch





Týmto je zostrojená 2. úroveň koreňového stromu. Prehľadaním vrcholu 2 nám pribudli vrcholy 3 a 6 a dve hrany medzi nimi a vrcholom 2. Prehľadaním vrcholu 4 nám pribudol vrchol 8 a hrana medzi ním a vrcholom 4. Prehľadaním vrcholu 5 nám nepribudlo nič ďalšie, pretože ak by sme pridali do existujúceho stromu akúkoľvek s ním incidujúcu hranu, tak by nám vznikol cyklus. V ďalšom kroku ideme prehľadať vrcholy 3 a 6. Výsledok vidíme na ďalšom obrázku



Týmto je zostrojená 3. úroveň koreňového stromu. Prehľadaním vrcholu 3 nám pribudol vrchol 7 a hrana medzi ním a vrcholom 3. V tejto chvíli už koreňový strom obsahuje všetky vrcholy pôvodného grafu, takže je jeho kostrou. ■

Pseudokód algoritmu na prehľadávanie grafu do šírky môže vyzerať napríklad takto

---

Prehľadávanie grafu do šírky

VSTUP: Súvislý obyčajný graf $G = (V, E)$ a pevne zvolený vrchol $v_1 \in V$.

VÝSTUP: $S = (V', E')$ – kostra grafu G.

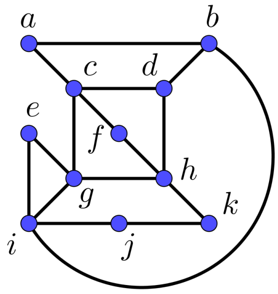
INICIALIZÁCIA

for $\{$ *pre všetky hrany* $h \in E$, *kde* $\texttt{zaciatok}(h) = v_1$ $\}$ **do**
  $F.\texttt{vloz}(h)$;
end
$E' := \{\}$;
$V' := \{v_1\}$;

VYTVÁRANIE KOSTRY S

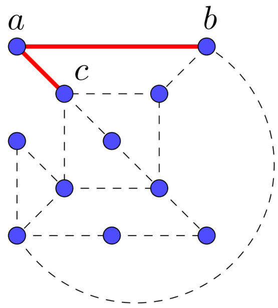
while $\{\ |V'| < |V|\ \}$ **do**
  $h := F.\texttt{vyber}()$;
  if $\{$ $h \notin E'$ *a pridaním hrany* h *do* E' *nevznikne cyklus v* S $\}$ **then**
    $E' := E' \cup \{h\}$;
    $V' := V' \cup \{\texttt{koniec}(h)\}$;
    for $\{$ *pre všetky hrany* $h' \in E$, *kde* $\texttt{zaciatok}(h') = \texttt{koniec}(h)$ $\}$ **do**
      $F.\texttt{vloz}(h')$;
    end
  end
end

■ **Príklad 9.2**

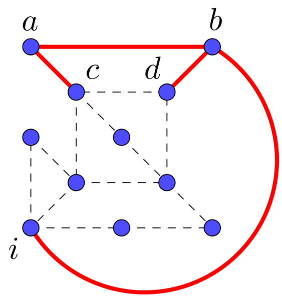


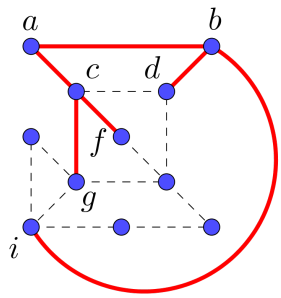
Na obrázku vľavo je daný graf, ktorého vrcholy sú označené písmenami a až k. Nájdite jeho kostru prehľadávaním do šírky, pri lexikografickom usporiadaní vrcholov.

Riešenie: Začneme vrcholom a a v prvom kroku pridáme všetky s ním incidujúce hrany a ich druhé koncové vrcholy, pri ktorých nám nevznikne cyklus. Dostaneme strom na nasledovnom obrázku

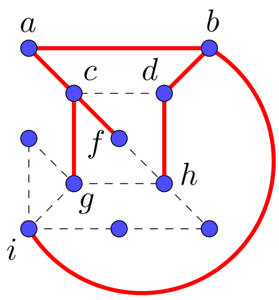


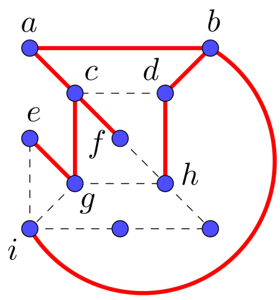
Týmto je zostrojená 1. úroveň koreňového stromu. Pribudli nám vrcholy b, c a 2 hrany medzi nimi a koreňom stromu. V druhom kroku prehľadáme vrcholy b a c v uvedenom poradí. Výsledok vidíme na ďalších obrázkoch

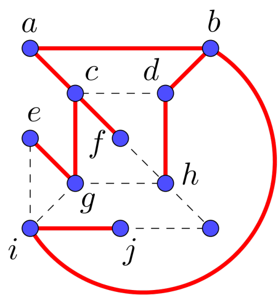




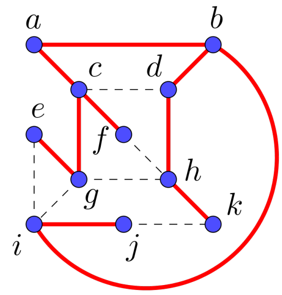
Týmto je zostrojená 2. úroveň koreňového stromu. Prehľadaním vrcholu b nám pribudli vrcholy d a i a prehľadaním vrcholu c nám pribudli vrcholy f a g. A samozrejme pribudli aj 4 zodpovedajúce hrany. V treťom kroku ideme prehľadať vrcholy d, f, g a i v uvedenom poradí. Dostávame







Týmto je zostrojená 3. úroveň koreňového stromu. Prehľadaním vrcholu d sme dostali vrchol h, prehľadaním vrcholu f nepribudol žiadny vrchol, prehľadaním vrcholu g pribudol vrchol e a prehľadaním vrcholu i pribudol vrchol j. Spolu s vrcohlmi pribudli aj príslušné hrany. V poslednom štvrtom kroku prehľadáme vrcholy e, h a j v uvedenom poradí. Dostávame

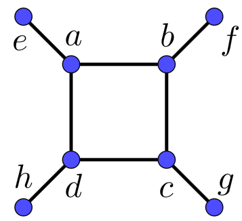


Týmto je zostrojená 4. úroveň koreňového stromu. Ako posledný pribudol vrchol k, prehľadaním vrcholu h a pribudla aj hrana medzi týmito dvoma vrcholmi. Koreňový strom už obsahuje všetky vrcholy daného grafu, takže je jeho kostrou. ■

Uvedieme ešte dva príklady prehľadávania grafu do šírky a okrem grafickej interpretácie si v nich zapíšeme postup prehľadávania grafu aj formou tabuľky.

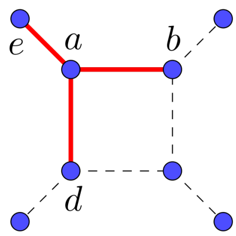
■ Príklad 9.3

Na obrázku vpravo, je daný graf, ktorého vrcholy sú označené písmenami a až h. Nájdite jeho kostru prehľadávaním do šírky, pri lexikografickom usporiadaní vrcholov.



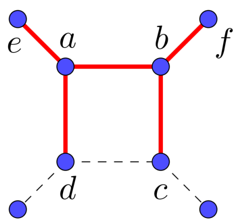
Riešenie: Tabuľkový zápis prehľadávania grafu bude mať 3 stĺpce. V prvom stĺpci tabuľky budú vrcholy, ktoré už patria do stromu S a ktorých incidujúce hrany ideme prehľadávať. V druhom stĺpci tabuľky budú hrany, ktoré sú už súčasťou stromu S, čiže tie, ktoré sú na obrázku červené. A napokon, v treťom stĺpci tabuľky budú hrany, ktoré su momentálne vo fronte a čakajú na spracovanie. Červenou farbou budú označené tie hrany vo fronte, ktorých pridaním do S nevznikne cyklus a budú preto do S pridané v nasledujúcom kroku.

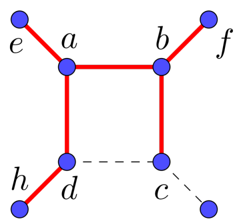
Prehľadávanie začneme vrcholom a a v prvom kroku pridáme všetky s ním incidujúce hrany a ich druhé koncové vrcholy, pri ktorých nám nevznikne cyklus. Dostaneme strom na nasledovnom obrázku



Krok	Prehľadávané vrcholy	Hrany v S	Obsah fronty
0.	a		$\{a,b\}, \{a,d\}, \{a,e\}$
1.	b,d,e	$\{a,b\}, \{a,d\}, \{a,e\}$	$\{b,a\}, \{b,c\}, \{b,f\}, \{d,a\}, \{d,c\}, \{d,h\}, \{e,a\}$

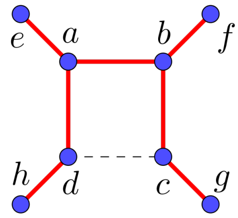
Týmto je zostrojená 1. úroveň koreňového stromu. Pribudli nám vrcholy b, d, e a hrany medzi nimi a vrcholom a. V druhom kroku prehľadaním týchto dvoch vrcholov dostávame





Krok	Prehľadávané vrcholy	Hrany v S	Obsah fronty
2.	c, f, h	$\{b,c\},\{b,f\},\{d,h\}$	$\{c,b\},\{c,d\},\{c,g\},\{f,b\},\{h,d\}$

Týmto je zostrojená 2. úroveň koreňového stromu. Pribudli nám vrcholy c, f, h a s nimi tri ďalšie hrany. V treťom kroku prehľadáme tieto tri vrcholy a dostaneme

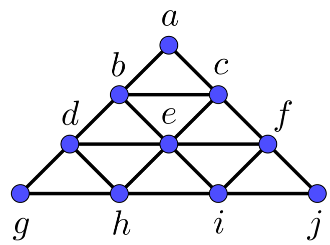


Krok	Prehľadávané vrcholy	Hrany v S	Obsah fronty
3.	g	$\{c,g\}$	

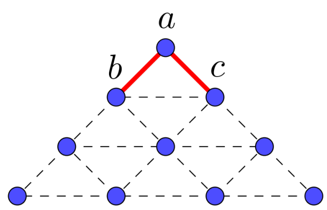
Týmto je zostrojená 3. úroveň koreňového stromu. V strome už máme všetky vrcholy pôvodného grafu, takže máme jeho kostru. ■

■ **Príklad 9.4**

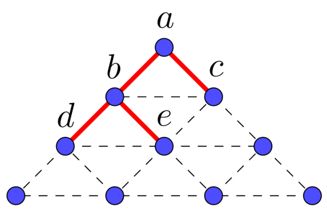
Na obrázku vpravo je daný graf, ktorého vrcholy sú označené písmenami a až j. Nájdite jeho kostru prehľadávaním do šírky pri lexikografickom usporiadaní vrcholov.

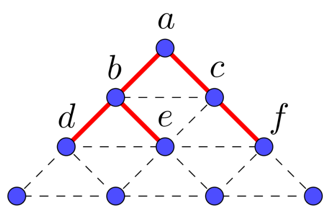


Riešenie: Úlohu najskôr vyriešime graficky a potom tabuľkou. Začneme vrcholom a a v prvom kroku pridáme všetky s ním incidujúce hrany a ich druhé koncové vrcholy, pri ktorých nám nevznikne cyklus. Dostaneme strom na nasledovnom obrázku

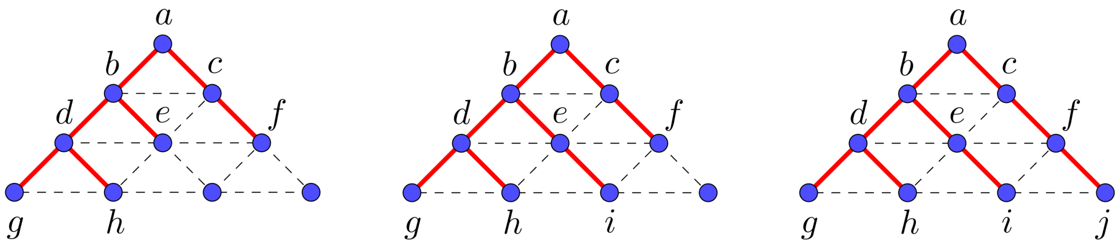


Týmto je zostrojená 1. úroveň koreňového stromu. Pribudli nám vrcholy b, c a hrany medzi nimi a vrcholom a. V druhom kroku prehľadaním týchto dvoch vrcholov dostávame





Týmto je zostrojená 2. úroveň koreňového stromu. Pribudli nám vrcholy d, e, f a s nimi tri ďalšie hrany. V treťom kroku prehľadáme tieto tri vrcholy a dostaneme



Týmto je zostrojená 3. úroveň koreňového stromu. V strome už máme všetky vrcholy pôvodného grafu, takže máme jeho kostru. Riešenie úlohy pomocou tabuľky vyzerá nasledovne.

Krok	Prehľadávané vrcholy	Hrany v S	Obsah fronty
0.	a		$\{a,b\},\{a,c\}$
1.	b,c	$\{a,b\},\{a,c\}$	$\{b,a\},\{b,c\},\{b,d\},\{b,e\},$ $\{c,a\},\{c,b\},\{c,e\},\{c,f\}$
2.	d,e,f	$\{b,d\},\{b,e\},\{c,f\}$	$\{d,b\},\{d,e\},\{d,g\},\{d,h\},$ $\{e,b\},\{e,c\},\{e,d\},\{e,f\},$ $\{e,h\},\{e,i\},\{f,c\},\{f,e\},$ $\{f,i\},\{f,j\}$
3.	g,h,i,j	$\{d,g\},\{d,h\},\{e,i\},\{f,j\}$	

■

V ďalšej časti si ukážeme iný spôsob prehľadávania grafov.

9.4 Prehľadávanie grafu do hĺbky

Prehľadávanie grafu do hĺbky, po anglicky *„Depth-first search“* (DFS), je založené na tom, že od koreňa stromu postupujeme v grafe tak hlboko ako to je len možné. Keď sa dostaneme do vrcholu, z ktorého sa už nevieme dostať ďalej, tak sa vrátime na najbližší predchádzajúci vrchol, z ktorého sa dá postupovať ďalej inou cestou atď., až pokiaľ nie sú prehľadané všetky vrcholy daného grafu. Spomenutý „krok späť“ sa nazýva *backtracking*.

Algoritmus prehľadávania grafu do hĺbky sa dá zapísať viacerými spôsobmi. Pseudokód algoritmu prehľadávania grafu do hĺbky, ktorý je uvedený na strane 187 hore, je úmyselne napísaný tak, aby bol takmer identický s pseudokódom prehľadávania grafu do šírky (strana 182). Jediný rozdiel medzi týmito dvoma algoritmami je v použitej dátovej štruktúre. Kým pri prehľadávaní grafu do šírky, sme na ukladanie hrán používali frontu, pri prehľadávaní grafu do hĺbky budeme používať zásobník.

Prehľadávanie grafu do hĺbky si ilustrujeme na rovnakých štyroch príkladoch grafov, na akých sme si ilustrovali aj prehľadávanie grafu do šírky. Všimnime si rozdiel medzi postupom prehľadávania a výslednými kostrami grafu získanými jedným a druhým spôsobom prehľadávania.

Pri prehľadávaní grafu do hĺbky pribudne, na rozdiel od prehľadávania do šírky, do konštruovanej kostry v každom kroku vždy len jedna hrana. Okrem toho, ak chceme vrcholy grafu prehľadávať v lexikografickom usporiadaní tak, ako sme to robili v predošlých príkladoch, tak musíme hrany do zásobníka vkladať v opačnom lexikografickom usporiadaní. Toto poradie vkladania hrán do fronty, alebo zásobníka, však z hľadiska prehľadávania grafu nie je nijako podstatné. Je to len kozmetická záležitosť, ktorá slúži výlučne na to, aby výsledná kostra grafu bola jednoznačná. Bez určenia poradia prehľadávania vrcholov grafu totiž môžeme, oboma prehľadávaniami, dostať viacero rôznych kostier daného grafu.

Prehľadávanie grafu do hĺbky

VSTUP: Súvislý obyčajný graf $G = (V, E)$ a pevne zvolený vrchol $v_1 \in V$.
VÝSTUP: $S = (V', E')$ – kostra grafu G.

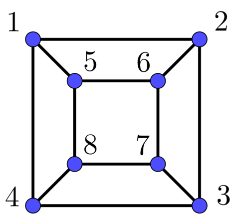
INICIALIZÁCIA

for $\{$ *pre všetky hrany* $h \in E$, *kde* $\texttt{zaciatok}(h) = v_1$ $\}$ **do**
    $Z.\texttt{vloz}(h)$;
end
$E' := \{\}$;
$V' := \{v_1\}$;

VYTVÁRANIE KOSTRY S

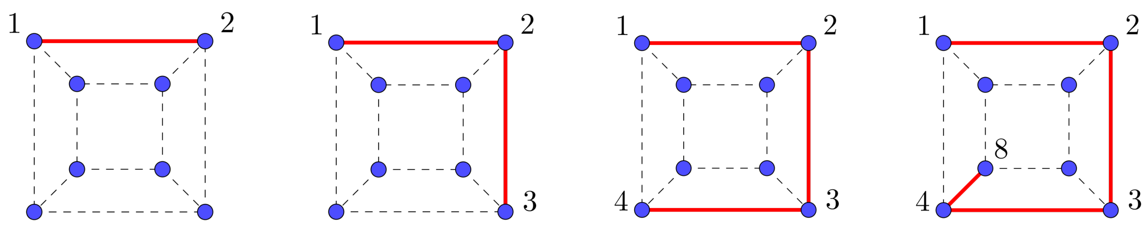
while $\{\ |V'| < |V|\ \}$ **do**
    $h := Z.\texttt{vyber}()$;
    if $\{$ $h \notin E'$ *a pridaním hrany* h *do* E' *nevznikne cyklus v* S $\}$ **then**
        $E' := E' \cup \{h\}$;
        $V' := V' \cup \{\texttt{koniec}(h)\}$;
        for $\{$ *pre všetky hrany* $h' \in E$, *kde* $\texttt{zaciatok}(h') = \texttt{koniec}(h)$ $\}$ **do**
            $Z.\texttt{vloz}(h')$;
        end
    end
end

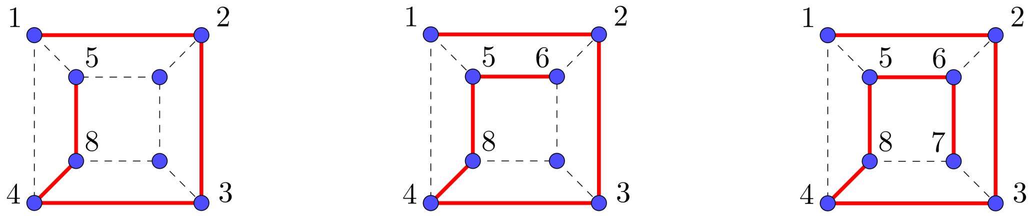
■ **Príklad 9.5**



Na obrázku vľavo je daný graf, ktorého vrcholy sú označené číslami 1 až 8. Nájdite jeho kostru prehľadávaním do hĺbky pri lexikografickom usporiadaní vrcholov.

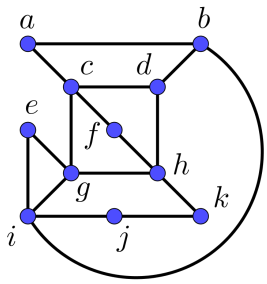
Riešenie: Začneme vrcholom 1, v prvom kroku pridáme vrchol 2, v druhom kroku pridáme vrchol 3, v treťom kroku pridáme vrchol 4, v štvrtom kroku pridáme vrchol 8, v piatom kroku pridáme vrchol 5, v šiestom kroku pridáme vrchol 6 a v poslednom, siedmom, kroku pridáme vrchol 7. V každom kroku samozrejme pridáme aj zodpovedajúcu hranu. Celý postup je zobrazený na nasledovnej sérii obrázkov





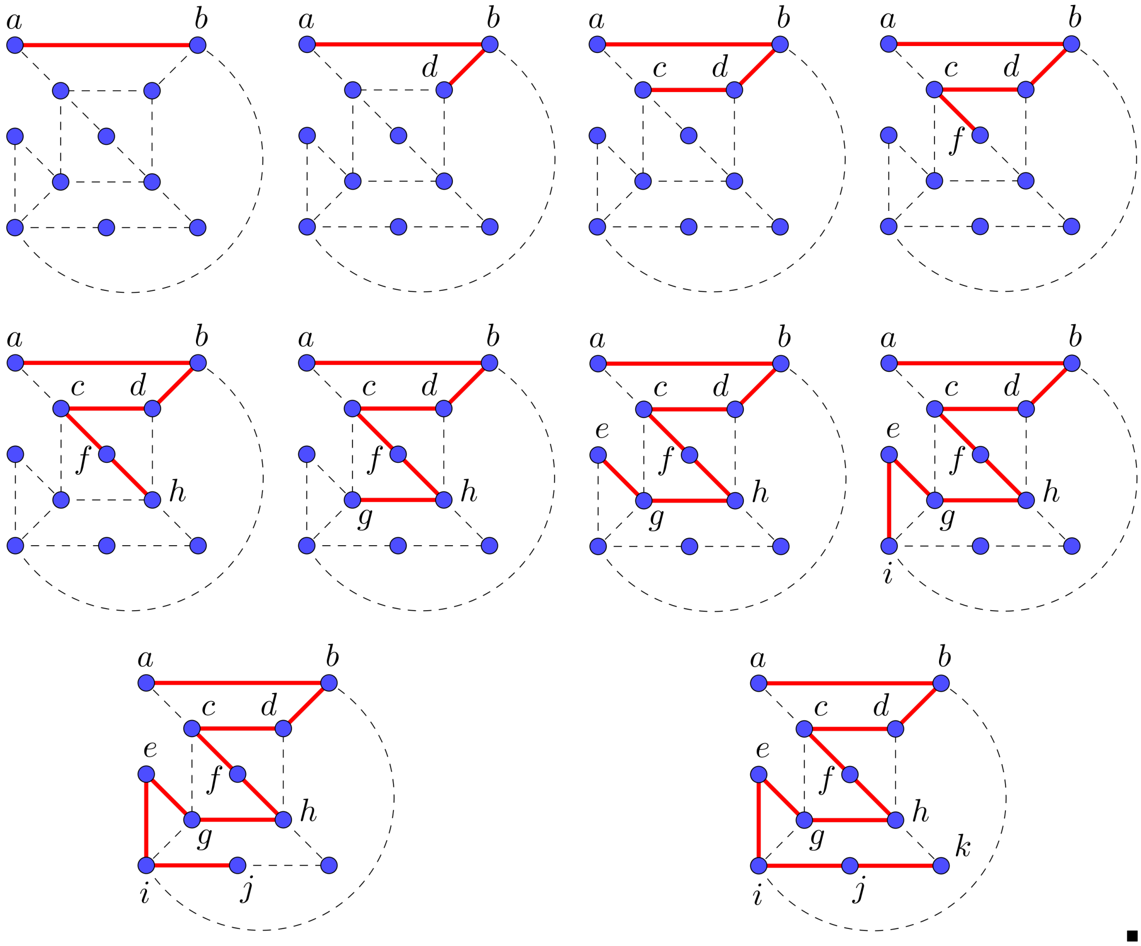
Ako vidíme z obrázkov, počas prehľadávania tohto grafu do hĺbky sme ani raz nemuseli použiť backtracking, t. j. spraviť „krok späť“. Z každého vrcholu sme vždy mohli pokračovať ďalej, až pokým sme nedostali kostru grafu, ktorá má podobu cesty dĺžky 7. ∎

∎ Príklad 9.6



Na obrázku vľavo, je daný graf, ktorého vrcholy sú označené písmenami a až k. Nájdite jeho kostru prehľadávaním do hĺbky pri lexikografickom usporiadaní vrcholov.

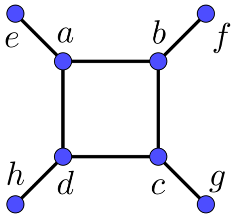
Riešenie: Celý postup riešenia je zobrazený na nasledovnej sérii desiatich obrázkov



∎

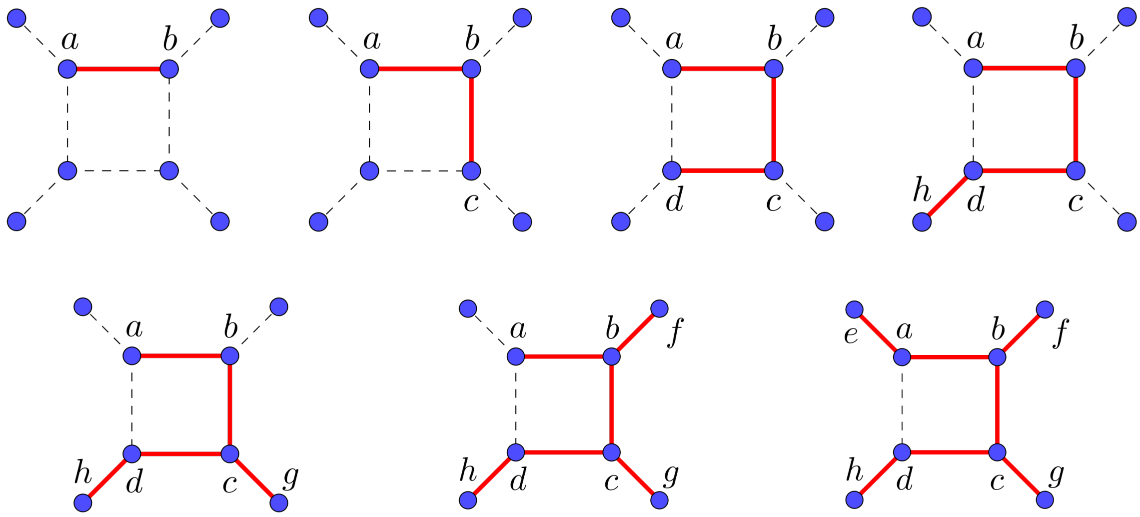
Pri ďalších dvoch príkladoch si okrem grafického riešenia zapíšeme riešenie aj pomocou tabuľky.

■ **Príklad 9.7**



Na obrázku vľavo je daný graf, ktorého vrcholy sú označené písmenami a až j. Nájdite jeho kostru prehľadávaním do hĺbky pri lexikografickom usporiadaní vrcholov.

Riešenie: prehľadávanie grafu do hĺbky znázornime najskôr graficky na sérii obrázkov



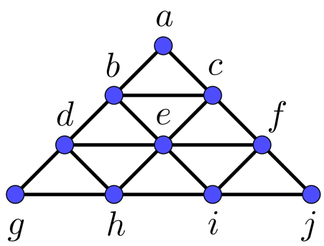
V tomto príklade sme použili aj backtracking a to dokonca trikrát. Najskôr sme sa z vrcholu h museli vrátiť späť až do vrcholu c, potom z vrcholu g sme sa museli vrátiť do vrcholu b a nakoniec sme sa z vrcholu f museli vrátiť do vrcholu a.

Teraz si riešenie znázornime pomocou tabuľky. Toto bude podobné tomu, ktoré sme robili pri prehľadávaní grafu do šírky, v príkladoch 9.3 a 9.4. Tabuľkový zápis prehľadávania grafu bude mať 3 stĺpce. V prvom stĺpci tabuľky budú vrcholy, ktoré už patria do stromu S a ktorých incidujúce hrany ideme prehľadávať. V druhom stĺpci tabuľky budú hrany, ktoré sú už súčasťou stromu S, čiže tie, ktoré sú na obrázku červené. A napokon, v treťom stĺpci tabuľky budú hrany, ktoré sú momentálne v zásobníku a čakajú na spracovanie. Červenou farbou bude v zásobníku vždy označená tá hrana, ktorá je najbližšia na rade, t. j. bola daná do zásobníka ako posledná.

Krok	Prehľadávaný vrchol	Hrany v S	Obsah zásobníka
0.	a		$\{a,e\},\{a,d\},\{a,b\}$
1.	b	$\{a,b\}$	$\{a,e\},\{a,d\},\{b,f\},\{b,c\},\{b,a\}$
2.	c	$\{b,c\}$	$\{a,e\},\{a,d\},\{b,f\},\{c,g\},\{c,d\},\{c,b\}$
3.	d	$\{c,d\}$	$\{a,e\},\{a,d\},\{b,f\},\{c,g\},\{d,h\},\{d,c\},\{d,a\}$
4.	h	$\{d,h\}$	$\{a,e\},\{a,d\},\{b,f\},\{c,g\},\{h,d\}$
5.	g	$\{c,g\}$	$\{a,e\},\{a,d\},\{b,f\},\{g,c\}$
6.	f	$\{b,f\}$	$\{a,e\},\{a,d\},\{f,b\}$
7.	e	$\{a,e\}$	$\{e,a\}$

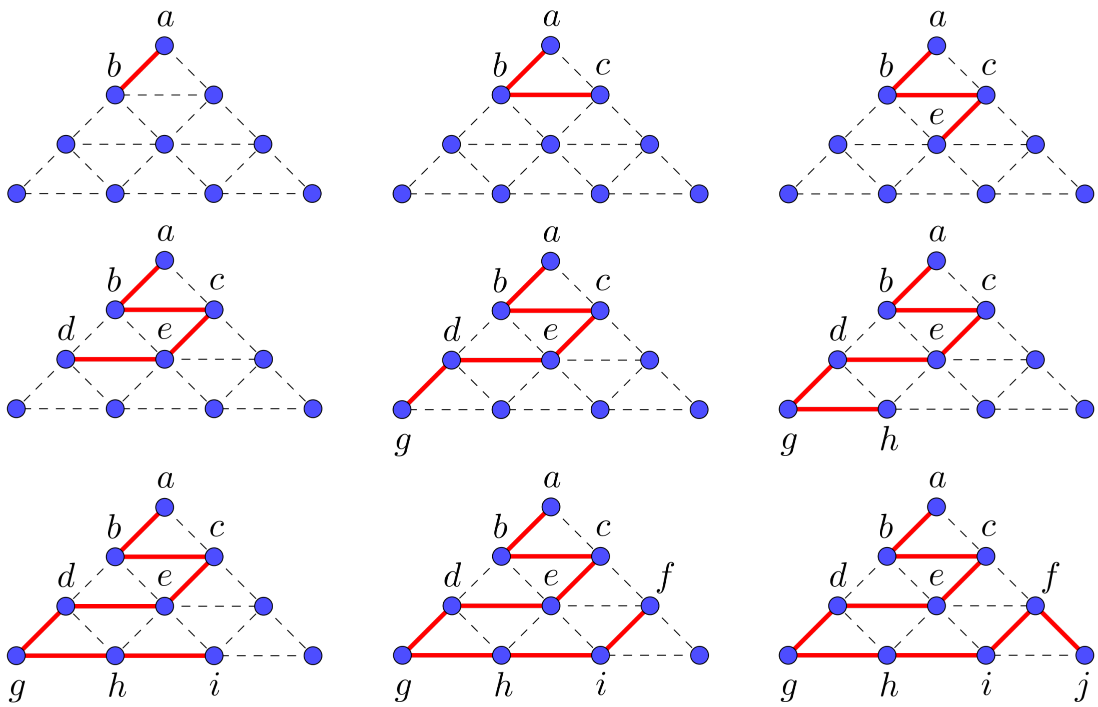
■

■ **Príklad 9.8**



Na obrázku vpravo je daný graf, ktorého vrcholy sú označené písmenami a až j. Nájdite jeho kostru prehľadávaním do hĺbky pri lexikografickom usporiadaní vrcholov.

Riešenie: prehľadávanie grafu do hĺbky si opäť znázornime graficky na sérii obrázkov



Pri tomto grafe sme ani raz nemuseli použiť backtracking a nájdená kostra je cesta dĺžky 9. Teraz si priebeh prehľadávania grafu do hĺbky zapíšeme tabuľkou.

Krok	Prehľadávaný vrchol	Hrany v S	Obsah zásobníka
0.	a		$\{a,c\},\{a,b\}$
1.	b	$\{a,b\}$	$\{a,c\},\{b,e\},\{b,d\},\{b,c\},\{b,a\}$
2.	c	$\{b,c\}$	$\{a,c\},\{b,e\},\{b,d\},\{c,f\},\{c,e\},\{c,b\},\{c,a\}$
3.	e	$\{c,e\}$	$\{a,c\},\{b,e\},\{b,d\},\{c,f\},\{e,i\},\{e,h\},\{e,f\},\{e,d\},\{e,c\},\{e,b\}$
4.	d	$\{e,d\}$	$\{a,c\},\{b,e\},\{b,d\},\{c,f\},\{e,i\},\{e,h\},\{e,f\},\{d,h\},\{d,g\},\{d,e\},\{d,b\}$
5.	g	$\{d,g\}$	$\{a,c\},\{b,e\},\{b,d\},\{c,f\},\{e,i\},\{e,h\},\{e,f\},\{d,h\},\{g,h\},\{g,d\}$
6.	h	$\{g,h\}$	$\{a,c\},\{b,e\},\{b,d\},\{c,f\},\{e,i\},\{e,h\},\{e,f\},\{d,h\},\{h,i\},\{h,g\},\{h,e\},\{h,d\}$
7.	i	$\{h,i\}$	$\{a,c\},\{b,e\},\{b,d\},\{c,f\},\{e,i\},\{e,h\},\{e,f\},\{d,h\},\{i,j\},\{i,h\},\{i,f\},\{i,e\}$
8.	f	$\{i,f\}$	$\{a,c\},\{b,e\},\{b,d\},\{c,f\},\{e,i\},\{e,h\},\{e,f\},\{d,h\},\{i,j\},\{i,h\},\{f,j\},\{f,i\},\{f,e\},\{f,c\}$
9.	j	$\{f,j\}$	$\{a,c\},\{b,e\},\{b,d\},\{c,f\},\{e,i\},\{e,h\},\{e,f\},\{d,h\},\{i,j\},\{i,h\},\{j,i\},\{j,f\}$

Všimnime si, že algoritmus skončil a v zásobníku ešte zostali hrany. Na tomto príklade vidíme, že pri popísanom algoritme sa nemusí zásobník vždy vyprázdniť tak, ako sa to stalo pri predošlom príklade. Závisí to od daného grafu. ■

9.5 Dôkaz korektnosti algoritmov prehľadávania do šírky a do hĺbky

Ako sme mohli vidieť v tabuľkových zápisoch algoritmov prehľadávania grafov do šírky (podkapitola 9.3) aj do hĺbky (podkapitola 9.4), nami použité algoritmy vôbec nie sú optimálne. Tejto skutočnosti sme si plne vedomí a uvedené pseudokódy algoritmov neboli písané s cieľom dosiahnuť optimálnu rýchlosť algoritmu. Naším cieľom pri písaní pseudokódov prehľadávacích algoritmov bolo napísať oba pseudokódy tak, aby

1. boli až na použitú dátovú štruktúru identické,
2. boli popisované algoritmy čo najzrozumiteľnejšie a čo najstručnejšie zapísané,
3. sa dal dôkaz ich korektnosti spraviť čo najjednoduchšie.

V nasledujúcej vete dokážeme, že algoritmy prehľadávania grafu do šírky aj do hĺbky sú korektné.

Veta 9.5.1 — O korektnosti algoritmov prehľadávania grafu do šírky a do hĺbky. Uvedené algoritmy prehľadávania grafu do šírky a do hĺbky sú korektné, čiže po ich skončení bude strom S kostrou daného grafu G.

Dôkaz: Oba algoritmy (str. 182 a 187) sú, až na použitú dátovú štruktúru (fronta / zásobník), identické. Preto dôkazy korektnosti oboch algoritmov budú rovnaké a budeme písať len o „prehľadávaní“ grafu, bez rozlišovania „do šírky“ a „do hĺbky“.

Algoritmom prehľadávania grafu postupne vzniká strom. V každom kroku pridávame k už existujúcemu stromu vrcholy a hrany tak, aby nevznikol cyklus. Okrem toho je z algoritmu zrejmé, že pre každý pridávaný vrchol existuje cesta od tohto vrcholu ku koreňu stromu. Preto medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi konštruovaného grafu existuje cesta. Takže konštruovaný graf je acyklický a súvislý, teda strom. Treba už len ukázať, že po skončení algoritmu strom S obsahuje všetky vrcholy daného grafu G, t. j. je jeho kostrou. To dokážeme sporom.

Algoritmus sa riadne ukončí vtedy, keď nastane situácia $|V'| = |V|$, čo je podmienka v cykle **while**. Ak je podmienka $|V'| = |V|$ splnená, tak strom S obsahuje všetky vrcholy daného grafu G, a preto je jeho kostrou. Problém môže nastať len v prípade, ak by algoritmus prehľadávania skončil predčasne. Takéto predčasné skončenie by mohlo byť spôsobené len na dvoch miestach algoritmu. Prvý možný dôvod predčasného ukončenia je ten, že fronta / zásobník sú už prázdne a zlyhá priradenie hrany $h := F.\text{vyber}()$, resp. $h := Z.\text{vyber}()$. Druhý možný dôvod predčasného ukončenia **while** cyklu je test **if**, kedy by sme už nedokázali pridať žiadnu ďalšiu hranu tak, aby nevznikol cyklus.

Takže predpokladajme, že skonštruovaný strom S nie je kostrou. Potom existuje nejaký vrchol x, ktorý nie je súčasťou vzniknutého stromu S. Daný graf G bol ale súvislý, takže v ňom musí existovať cesta medzi vrcholom x a koreňom stromu v_1. Označme si túto cestu $(x = u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_i, \ldots, u_k = v_1)$. Nech u_i je prvý vrchol na tejto ceste, ktorý je obsiahnutý aj v strome S. Je zrejmé, že $1 < i \leq k$. Keďže vrchol u_i je v strome S, musela byť v priebehu algoritmu aj hrana $\{u_{i-1}, u_i\}$ vložená do fronty / zásobníka a teda musela byť v niektorom ďalšom kroku preskúmaná. Pridaním vrcholu u_{i-1} a hrany $\{u_{i-1}, u_i\}$ ku stromu S nemôže vzniknúť cyklus a teda aj vrchol u_{i-1} musí byť súčasťou stromu S. To je však spor s tým, že vrchol u_i bol prvý vrchol na ceste $(x = u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_i, \ldots, u_k = v_1)$, ktorý bol súčasťou stromu S. Preto všetky vrcholy pôvodného grafu G sú súčasťou S a strom S je kostra grafu G. Q.E.D.

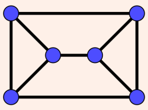
Každý, kto si beh algoritmov uvedených na stranách 182 a 187 skúsi simulovať na papieri, veľmi rýchlo príde na to, ako by sa dali uvedené algoritmy zoptimalizovať. Na túto tému sú aj cvičenia 9.10 a 9.11. Samozrejme, že pri riešení cvičení sa nemusí používať ťažkopádna forma algoritmov podľa uvedených pseudokódov a ich tabuľkový zápis prehľadávania použitý v príkladoch 9.3, 9.4, 9.7 a 9.8. My sme sa v týchto príkladoch otrocky pridržiavali v texte uvedených algoritmov. Tabuľkové zápisy oboch algoritmov sa malými modifikáciami pseudokódov dajú skrátiť, pri prehľadávaní do hĺbky dokonca výrazne skrátiť.

9.6 Cvičenia

Cvičenie 9.1 Pomocou prehľadávacích algoritmov dokážte, že všetky kostry daného grafu majú rovnaký počet hrán. ■

Cvičenie 9.2 Koľko navzájom neizomorfných kostier má graf K_6? ■

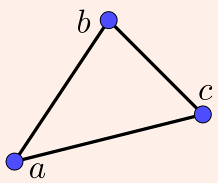
Cvičenie 9.3



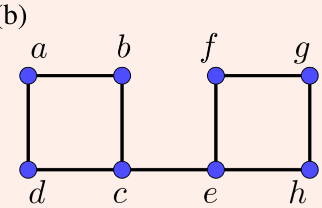
Nájdite aspoň tri rôzne kostry grafu zobrazenom na obrázku vľavo jeho prehľadávaním do šírky a tri rôzne kostry jeho prehľadávaním do hĺbky. ■

Cvičenie 9.4 Nájdite všetky kostry nasledujúcich grafov

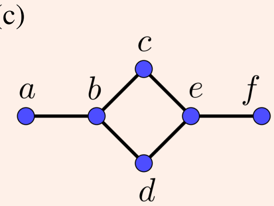
(a)



(b)



(c)



■

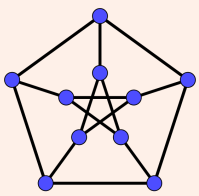
Cvičenie 9.5 Nech S je kostra grafu G. Dokážte, že ak do S pridáme ľubovoľnú hranu pri nezmenenej množine vrcholov, tak vznikne cyklus. ■

Cvičenie 9.6 Prehľadávaním do šírky aj do hĺbky nájdite kostru grafu Q_3.
Definíciu grafu Q_n nájdete v cvičení 5.21 (strana 118). ■

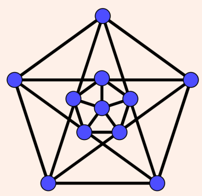
Cvičenie 9.7 Prehľadávaním do šírky aj do hĺbky nájdite kostru grafu $K_{3,7}$. ■

Cvičenie 9.8 Nájdite kostry nasledujúcich grafov, ich prehľadaním do šírky aj do hĺbky, vychádzajúc z toho istého vrcholu.

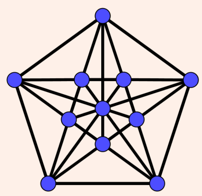
(a)



(b)

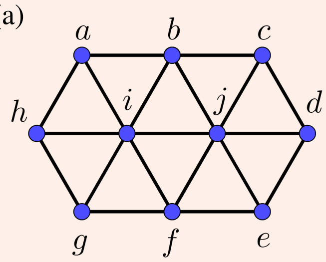


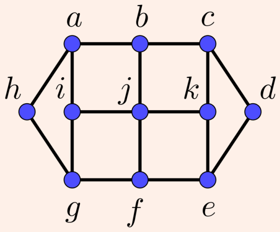
(c)

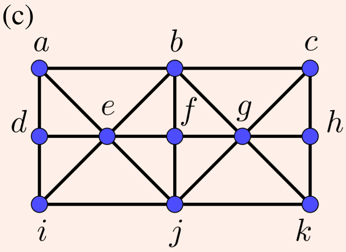


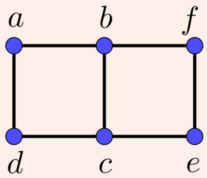
■

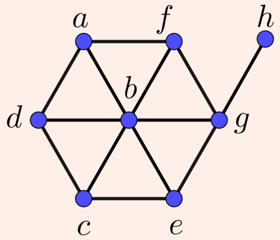
Cvičenie 9.9 Nájdite kostry nasledujúcich grafov, ich prehľadaním do šírky aj do hĺbky, vychádzajúc z toho istého vrcholu. V oboch prípadoch prehľadávajte vrcholy grafov v lexikografickom usporiadaní.

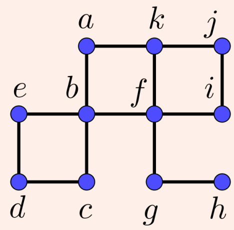
(a)


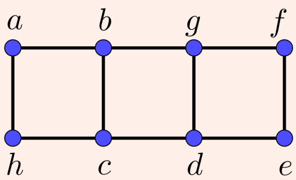
(b)


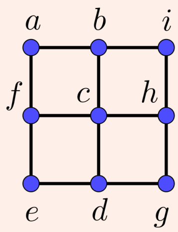
(c)


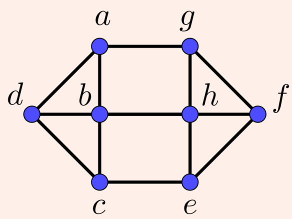
(d)


(e)


(f)


(g)


(h)


(i)


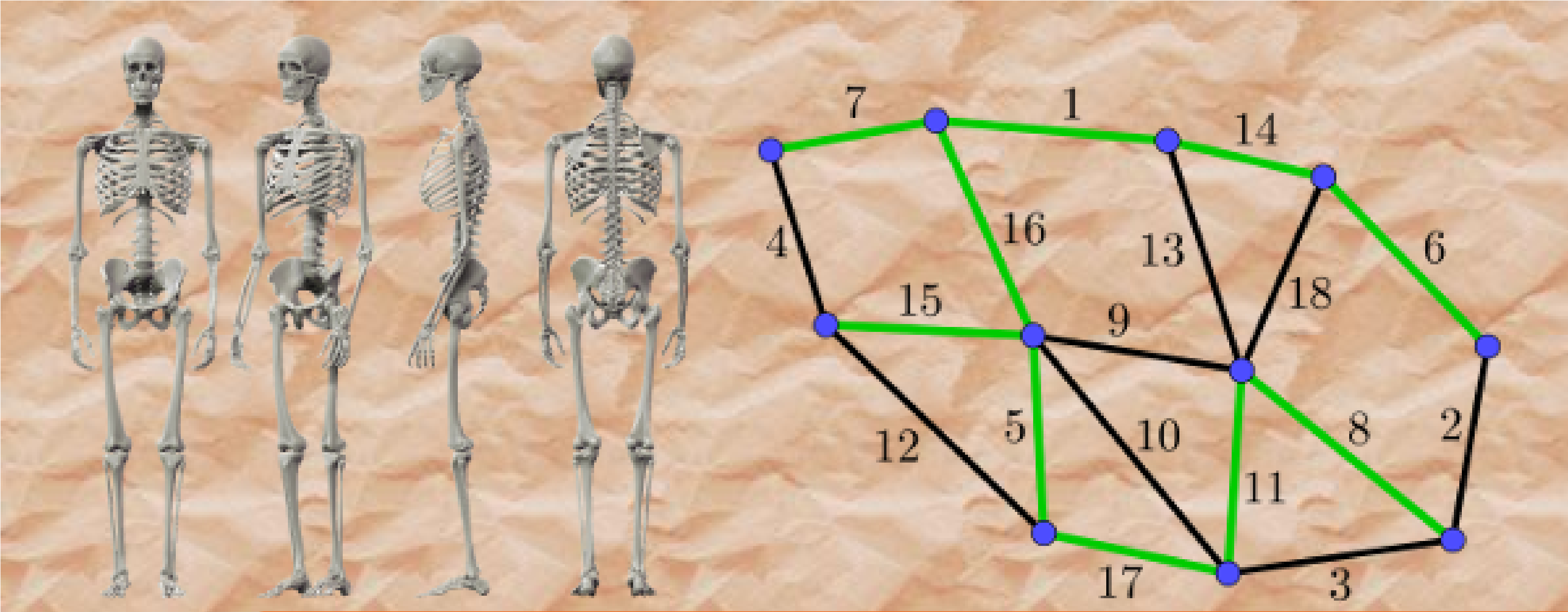
Cvičenie 9.10 Modifikujte algoritmus na prehľadávanie grafu do šírky (strana 182) tak, aby v ňom nebolo treba použiť podmienku **if** a jediným testom v celom algoritme zostal len test v cykle **while**.

Cvičenie 9.11 Dá sa modifikovať algoritmus na prehľadávanie grafu do hĺbky (strana 187) tak, aby v ňom nebolo treba použiť podmienku **if** a jediným testom v celom algoritme zostal len test v cykle **while**?

Cvičenie 9.12 Prečo pridaním vrcholu u_{i-1} a hrany $\{u_{i-1}, u_i\}$, v dôkaze vety 9.5.1 (str. 191), do stromu S, nemôže vzniknúť cyklus?

Cvičenie 9.13 Naprogramujte prehľadávanie daného grafu do šírky v Pythone alebo v C.

Cvičenie 9.14 Naprogramujte prehľadávanie daného grafu do hĺbky v Pythone alebo v C.



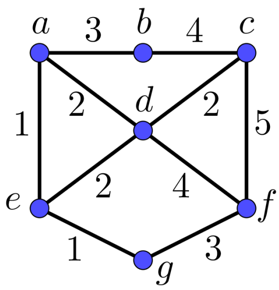
10. Minimálne kostry, Huffmanov kód

10.1 Ohodnotený graf

V praktických aplikáciach sa pomocou grafov reprezentujú rôzne druhy spojov, napríklad dopravná sieť, plošné spoje pre elektroniku, chemické väzby, náväznosti výrobných procesov atď. V týchto prípadoch obvykle nestačí mať len vrcholy a hrany grafu, ako sme mali doteraz, pretože nie je spoj ako spoj. Ak napríklad graf reprezentuje cestnú sieť, tak hrana spájajúca Bratislavu a Trnavu nemá rovnaké vlastnosti ako hrana spájajúca Bratislavu a Košice. Tieto trasy sú rôzne dlhé, majú rôzne náklady na výstavbu, rôzne prevýšenia, atď. Preto potrebujeme zaviesť pojem *ohodnotený graf*.

Definícia 10.1.1 — Ohodnotený graf. Graf sa nazýva ohodnotený, ak každej jeho hrane h je priradené reálne číslo $w(h)$, ktoré nazývame *ohodnotenie hrany*, alebo *hodnota hrany* (w je skratka od „weight“=váha).

■ **Príklad 10.1**



Napríklad graf na obrázku vľavo je ohodnotený. Ak by napríklad vrcholy zodpovedali miestam na mape, hrany cestám medzi nimi a ohodnotenia hrán by boli dĺžky týchto ciest, tak by malo zmysel pýtať sa, ktorá z ciest z jedného mesta do iného mesta je najkratšia. Toto je často sa vyskytujúci praktický problém a nie vždy sa pritom musí jednať o miesta na mape a dĺžky ciest.

Napríklad na predošlom grafe má najkratšia cesta medzi vrcholmi a a f dĺžku 5 a je to cesta (a,e,g,f). ■

V príklade 10.1 sme použili pojem „najkratšia“ cesta, ktorý síce v danom kontexte bol použitý správne, ale v súvislosti s grafmi nie celkom korektne. Dĺžka cesty bola definovaná v definícii 3.3.3 (strana 55). V teórii grafov sa pod dĺžkou ťahu alebo cesty myslí vždy počet hrán daného ťahu alebo cesty. V ohodnotenom v grafe, ako už bolo spomenuté, nemusia ohodnotenia hrán vždy vyjadrovať dĺžku. V predošlom príklade by mohli vrcholy grafu predstavovať miesta na mape, hrany grafu cesty medzi nimi a ohodnotenia hrán by mohli predstavovať náklady na výstavbu týchto ciest. Otázka by potom mohla byť, ktoré z navrhnutých ciest sa majú postaviť, tak aby ich výstavba bola čo najlacnejšia. Vo všeobecnosti sa preto, v súvislosti s ohodnotenými grafmi, používa ekonomická terminológia a budeme hovoriť o hodnote sledu, ťahu alebo cesty a o najlacnejšej ceste.

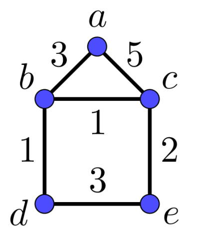
V nasledujúcej definícii si definujeme pojem *hodnota grafu*.

Definícia 10.1.2 — Hodnota grafu. Nech G je ohodnotený graf. Potom hodnota grafu, budeme ju označovať $w(G)$, je súčet ohodnotení všetkých hrán grafu G.

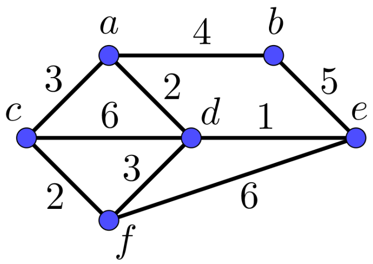
P S pojmom hodnota grafu sa budeme stretávať v súvislosti s hľadaním najlacneších kostier daného grafu, čím sa budeme zaoberať v ďalšej podkapitole.

Príklad 10.2

Hodnota grafu, ktorý vidíme na obrázku vpravo, je 15. Tento graf má 6 hrán, ktorých ohodnotenia usporiadané podľa veľkosti sú $(1,1,2,3,3,5)$.



10.2 Minimálne kostry



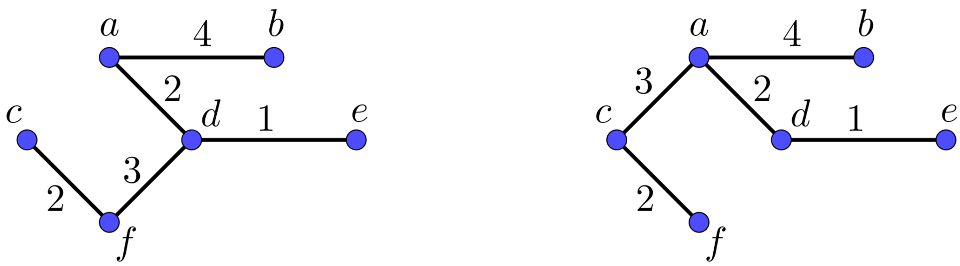
Predstavme si, že ohodnotený graf na obrázku vľavo predstavuje schématickú mapu šiestich miest. Vrcholy grafy sú mestá, hrany sú cesty medzi mestami a ohodnotenia hrán sú náklady potrebné na výstavbu príslušných ciest. Úlohou je vybudovať najlacnejší systém ciest medzi týmito mestami tak, aby medzi ľubovoľnými dvoma mestami existovala cesta. Je zrejmé, že riešením tejto úlohy bude kostra daného grafu. Výsledný graf totiž musí byť súvislý, musí obsahovať všetkých 6 vrcholov a dá sa ľahko ukázať, že ak by obsahoval cyklus, tak určite nebude najlacnejší. Budeme teda hľadať najlacnejšiu kostru grafu G. V nasledujúcej definícii si formálne definujeme pojem *minimálna kostra*, alebo *najlacnejšia kostra*.

V definícii 10.1.1 sme si definovali pojmy *ohodnotený graf* a *ohodnotenie hrany* a v definícii 10.1.2 sme definovali pojem *hodnota grafu*. Teraz si pomocou hodnoty grafu definujeme pojem *minimálna kostra*.

Definícia 10.2.1 — Minimálna, alebo najlacnejšia, kostra. Nech G je ohodnotený graf. Minimálna, alebo najlacnejšia, kostra grafu G je taká jeho kostra, ktorej hodnota je minimálna.

Podľa definície 10.2.1 môže mať graf aj viacero rôznych minimálnych kostier. Napríklad dve minimálne kostry horeuvedeného grafu, sú na obrázku 10.1. Obe tieto kostry majú hodnoty 12.

Existuje viacero algoritmov na hľadanie minimálnej kostry daného grafu. Medzi najznámejšie patria Borůvkov algoritmus, Jarníkov, v zahraničí nazývaný aj Primov, algoritmus a potom „pažravý“, Kruskalov algoritmus. Zhodou okolností je tu uvedené poradie algoritmov chronologické a zároveň aj výkonostné, pri usporiadaní od najvýkonejšieho po najmenej výkonný. V ďalšom texte však bude poradie uvedených algoritmov zmenené.



Obr. 10.1: Dve minimálne kostry grafu z úvodu tejto podkapitoly

10.2.1 Jarníkov (Primov) algoritmus

Jarníkov algoritmus na hľadanie minimálnej kostry grafu, ako prvý popísal český matematik Vojtěch Jarník v roku 1930. Jeho algoritmus „znovuobjavil" Robert Prim v roku 1957 a potom ho ešte raz „znovuobjavil" holandský matematik Edsger Dijkstra v roku 1959. V zahraničí, najmä v anglosaskej literatúre, sa tento algoritmus väčšinou nazýva Primov. Časová zložitosť Jarníkovho algoritmu je, pri jednoduchej implementácii, $O\big(|E|\log|V|\big)$, avšak vhodnou implementáciou sa dá ešte urýchliť.

Princíp vytvárania kostry $S=(V',E')$ Jarníkovým algoritmom je nasledovný. Vyberieme si ľubovoľný vrchol v_1 grafu G a dáme ho do množiny V', čo je vrcholová množina S. Vrchol v_1 bude náš „štartovací" vrchol. V každom kroku algoritmu prehľadáme všetky hrany grafu G, ktorých jeden koncový vrchol je vo V' a ich druhý koncový vrchol je vo $V\setminus V'$. Vyberieme najlacnejšiu z týchto hrán a pokiaľ jej pridaním do E' nevznikne cyklus v S, tak túto hranu pridáme do E' a s ňou incidujúci vrchol z V, pridáme do V'. Algoritmus skončí keď $V'=V$.

Pri popise pseudokódu Jarníkovho algoritmu budeme používať funkciu $\texttt{minimum}(V',V\setminus V')$, ktorá nám vráti najlacnejšiu hranu (u,v), kde $u\in V'$ a $v\in V\setminus V'$ a zároveň túto hranu odstráni zo zoznamu hrán. Pseudokód Jarníkovho algoritmu je veľmi jednoduchý.

Hľadanie minimálnej kostry Jarníkovým (Primovým) algoritmom

VSTUP: Ohodnotený graf $G=(V,E)$, kde $\forall h\in E:\ w(h)\geq 0$.
VÝSTUP: Minimálna kostra $S=(V',E')$, grafu G.

INICIALIZÁCIA

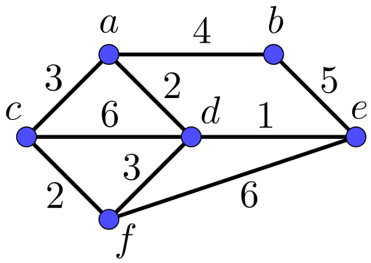
$V' := \{v_1\};$ $\big(v_1\in E$ je ľubovoľný vrchol grafu $G\big)$
$E' := \{\};$

VYTVÁRANIE KOSTRY S

while $\big\{V'\neq V\big)\big\}$ **do**
  $(u,v) := \texttt{minimum}(V',V\setminus V');$
  $E' := E'\cup(u,v);$
  $V' := V'\cup\{v\};$
end

Pri výbere najlacnejšej hrany medzi stromom S a vrcholom mimo stromu S v grafe G $\big($funkcia $\texttt{minimum}(V',V\setminus V')\big)$ sa môže stať, že existuje viacero takých hrán, ktoré majú rovnakú hodnotu. V takom prípade môžeme aplikovať na výber hrany aj ďalšie kritériá, napríklad lexikografické poradie vrcholov. Na hodnotu výslednej kostry to nemá vplyv. Avšak, v závislosti od toho aké kritéria pri výbere aplikujeme, môžeme dostať viacero rôznych minimálnych kostier. V príkladoch a v cvičeniach budeme zväčša vyberať hrany v lexikografickom usporiadaní vrcholov. Čiže ak budeme mať viaceré hrany $\{u_i, v_j\}$, ktorých hodnoty sú rovnaké, vyberieme hranu s najmenším indexom i a pokiaľ sú prvé indexy týchto hrán rovnaké, tak vyberieme hranu s najmenším indexom j. Fungovanie Jarníkovho algoritmu si ilustrujeme na príklade zo začiatku tejto časti.

■ Príklad 10.3

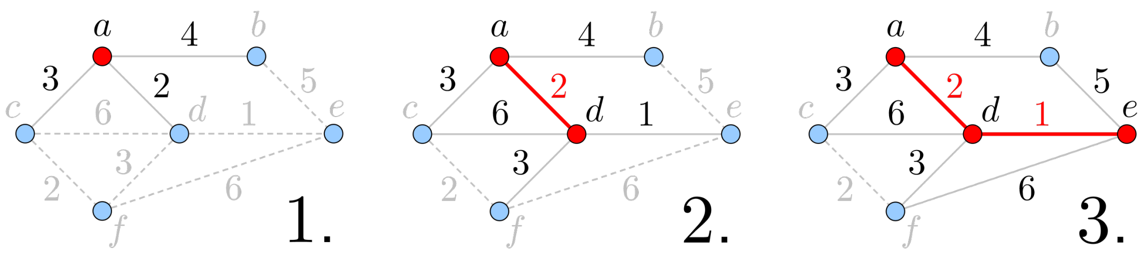


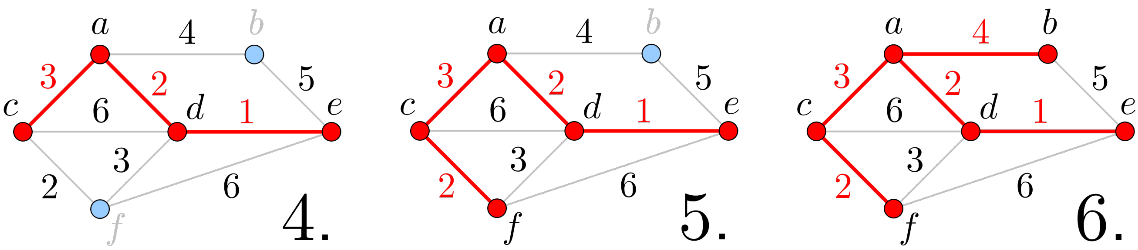
Daný je ohodnotený graf na obrázku vľavo. Pomocou Jarníkovho algoritmu nájdite jeho minimálnu kostru tak, že štartovací vrchol bude vrchol a a hrany vyberáme pri lexikografickom usporiadaní vrcholov.

Riešenie: beh algoritmu si najskôr zobrazíme v tabuľke a až potom ho znázorníme aj graficky. V uvedenej tabuľke bude každý riadok zodpovedať jednému kroku algoritmu, čiže pridaniu jednej hrany do stromu S. V prvom stĺpci tabuľky budú vrcholy, ktoré sme už pridali do konštruovaného stromu S. Algoritmus sa zastaví v momente, keď strom S bude obsahovať všetky vrcholy pôvodného grafu G. V druhom stĺpci tabuľky budú všetky hrany medzi množinami vrcholov V' a $V \setminus V'$ a hodnoty týchto hrán. Hrany budú usporiadané lexikograficky a v každom kroku vyberáme najlacnejšiu z týchto hrán tak, aby v S nevznikol cyklus. V poslednom stĺpci bude hrana, ktorú sme v príslušnom kroku vybrali.

Krok	Vrcholy V'	Hrany medzi V' a $V \setminus V'$	Vybraná hrana
1.	$\{a\}$	$(a,b):4,\ (a,c):3,\ (a,d):2$	$(a,d):2$
2.	$\{a,d\}$	$(a,b):4,\ (a,c):3,\ (d,c):6,\ (d,e):1,\ (d,f):3$	$(d,e):1$
3.	$\{a,d,e\}$	$(a,b):4,\ (a,c):3,\ (d,c):6$ $(d,f):3,\ (e,b):5,\ (e,f):6$	$(a,c):3$
4.	$\{a,c,d,e\}$	$(a,b):4,\ (c,f):2,\ (d,f):3,\ (e,b):5,\ (e,f):6$	$(c,f):2$
5.	$\{a,c,d,e,f\}$	$(a,b):4,\ (e,b):5$	$(a,b):4$
6.	$\{a,b,c,d,e,f\}$		

Graficky znázornený postup hľadania minimálnej kostry máme na nasledovnej sérii obrázkov. Vrcholy a hrany, ktoré sme už pridali do stromu S, sú zobrazené červenou farbou. Hrany, ktoré v aktuálnom kroku prehľadávame sú zobrazené súvislou čiarou. Všetky ostatné hrany sú zobrazené prerušovanou čiarou.





Vidíme, že v 3. kroku sme mali na výber hrany $\{a,c\}$ a $\{d,f\}$, obe s hodnotou 3. Keďže sme ale vyberali hrany pri lexikografickom usporiadaní vrcholov, museli sme vybrať hranu $\{a,c\}$. ■

Dokážeme si teraz vetu, hovoriacu o koreknosti Jarníkovho algoritmu.

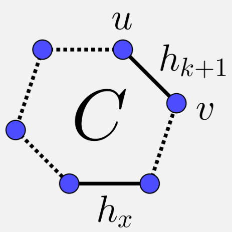
Veta 10.2.1 — O správnosti Jarníkovho algoritmu. Jarníkov algoritmus je správny, čiže po jeho skončení je S minimálna kostra daného grafu G.

Dôkaz: sa dá robiť viacerými spôsobmi, napríklad indukciou, alebo sporom. Základná myšlienka použitá v indukčnom kroku je však rovnaká ako základná myšlienka dôkazu sporom. Preto uvedieme dôkaz sporom, ktorý je o málo kratší.

Nech výsledná kostra $S = (V, E_S)$ má množinu vrcholov V, kde $|V| = n$ a množinu hrán E_S. Jarníkov algoritmus buduje kostru S ako postupnosť stromov $S_1, S_2, \dots S_{n-1}$, pričom v každom kroku vyberie jednu hranu, ktorú potom, v nasledujúcom kroku, pridá do vznikajúcej kostry a $S_{n-1} = S$. Ďalej nech Jarníkov algoritmus vyberal hrany množiny E_S v poradí $(h_1, h_2, \dots, h_{n-1})$. **Predpokladajme, že S nie je minimálna kostra grafu G.**

Vyberme $T = (V, E_T)$, minimálnu kostru grafu G, ktorá má maximálne také číslo k, že hrany $h_1, \dots, h_k$ patria do kostier S aj T, avšak hrana $h_{k+1} \in E_S$ už nepatrí do kostry T.

Hrana h_{k+1} bola Jarníkovým algoritmom vybraná do kostry S v $(k+1)$. kroku, kedy už v strome S_k boli hrany $h_1, \dots, h_k$. Nech koncové vrcholy hrany h_{k+1} sú u a v. Potom hrana $h_{k+1} = \{u, v\}$ má tú vlastnosť, že $u \in V_{S_k}$, $v \notin V_{S_k}$ a jej hodnota je najmenšia spomedzi všetkých takýchto hrán. Ak hranu h_{k+1} pridáme do kostry T, tak tam vznikne cyklus C, pretože T je kostra. V cykle C určite musia existovať hrany, rôzne od h_{k+1}, ktorých jeden vrchol patrí do V_{S_k} a druhý vrchol nepatrí do V_{S_k}. Platí totiž $u \in V_{S_k}$ a všetky hrany C, a teda aj ich vrcholy, nemôžu patriť do S_k, lebo by v S_{k+1} bol cyklus.



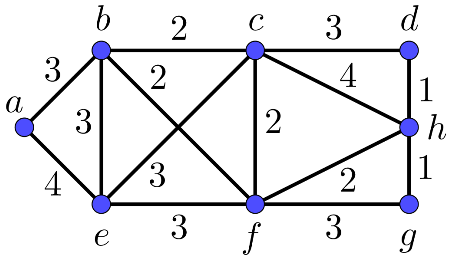
Nech h_x je takáto hrana. Potom, podľa Jarníkovho algoritmu, musí platiť $w(h_{k+1}) \le w(h_x)$. Pozrime sa teraz na graf, ktorý z T dostaneme tak, že z neho vyhodíme hranu h_x a pridáme doň hranu h_{k+1}, čiže $T' = \big(T \setminus \{h_x\}\big) \cup \{h_{k+1}\}$. Je zrejmé, že T' bude tiež kostrou, viď cvičenie 10.2 (str. 210). Platí preň

$$w(T') = w(T) - w(h_x) + w(h_{k+1}) \le w(T) \quad \Rightarrow \quad w(T') \le w(T)\,.$$

Posledná nerovnosť vedie k sporu. Pokiaľ je ostrá, tak je to spor s tým, že T bola minimálna kostra. A pokiaľ je uvedená nerovnosť neostrá, tak je to spor s tým, že k bolo maximálne také číslo, pre ktoré hrany $h_1, \dots, h_k$ patria do kostier S aj nejakej minimálnej kostry grafu G, avšak hrana $h_{k+1} \in E_S$ už nepatrí do minimálnej kostry grafu G. Takže predpoklad bol nesprávny a S musí byť minimálna kostra grafu G. Q.E.D.

Uvedieme si teraz ešte jeden príklad hľadania minimálnej kostry pomocou Jarníkovho algoritmu.

■ Príklad 10.4

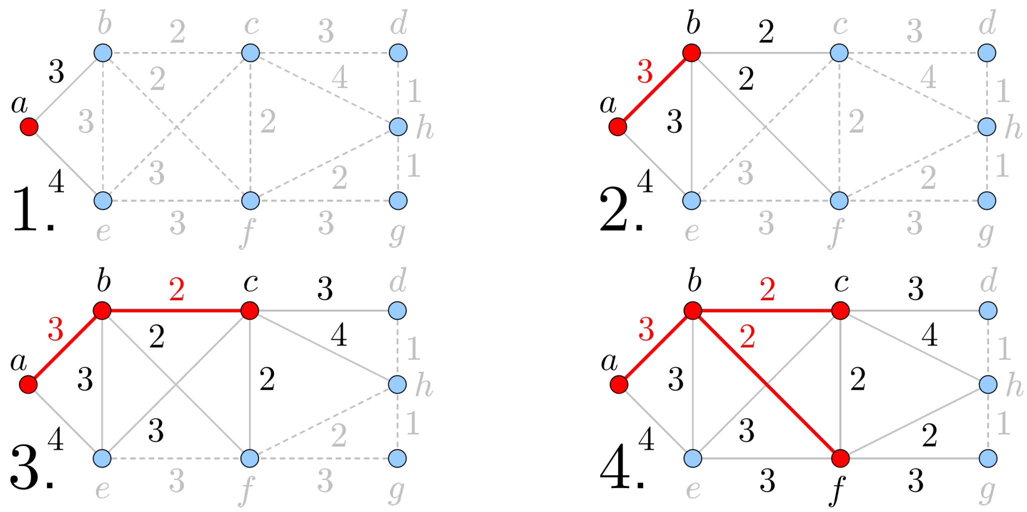


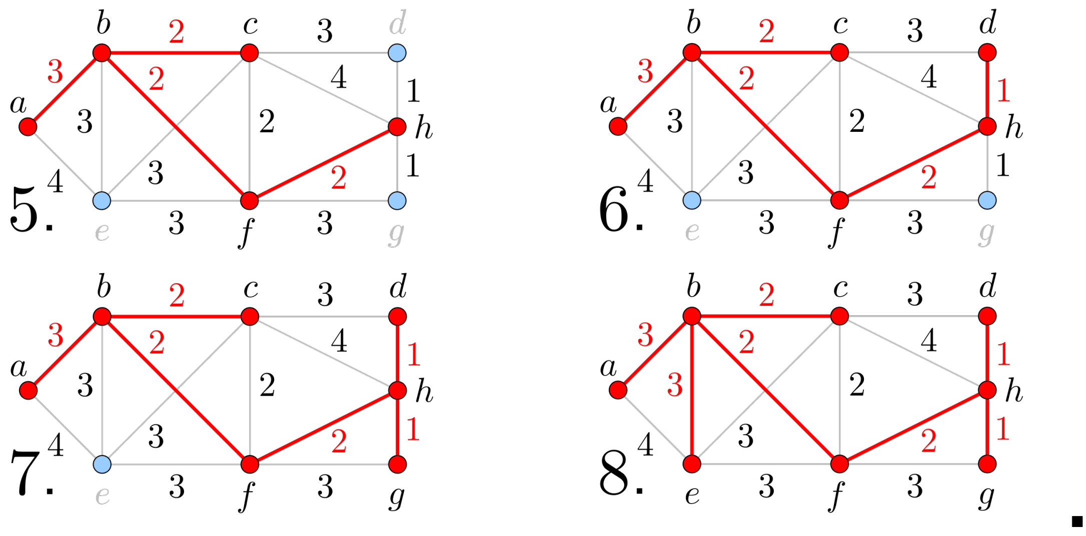
Daný je ohodnotený graf na obrázku vľavo. Pomocou Jarníkovho algoritmu nájdite jeho minimálnu kostru tak, že štartovací vrchol bude vrchol a a hrany vyberáme pri lexikografickom usporiadaní vrcholov.

Riešenie: beh algoritmu si, rovnako ako v predošlom príklade, najskôr zobrazíme v tabuľke a až potom ho znázorníme aj graficky. V uvedenej tabuľke bude každý riadok zodpovedať jednému kroku algoritmu, čiže pridaniu jednej hrany do stromu S. Na rozdiel od predošlého príkladu budeme do prvého stĺpca tabuľky písať vždy len aktuálne pridaný vrchol. Graf v tomto príklade má už viac vrcholov a bolo by nepraktické prepisovať všetky už pridané vrcholy v každom ďalšom kroku. Algoritmus sa zastaví v momente, keď prvý stĺpec tabuľky bude obsahovať všetky vrcholy pôvodného grafu G. V druhom stĺpci tabuľky budú všetky hrany medzi množinami vrcholov V' a $V \setminus V'$ a hodnoty týchto hrán. Hrany budú usporiadané lexikograficky a v každom kroku vyberáme najlacnejšiu z týchto hrán tak, aby v S nevznikol cyklus. V poslednom stĺpci bude hrana, ktorú sme v príslušnom kroku vybrali.

Krok	**Pridaný vrchol**	**Hrany medzi V' a $V \setminus V'$**	**Vybraná hrana**
1.	a	$(a,b):3,\ (a,e):4$	$(a,b):3$
2.	b	$(a,e):4,\ (b,c):2,\ (b,e):3,\ (b,f):2$	$(b,c):2$
3.	c	$(a,e):4,\ (b,e):3,\ (b,f):2,\ (c,d):3$ $(c,e):3,\ (c,f):2,\ (c,h):4$	$(b,f):2$
4.	f	$(a,e):4,\ (b,e):3,\ (c,d):3,\ (c,e):3$ $(c,h):4,\ (f,e):3,\ (f,g):3,\ (f,h):2$	$(f,h):2$
5.	h	$(a,e):4,\ (b,e):3,\ (c,d):3,\ (c,e):3$ $(f,e):3,\ (f,g):3,\ (h,d):1,\ (h,g):1$	$(h,d):1$
6.	d	$(a,e):4,\ (b,e):3,\ (c,e):3$ $(f,e):3,\ (f,g):3,\ (h,g):1$	$(h,g):1$
7.	g	$(a,e):4,\ (b,e):3,\ (c,e):3,\ (f,e):3$	$(b,e):3$
8.	e		

Graficky znázornený postup hľadania minimálnej kostry máme na nasledovnej sérii obrázkov. Vrcholy a hrany, ktoré sme už pridali do stromu S, sú zobrazené červenou farbou. Hrany, ktoré v aktuálnom kroku prehľadávame sú zobrazené súvislou čiarou.





10.2.2 Kruskalov algoritmus

Kruskalov algoritmus na hľadanie minimálnej kostry grafu je známy aj pod označením „pažravý algoritmus“. Prvý raz bol popísaný americkým matematikom Josephom Kruskalom v roku 1956. Tento algoritmus je veľmi jednoduchý na pochopenie aj realizáciu, ale jeho časová zložitosť je $O\big(|E|\log|E|\big)$, čiže je z tu spomínaných troch algoritmov najmenej efektívny.

Princíp konštrukcie minimálnej kostry pomocou Kruskalovho algoritmu je veľmi jednoduchý. Z grafu G postupne vyberáme do kostry hrany tak, že v každom kroku vyberieme hranu s najnižšou hodnotou, ktorej pridaním nevznikne cyklus. Akonáhle je počet vybraných hrán o 1 menší než počet vrcholov, môžeme skončiť, pretože už máme kostru.

Ak by sme na konštrukciu kostry mali nejaké špeciálne požiadavky, napríklad vyberanie hrán v nejakom vopred stanovenom poradí, tak to musíme zohľadniť pri pridávaní hrán do kostry. Samozrejme stále platí stratégia „pažravého“ algoritmu, čiže vždy vyberáme najlacnejšiu možnú hranu, ale ak máme na výber viacero najlacnejších hrán, môžeme aplikovať aj doplnkové kritéria, napríklad vyberanie hrán v lexikografickom usporiadaní.

Pri zápise Kruskalovho algoritmu budeme používať funkciu `usporiadaj_vzostupne`(E), ktorá nám množinu ohodnotených hrán usporiada vzostupne, ako usporiadanú k-ticu hrán. Okrem toho budeme používať aj funkciu `prvy`(P), ktorá nám z usporiadanej k-tice P vráti jej prvý prvok a zároveň tento prvok z P odstráni. Pseudokód Kruskalovho algoritmu je uvedený na strane 202 hore.

Dôkaz korektnosti Kruskalovho algoritmu, t. j. dôkaz toho, že výsledná kostra S skonštruovaná pomocou Kruskalovho algoritmu je minimálna, je jednoduchý. Uvádzať ho tu však nebudeme. Záujemci môžu tento dôkaz nájsť napríklad v knihe [15], v časti 4.4.3. Aj keď je tento algoritmus menej efektívny než Borůvkov, alebo Jarníkov algoritmus, pre mnohé aplikácie je postačujúci a jeho najväčšou výhodou je jeho jednoduchosť a ľahká pochopiteľnosť.

Najviac prekvapivým faktom pri Kruskalovom algoritme je to, že funguje! Stratégia „pažravosti“ je totiž známa aj z iných problémov diskrétnej matematiky, ale väčšinou nevedie k optimálnemu riešeniu. Dokonca pri viacerých problémoch vedie ku „katastrofickým“ výsledkom. Preto je veľmi prekvapivé, že tento „pažravý“ algoritmus dáva pri hľadaní minimálnej kostry grafu optimálne riešenie.

Teraz si uvedieme pseudokód Kruskalovho algoritmu a potom si jeho fungovanie ilustrujeme na ohodnotených grafoch z príkladov 10.3 a 10.4, čiže na rovnakých grafoch, na akých sme si predtým ilustrovali fungovanie Jarníkovho algoritmu.

Hľadanie minimálnej kostry Kruskalovým algoritmom

VSTUP: Ohodnotený graf $G = (V,E)$, kde $\forall h \in E:\ w(h) \geq 0$.

VÝSTUP: Minimálna kostra $S = (V,E')$, grafu G.

INICIALIZÁCIA

$P :=$ usporiadaj_vzostupne(E);

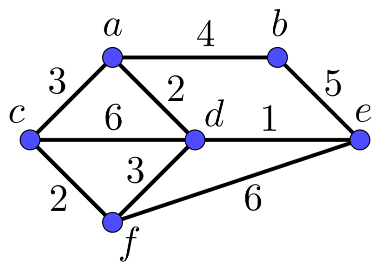
$E' := \{\,\}$;

VYTVÁRANIE KOSTRY S

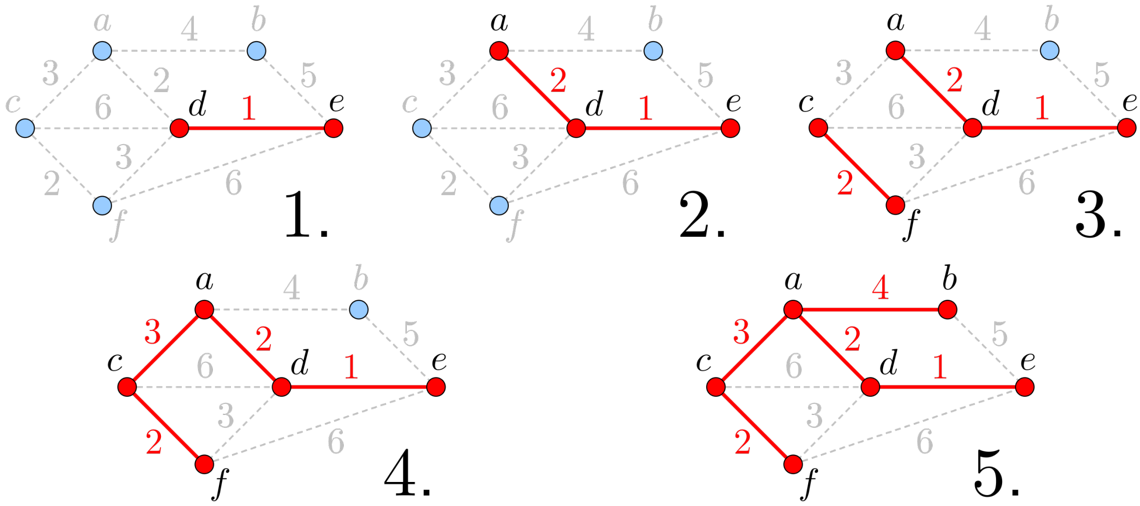
while $\{\, |E'| < \big(|V| - 1\big) \,\}$ **do**
  $h :=$ `prvy`(P);
  if $\{$ *pridaním hrany* h *do* E'*, nevznikne cyklus v* S $\}$ **then**
    $E' := E' \cup \{h\}$;
  end
end

■ **Príklad 10.5**

Daný je ohodnotený graf na obrázku vpravo. Pomocou Kruskalovho algoritmu nájdite jeho minimálnu kostru tak, že štartovací vrchol bude vrchol a a hrany vyberáme pri lexikografickom usporiadaní vrcholov.

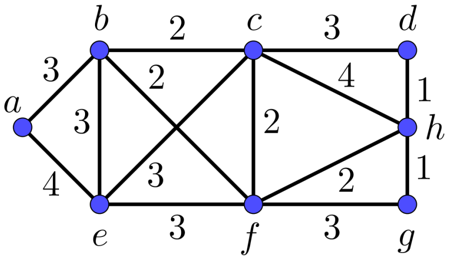


Riešenie: beh algoritmu si znázorníme len graficky. Hrany sa do kostry budú pridávať po jednej a v každom kroku dáme do konštruovanej kostry najlacnejšiu hranu, po ktorej pridaní nevznikne cyklus. Samozrejme spolu s hranou vždy pridávame aj s ňou incidujúce vrcholy. Vrcholy a hrany, ktoré sme už pridali do konštruovanej kostry, sú zobrazené červenou farbou.



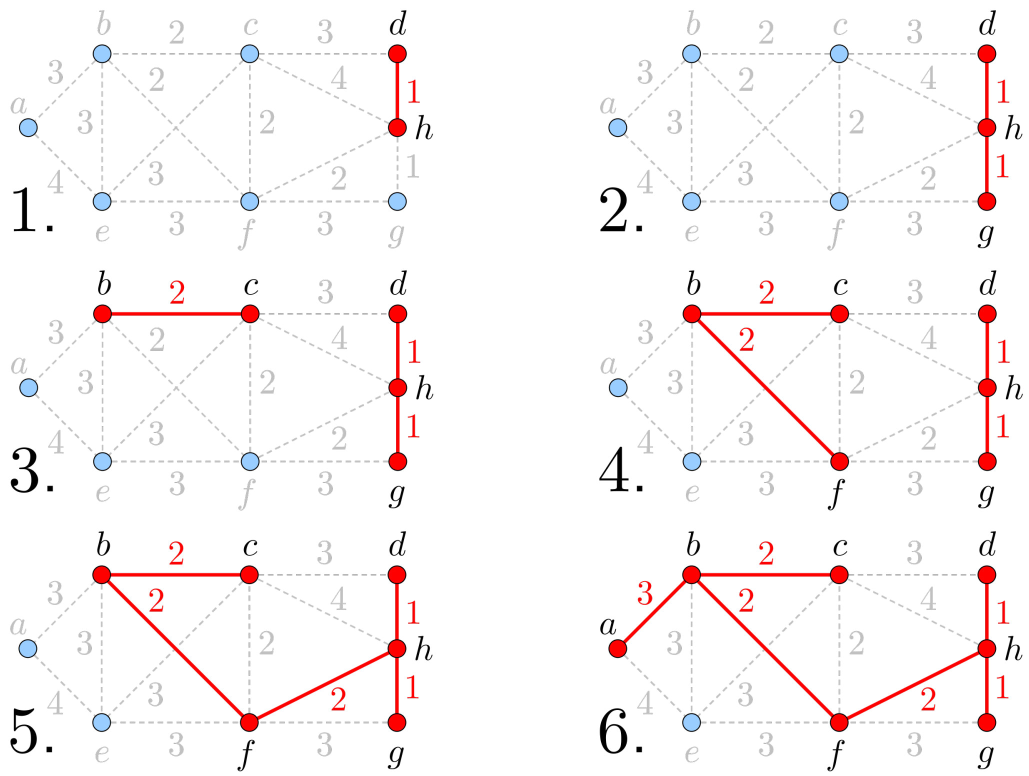
Ako môžeme pri porovnaní s príkladom 10.3 vidieť, dostali sme rovnakú najlacnejšiu kostru ako pri použití Jarníkovho algoritmu. Avšak postup konštrukcie tejto minimálnej kostry bol odlišný. Vo všeobecnosti nám Jarníkov a Kruskalov algoritmus nemusia dať rovnaké minimálne kostry a to ani v prípade, že hrany vyberáme pri lexikografickom usporiadaní vrcholov. ■

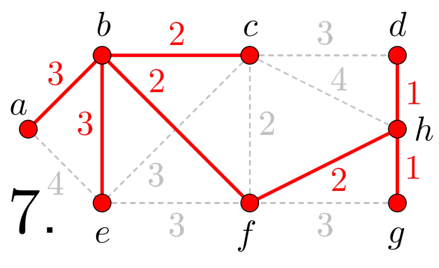
■ **Príklad 10.6**



Daný je ohodnotený graf na obrázku vľavo. Pomocou Kruskalovho algoritmu nájdite jeho minimálnu kostru tak, že štartovací vrchol bude vrchol a a hrany vyberáme pri lexikografickom usporiadaní vrcholov.

Riešenie: beh algoritmu si znázorníme len graficky. Hrany sa do kostry budú pridávať po jednej a v každom kroku dáme do konštruovanej kostry najlacnejšiu hranu, po ktorej pridaní nevznikne cyklus. Samozrejme spolu s hranou vždy pridávame aj s ňou incidujúce vrcholy. Vrcholy a hrany, ktoré sme už pridali do konštruovanej kostry, sú zobrazené červenou farbou.





Opäť, pri porovnaní s príkladom 10.4, vidíme, že výsledná minimálna kostra je rovnaká ako pri použití Jarníkovho algoritmu. Postup jej konštrukcie bol však odlišný.

■

10.2.3 Borůvkov algoritmus

Borůvkov algoritmus na hľadanie minimálnej kostry grafu je najefektívnejší spomedzi troch tu spomínaných algoritmov. Tento algoritmus vymyslel v roku 1926 moravský matematik Otakar Borůvka pri riešeni návrhu optimálnej elektrorozvodnej siete na Morave. To znamená, že Borůvkov algoritmus vznikol pri riešení výsostne praktického problému v čase, keď teória grafov ako samostatná matematická disciplína ešte len vznikala. Ako to už ale býva, jeho algoritmus bol neskôr „znovuobjavený“ ešte aspoň piatimi ďalšími matematikmi. V západnej, predovšetkým anglosaskej, literatúre sa Borůvkov algoritmus nazýva Sollinov algoritmus. Tento algoritmus sa používa hlavne pri paralelnom spracovaní dát. Jeho časová zložitosť je $O\big(|E|\log|V|\big)$, avšak pre niektoré kategórie grafov je ešte výrazne rýchlejší. Napríklad pre rovinné grafy je jeho časová zložitosť lineárna. Okrem toho z Borůvkovho algoritmu vychádza aj doteraz najrýchlejší algoritmus pre hľadanie minimálnej kostry, ktorého časová zložitosť je $O(|V|+|E|)$.

Borůvkov algoritmus v tomto texte nebudeme uvádzať, pretože je zložitejší než Kruskalov alebo Jarníkov algoritmus. V Borůvkovom algoritme sa napríklad vyžaduje, aby ohodnotenia ľubovoľných dvoch hrán daného grafu boli rôzne. Toto obmedzenie sa dá pomerne ľahko obísť, čiže Borůvkov algoritmus môžeme použiť aj na grafy, ktoré majú rovnako ohodnotené hrany, ale samorejme je to potom zložitejšie než „pažravý“, alebo Jarníkov algoritmus. Záujemci môžu nájsť popis Borůvkovho algoritmu napríklad v knihe [15], v časti 4.5.3.

10.3 Huffmanov kód

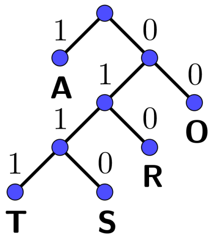
Znaky v počítači sa obvykle reprezentujú binárnymi reťazcami pevnej dĺžky. Napríklad ASCII[1] kóduje každý znak 7-bitovým reťazcom. Čiastočný príklad ASCII kódu je zobrazený v tabuľke 10.1. Takýto spôsob kódovania znakov je neefektívny z hľadiska priemerného počtu bitov potrebných na zakódovanie daného textového reťazca, pretože má veľkú redundanciu. Huffmanov kód je výsledkom snahy optimalizovať tento priemerný počet bitov. V Huffmanovom kóde sa znaky kódujú binárnymi reťazcami premenlivej dĺžky. Často používané znaky sa kódujú kratšími a málo používané znaky dlhšími binárnymi reťazcami. Tým sa zredukuje priemerný počet bitov potrebných na zakódovanie daného textového reťazca. Huffmanov kód patrí medzi tzv. *entropické kódy*. Pri entropických kódoch sa frekventovanejšie znaky kódujú kratšími a menej frekventované znaky dlhšími kódovými slovami. V roku 1952 americký informatik David A. Huffman, spolu s Robertom Fanom v rámci seminárnej práce na MIT vyvinuli algoritmus na konštrukciu optimálneho P-kódu. Huffmanov kód má, pre daný súbor znakov s danými relatívnymi početnosťami (resp. len početnosťami) výskytu, minimálnu možnú redundanciu a používa sa napríklad pri bezstratovej kompresii. Ako už bolo spomenuté, je to prefixový kód[2] (P-kód) s kódovými slovami premenlivej dĺžky. Definuje sa pomocou koreňového stromu, pričom koncové vrcholy stromu reprezentujú kódované znaky a cesta od koreňa stromu po koncový vrchol predstavuje kódové slovo zodpovedajúce tomuto koncovému vrcholu. Pri dekódovaní binárneho reťazca postupujeme od koreňa stromu nadol, pričom vo vetveniach 1 znamená doľava a 0 znamená doprava[3]. Keď dôjdeme do koncového vrcholu stromu, zapíšeme si príslušný znak a pokračujeme opäť od koreňa smerom dole. Predvedieme si to na dvoch príkladoch.

Znak	ASCII kód	Znak	ASCII kód	Znak	ASCII kód	Znak	ASCII kód
$*$	010 1010	0	011 0000	A	100 0001	a	110 0001
$+$	010 1011	1	011 0001	B	100 0010	b	110 0010
$-$	010 1101	2	011 0010	C	100 0011	c	110 0011
$/$	010 1111	3	011 0011	D	100 0100	d	110 0100
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabuľka 10.1: Časť ASCII tabuľky

[1] American Standard Code for Information Interchange
[2] Kód žiadneho znaku nie je prefixom (začiatkom) kódu iného znaku.
[3] Je to vecou dohody.

Príklad 10.7



V koreňovom strome, na obrázku vľavo, sú znaky A, O, R, S, T zakódované nasledovne

A	 1
O	 00
R	 010
S	 0110
T	 0111

Pri kódovaní postupujeme od koreňa nadol, až po koncový vrchol predstavujúci kódovaný znak. Keďže sa jedná o prefixový kód oddeľovacie znaky nepotrebujeme. Napríklad slová ROSA a RAST sa zakódujú ako

ROSA	 0100001101
RAST	 010101100111

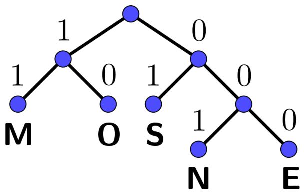
Pri dekódovaní postupujeme od koreňa po koncový vrchol, zapíšeme si príslušný znak a začneme opäť od koreňa. Napríklad

10001001111	=	1 | 00 | 010 | 0111 | 1	=	AORTA
0111010101101	=	0111 | 010 | 1 | 0110 | 1	=	TRASA

■

Uvedieme si ešte jeden príklad.

Príklad 10.8



Koreňovým stromom máme zakódované znaky M, O, S, N, E tak, ako to vidíme na obrázku vľavo.

M	 11
O	 10
S	 01
N	 001
E	 000

Kódovanie

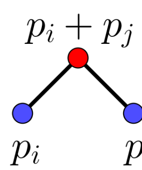
SEM	 0100011
MENO	 1100000110

Dekódovanie

001100111000	=	001 | 10 | 01 | 11 | 000	=	NOSME

■

Ak jeden textový reťazec zakódujeme rôznymi Huffmanovými kódmi, tak môžeme dostať binárne reťazce rôznej dĺžky. Otázkou je, či je možné zostrojiť optimálny Huffmanov kód s minimálnou, ideálne nulovou, redundanciou. Odpoveď ná túto otázku je *áno*. Práve Huffmanov kód navrhnutý v roku 1952 má minimálnu možnú redundanciu.



Pri popise algoritmu na zostavovanie koreňového stromu pre optimálny Huffmanov kód, budeme používať operáciu *spájania stromov*. Pomocou tejto operácie budeme spájať dva existujúce koreňové stromy s ohodnotenými koreňmi do jedného nového koreňového stromu s ohodnoteným koreňom. Spájanie koreňových stromov bude prebiehať tak, že korene daných dvoch stromov spojíme hranami s novým vrcholom, ktorý bude koreňom novovzniknutého stromu. Okrem toho, ak pôvodné dva stromy mali korene s hodnotami p_i a p_j, tak koreň nového stromu bude mať hodnotu $p_i + p_j$. Na obrázku vyššie je uvedený príklad spojenia dvoch koreňových stromov. Modré vrcholy s hodnotami p_i a p_j sú korene pôvodných dvoch stromov a červený vrchol s hodnotou $p_i + p_j$ je koreň nového stromu vzniknutého ich spojením. Teraz si uvedieme algoritmus konštrukcie koreňového stromu pre optimálny Huffmanov kód.

Algoritmus konštrukcie koreňového stromu optimálneho Huffmanovho kódu

VSTUP: Zoznam n znakov s danými relatívnymi početnosťami (alebo len početnosťami).

VÝSTUP: Koreňový strom T, určujúci optimálny Huffmanov kód.

INICIALIZÁCIA

Každému znaku prideľ vrchol s hodnotou rovnou jeho relatívnej početnosti ;

KONŠTRUKCIA STROMU

while $\{$*výsledný graf nie je strom*$\}$ **do**

a) *Nájdi dva stromy s najlacnejšími koreňmi. V prípade viacerých stromov, ktorých korene majú rovnakú hodnotu, vyber dva s najmenšou výškou* ;

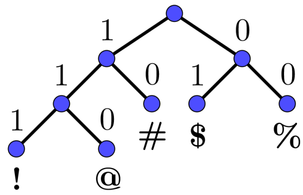
b) *Spoj vybrané dva stromy do jedného nového a jeho koreňu daj hodnotu rovnú súčtu hodnôt koreňov pôvodných dvoch stromov* ;

end

Existuje ešte viacero alternatívnych podôb zápisu uvedeného algoritmu. My si neskôr na príkladoch ukážeme ešte jeden ďalší spôsob konštrukcie koreňového stromu pre optimálny Huffmanov kód.

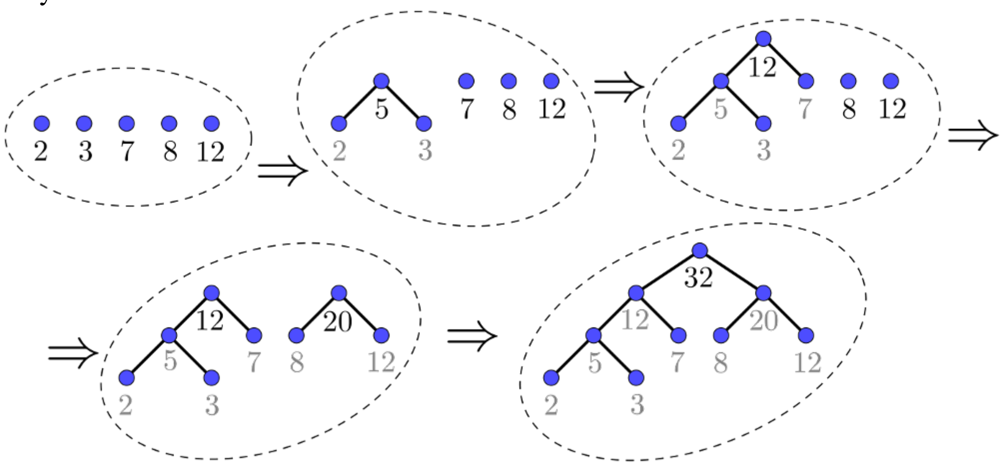
■ **Príklad 10.9** Zostrojte koreňový strom pre optimálny Huffmanov kód ak je daných 5 znakov, s početnosťami výskytu podľa nasledovnej tabuľky.

znak	početnosť
!	2
@	3
#	7
$	8
%	12



Obr. 10.2: Výsledný koreňový strom

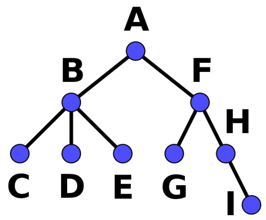
Konštrukcia koreňového stromu bude, podľa uvedeného algoritmu, prebiehať v piatich krokoch zobrazených na nasledovnom obrázku.



Výsledný koreňový strom pre optimálny Huffmanov kód je zobrazený na obrázku 10.2 vyššie. ■

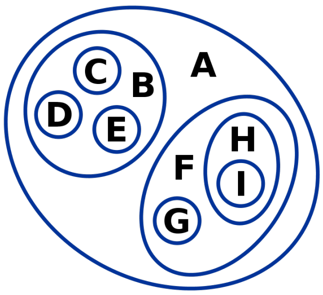
Ako vidíme z príkladu 10.9, na začiatku máme les pozostávajúci z toľkých izolovaných vrcholov, koľko je kódovaných znakov. Tieto vrcholy postupne spájame, pričom v každom kroku sa počet aktívnych vrcholov, čiže takých, ktoré ešte budeme spájať, zníži o 1. Skončíme vtedy, keď dostaneme strom, t. j. súvislý graf. Inak povedané, skončíme keď nám zvýši už len 1 aktívny vrchol. Tento postup je veľmi názorný a aj popis algoritmu je jednoduchý. Pri realizácii na počítači však potrebujeme nejakú jednoduchšiu „neobrázkovú“ reprezentáciu konštruovaného stromu.

Pomocou koreňových stromov môžeme reprezentovať aj rôzne iné dátové štruktúry. Samozrejme platí to aj opačne, čiže pomocou iných, „neobrázkových“, dátových štruktúr, vieme reprezentovať koreňové stromy.



Koreňový strom, ktorý je na obrázku vľavo, sa napríklad dá ekvivalentne reprezentovať uzátvorkovaným výrazom

$$\Big(\mathrm{A}\big(\mathrm{B}(\mathrm{C})(\mathrm{D})(\mathrm{E})\big)\big(\mathrm{F}(\mathrm{G})(\mathrm{H}(\mathrm{I}))\big)\Big)$$



Alebo Vennovým diagramom „do seba zapadajúcich“ množín tak, ako to je zobrazené na obrázku vľavo.
Alebo pomocou odsadených riadkov, podobne ako sa to robí pri písaní písaní kapitol, podkapitol a odsekov v obsahu kníh. Ukážku vidíme vpravo.

A. . . . .
  B. . . . .
    C. . . . .
    D. . . . .
    E. . . . .
  F. . . . .
    G. . . . .
    H. . . . .
      I. . . . .

Ako vidíme, vrcholy grafu môžeme nahradiť množinami a spájanie koreňových stromov nahradíme spájaním existujúcich množín do dvojprvkových množín. Pritom prvkom množiny môže byť aj iná množina. Predvedieme si to na rovnakej úlohe ako v príklade 10.9.

■ Príklad 10.10

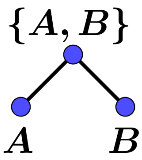
znak	početnosť
!	2
@	3
#	7
$	8
%	12

Zostrojte koreňový strom pre optimálny Huffmanov kód ak je daných 5 znakov s početnosťami výskytu podľa tabuľky, ktorú vidíme vľavo. Namiesto izolovaných vrcholov v prvom grafe z príkladu 10.9, začneme množinou obsahujúcou početnosti výskytu daných znakov.

- ▷ Na začiatku budeme mať množinu $\big\{2,3,7,8,12\big\}$.
- ▷ Pod vonkajšou množinou budeme rozumieť množinu ohraničenú krajnou ľavou a krajnou pravou zátvorkou.
- ▷ Pod hodnotou množiny budeme rozumieť súčet hodnôt všetkých jej prvkov. Čiže množina $\{2\}$ má hodnotu 2, množina $\{2,3\}$ má hodnotu 5 a množina $\big\{\{2,3\},7\big\}$ má hodnotu 12.
- ▷ Pokiaľ vonkajšia množina má viac než 2 prvky, tak budeme opakovať nasledovné kroky
  - ▷ Vo vonkajšej množine nájdeme 2 prvky s najmenšou hodnotou. Ak máme takých prvkov viac, tak vyberieme také dva, ktoré obsahujú najmenší počet *„podmnožín“*.
  - ▷ Vybrané dva prvky vonkajšej množiny spojíme do dvojprvkovej množiny.
- ▷ V zadanej úlohe bude postup nasledovný

$$\Big\{2,3,7,8,12\Big\} \to \Big\{\{2,3\},7,8,12\Big\} \to$$

$$\to \Big\{8,12,\big\{\{2,3\},7\big\}\Big\} \to \Big\{\big\{\{2,3\},7\big\},\{8,12\}\Big\}$$



Po poslednom kroku už má vonkajšia množina len 2 prvky a môžeme z nej zostrojiť koreňový strom pre optimálny Huffmanov kód. Každú dvojprvkovú množinu $\{A, B\}$, pričom A a B môžu byť tiež dvojprvkové množiny, zakreslíme tak, ako to vidíme na obrázku vľavo. Takto z množiny $\Big\{\{\{2,3\},7\},\{8,12\}\Big\}$ dostaneme rovnaký koreňový strom, ako v príklade 10.9 (obrázok 10.2). ∎

V prípade množinového zápisu sme prvky vonkajšej množiny usporiadavali vzostupne podľa ich hodnôt a pri prvkoch s rovnakou hodnotou podľa počtu ich *„podmnožín"*. Pri kreslení koreňového stromu, podľa uvedeného algoritmu, sme to nerobili. Už z toho vyplýva, že výsledný koreňový strom môže mať viacero podôb. Postup konštrukcie koreňového stromu pre optimálny Huffmanov kód si predvedieme ešte na jednom príklade.

■ Príklad 10.11

znak	početnosť
A	3
B	4
C	5
D	7
E	8

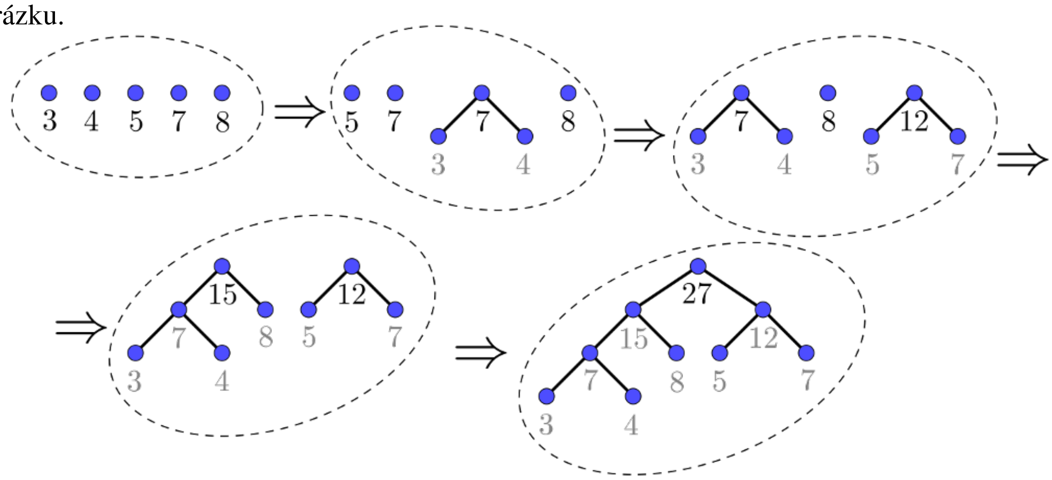
Zostrojte koreňový strom pre optimálny Huffmanov kód ak je daných 5 znakov, s početnosťami výskytu podľa tabuľky vľavo.
Úlohu budeme riešiť dvoma spôsobmi. Najskôr pomocou množinového zápisu a potom kreslením koreňového stromu podľa uvedeného algoritmu.

Postup pomocou množinového zápisu bude vyzerať nasledovne.

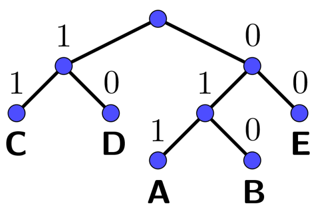
$$\Big\{3,4,5,7,8\Big\} \to \Big\{5,7,\{3,4\},8\Big\} \to$$

$$\to \Big\{\{3,4\},8,\{5,7\}\Big\} \to \Big\{\{5,7\},\{\{3,4\},8\}\Big\}$$

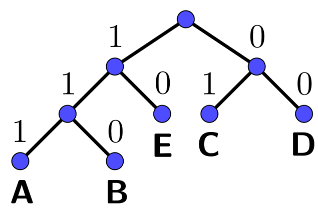
Postup konštrukcie koreňového stromu podľa uvedeného algoritmu je zobrazený na nasledujúcom obrázku.



V poslednom koreňovom strome ešte treba nahradiť početnosti znakmi, ktorým zodpovedajú koncové vrcholy stromu. Výsledné koreňové stromy máme zobrazené na nasledujúcich obrázkoch.



Obr. 10.3: Strom získaný z množinového zápisu



Obr. 10.4: Strom získaný pomocou algoritmu

Ako vidíme, koreňový strom zrekonštruovaný z množinového zápisu je iný, než strom, ktorý sme dostali druhým spôsobom. Preto aj kódy niektorých znakov sa líšia, avšak oba koreňové stromy reprezentujú optimálny Huffmanov kód. ■

Všimnime si, že Huffmanov kód tvorí úplný binárny strom. Ak sa pozrieme na algoritmus tvorby Huffmanovho kódu tak vidíme, že podstromy vždy spájame tak, aby výsledný strom bol úplný. A ak si pozrieme algoritmus tvorby optimálneho Huffmanovho kódu, uvedený na strane 206, tak vidíme, že tento algoritmus vždy vytvorí nielen úplný binárny strom, ale aj binárny strom minimálnej možnej výšky, ktorá je pri daných vstupných údajoch a ich poradí možná. Pre tvorbu úplného binárneho stromu s minimalizovanou výškou je v uvedenom algoritme kľúčová podčiarknutá podmienka

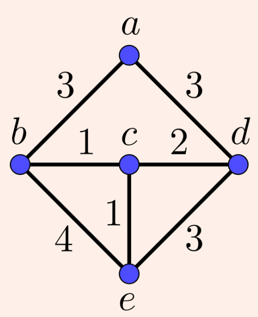
> *Nájdi dva stromy s najlacnejšími koreňmi. V prípade viacerých stromov, ktorých korene majú rovnakú hodnotu, vyber dva s najmenšou výškou.*

Aj bez podčiarknutej podmienky by uvedený algoritmus vytvoril optimálny Huffmanov kód, pokiaľ by sme ako jediné kritérium „optimálnosti“ brali redundanciu vytvoreného Huffmanovho kódu. Pri rýchlom prehľadávaní je však často dôležité, aby vytvorený kód mal nielen čo najnižšiu redundanciu, ale aby jeho kódové slová boli čo najkratšie. Bez podčiarknutej podmienky by sme mohli dostať kód, ktorý by mal niektoré kódové slová príliš dlhé a na druhej strany by tieto boli vykompenzované krátkymi kódovými slovami. Takže redundancia by bolo minimálna, ale pre vyhľadávanie by takýto kód nebol ten najlepší možný. Preto pre praktické aplikácie potrebujeme mať úplný binárny strom s minimálnou možnou výškou.

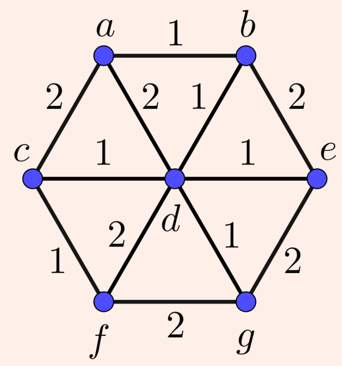
10.4 Cvičenia

Cvičenie 10.1 Pomocou Jarníkovho aj Kruskalovho algoritmu nájdite minimálne kostry daných grafov. Hrany vyberajte pri lexikografickom usporiadaní vrcholov.

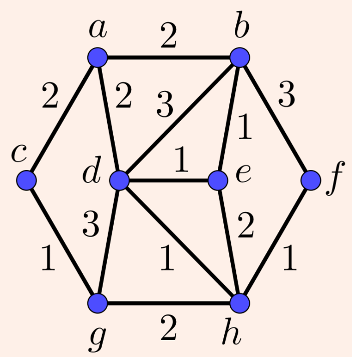
(a)



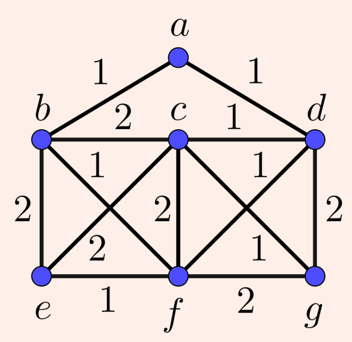
(b)



(c)



(d)



■

Cvičenie 10.2 V dôkaze vety 10.2.1 (strana 199) konštruujeme z kostry T, graf T' nasledovným spôsobom

> *Graf T' dostaneme z T tak, že z neho vyhodíme hranu h_x a pridáme doň hranu h_{k+1}, čiže $T' = \big(T \setminus \{h_x\}\big) \cup \{h_{k+1}\}$.*

Dokážte, že graf T' je tiež kostra pôvodného grafu G. ■

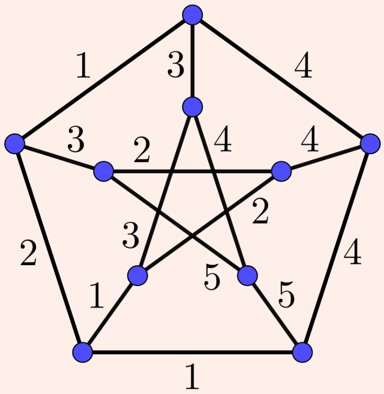
Cvičenie 10.3 V dôkaze vety 10.2.1 (strana 199) je uvedené tvrdenie

> *Ak hranu h_{k+1} pridáme do kostry T, tak tam vznikne cyklus C, pretože T je kostra.*

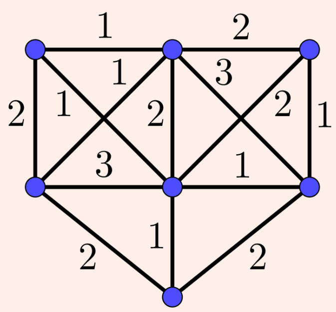
Dokážte toto tvrdenie. ■

Cvičenie 10.4 Pomocou Jarníkovho aj Kruskalovho algoritmu nájdite minimálne kostry daných grafov.

(a)



(b)



■

Cvičenie 10.5 Nájdite ohodnotenie hrán grafu K_6 číslami $\{1, 2, \ldots, 15\}$ (každé číslo sa použije práve raz) také, aby hodnota minimálnej kostry tohto grafu bola

(a) minimálna, (b) maximálna. ■

Cvičenie 10.6 Nájdite ohodnotenie hrán grafu $K_{3,4}$ číslami $\{1, 2, \ldots, 12\}$ (každé číslo sa použije práve raz) také, aby hodnota minimálnej kostry tohto grafu bola

(a) minimálna, (b) maximálna. ■

Cvičenie 10.7 Nájdite ohodnotenie hrán grafu Q_3 (viď cvičenie 5.21, strana 118) číslami $\{1, 2, \ldots, 12\}$ (každé číslo sa použije práve raz) také, aby hodnota jeho minimálnej kostry bola

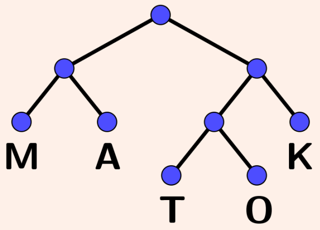
(a) minimálna, (b) maximálna. ■

Cvičenie 10.8 Nájdite ohodnotenie hrán grafu K_6 číslami $\{1, 2, \ldots, 15\}$ (každé číslo sa použije práve raz) také, aby hodnota minimálnej kostry tohto grafu bola maximálna a súčasne bola táto kostra izomorfná s cestou. ■

Cvičenie 10.9 V Pythone alebo v C naprogramujte vytvorenie minimálnej kostry daného grafu pomocou Kruskalovho algoritmu.

Cvičenie 10.10 V Pythone alebo v C naprogramujte vytvorenie minimálnej kostry daného grafu pomocou Jarníkovho algoritmu.

Cvičenie 10.11



Na obrázku vľavo je koreňový strom určujúci Huffmanov kód (ľavá hrana znamená 1 a pravá hrana znamená 0).

(a) Zakódujte slová
- MAT
- MOTAT
- MAMA
- KATKA

(b) Dekódujte slová
- 0111011
- 0111110
- 11100110010
- 0110010011

Cvičenie 10.12 Zostrojte optimálny Huffmanov kód pre dané znaky a ich početnosti.

(a)

znak	početnosť
A	5
B	6
C	6
D	11
E	20

(b)

znak	početnosť
A	2
B	3
C	5
D	8
E	13
F	21

Cvičenie 10.13 Koľko bitov potrebujeme na zakódovanie slova BRATISLAVA, ak použijeme optimálny Huffmanov kód pre toto slovo?

Cvičenie 10.14 Určte pravdivosť nasledujúcich výrokov.

(a) V Huffmanovom kóde žiadne kódové slovo nemôže byť prefixom iného kódového slova.
(b) Huffmanov kód je bezstratový spôsob kódovania.
(c) V niektorých prípadoch nemusí mať optimálny Huffmanov kód minimálnu redundanciu.

Cvičenie 10.15 Máme abecedu s piatimi znakmi, ktorých relatívne početnosti sú dané tabuľkou

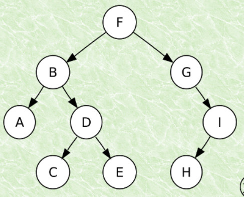
znak	A	B	C	D	E
relatívna početnosť	0.34	0.06	0.13	0.07	0.4

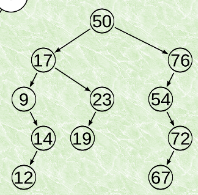
Zostrojte optimálny Huffmanov kód pre danú abecedu a vypočítajte priemerný počet bitov potrebných na zakódovanie 100 znakovej správy.

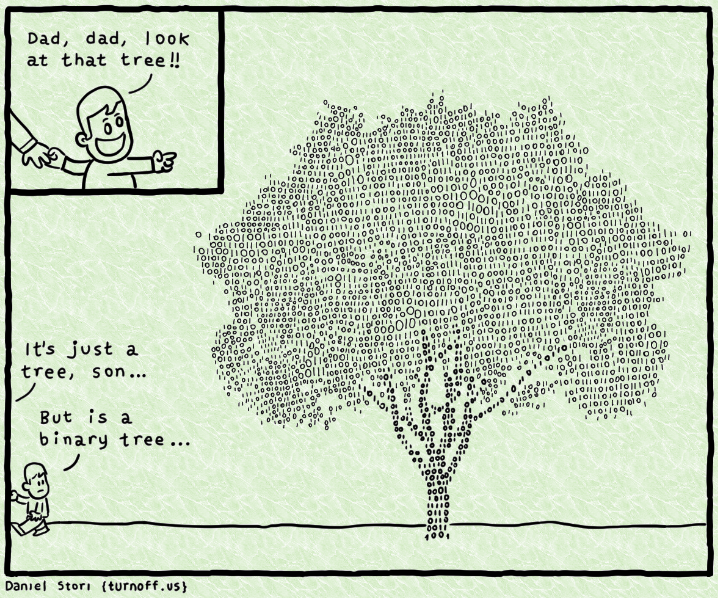
Cvičenie 10.16 Počas 1. svetovej vojny používala nemecká armáda šifru ADFGVX. Jej názov je odvodený od šiestich znakov, pomocou ktorých sa šifrovali všetky správy.

znak	početnosť
A	23
D	20
F	7
G	13
V	21
X	16

Koľko bitov by sa ušetrilo, ak by sa 100 znaková zašifrovaná správa pred odoslaním zakódovala pomocou optimálneho Huffmanovho kódu? Početnosť znakov v zašifrovanej správe udáva tabuľka vľavo a jeden znak sa kóduje jedným bytom, t. j. 8 bitmi.







11. Binárne stromy, izomorfizmus stromov, hra NIM

11.1 Prehľadávacie binárne stromy

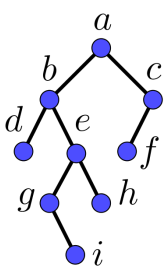
Binárne stromy boli definované a ich vlastnosti boli popísané v podkapitole 4.4. Bolo tam spomenuté, že binárne stromy sú vhodné na takú reprezentáciu a usporiadania množín dát, aby sa tieto dali efektívne triediť a prehľadávať. Príslušná štruktúra sa nazýva *prehľadávací binárny strom*.

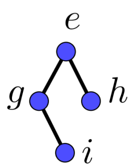
Z hľadiska organizácie dát pomocou binárnych stromov je dôležitá otázka, koľko vlastne existuje rôznych binárnych stromov s n vrcholmi. Ak si tento počet označíme pomocou b_n, tak sa pomocou vytvárajúcich funkcií (kapitola 8) dá odvodiť vzorec $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Takto definované čísla b_n sa nazývajú *Catalanove čísla* a uvedený vzorec bol odvodený v časti 8.3.4 (str. 171). Okrem toho ho prípadní záujemci môžu nájsť aj v knihe [15], v časti 10.4 (Binární stromy – český názov).

Už v definícii 4.4.1 sme intuitívne použili pojmy *ľavý podstrom* a *pravý podstrom*. Teraz si uvedieme aj formálnu definíciu týchto pojmov.

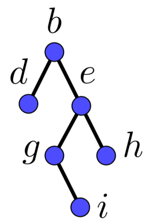
Definícia 11.1.1 — Ľavý a pravý podstrom vrcholu. Nech u je vnútorný vrchol binárneho stromu B. Potom ľavý (pravý) podstrom vrcholu u je podstrom stromu B, s koreňom v ľavom (pravom) synovi vrcholu u.

■ **Príklad 11.1** Vezmime si ako príklad strom na obrázku vľavo. Ľavý podstrom vrcholu b, je len vrchol d. Pravý podstrom vrcholu b je strom na obrázku 11.1. Ľavý podstrom vrcholu a je na obrázku 11.2 a pravý podstrom vrcholu a je na obrázku 11.3.

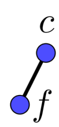




Obr. 11.1



Obr. 11.2



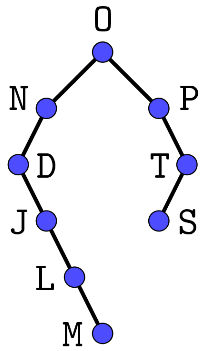
Obr. 11.3

■

Ďalej si formálne definujeme pojem *prehľadávací binárny strom*. Tento sa používa na organizáciu dát, napríklad na uchovávanie prvkov nejakej usporiadanej množiny. Pritom usporiadané množiny môžu byť množiny čísel, alebo množiny ľubovoľných reťazcov usporiadaných lexikograficky.

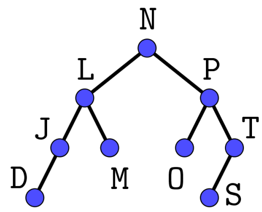
Definícia 11.1.2 — Prehľadávací binárny strom. Nech A je konečná usporiadaná množina, B je binárny strom a u jeho ľubovoľný vrchol. Potom B je prehľadávací binárny strom, ak každému jeho vrcholu je priradený práve jeden prvok množiny A tak, že prvok priradený vrcholu u je väčší, než prvok priradený ľubovoľnému vrcholu jeho ľavého podstromu a menší, než prvok priradený ľubovoľnému vrcholu jeho pravého podstromu.

■ **Príklad 11.2**



Množinu $A = \{$`O, P, N, D, T, J, L, S, M`$\}$, pri abecednom usporiadaní, môžeme napríklad umiestniť do prehľadávacieho binárneho stromu, ktorý máme zobrazený na obrázku vľavo. Strom, ktorý je na obrázku vľavo, dostaneme, ak doň prvky množiny A umiestňujeme v poradí uvedenom vyššie. Toto je niekedy potrebné avšak, z hľadiska prehľadávania a rýchleho prístupu nie ideálne. Pre rýchly prístup k uloženým dátam potrebujeme, aby mal prehľadávací binárny strom čo najmenšiu výšku.

Ak by sme prvky množiny A neukladali do prehľadávacieho binárneho stromu v poradí uvedenom vyššie, tak by sme mohli dostať napríklad prehľadávací binárny strom, ktorý vidíme na obrázku vpravo. Výška tohto stromu je len 4, čo je o 2 menej, než výška predošlého stromu. Pritom sa skutočne jedná o prehľadávací binárny strom podľa definície 11.1.2, o čom sa ľahko môžeme presvedčiť.



■

Teraz si popíšeme postup, ktorým sme zostrojili prvý prehľadávací binárny strom z príkladu 11.2.

- Prvý prvok množiny A, čiže `O`, bude koreňom stromu.
- Ďalší prvok množiny A je `P`. V abecede je `O` $<$ `P`, preto `P` musí ležať v pravom podstrome. Vrchol `O` zatiaľ nemá pravého syna, takže `P` bude je pravý syn.
- Ďalší prvok množiny A je `N`. V abecede je `N` $<$ `O`, preto `N` musí ležať v ľavom podstrome. Keďže vrchol `O` zatiaľ nemá ľavého syna, bude `N` jeho ľavý syn.
- Ďalší prvok množiny A je `D`. V abecede je `D` $<$ `O`, preto `D` musí ležať v ľavom podstrome. Ľavý podstrom vrcholu `O` je zatiaľ len vrchol `N` a `D` $<$ `N`, takže `D` bude ľavý syn vrcholu `N`.
- Atď...

Tento postup si teraz zapíšeme ako pseudokód algoritmu. V popise pseudokódu budeme používať rovnakú funkciu `prvy`(P), akú sme použili aj v pseudokóde Kruskalovho algoritmu (časť 10.2.2, strana 201). Táto funkcia nám z postupnosti P vráti jej prvý prvok a zároveň tento prvok z P odstráni. Ďalej budeme používať funkcie `lavy.syn`(v), resp. `pravy.syn`(v), ktoré nám vrátia ľavého, resp. pravého syna vrcholu v. Keďže sa jedná o binárny strom, tak syn vrcholu môže byť buď ľavý alebo pravý. Preto ak pridávame do stromu ďalšiu hranu s koncovými vrcholmi u a v, budeme rozlišovať medzi ľavou hranou `L`(v,u) a pravou hranou `P`(v,u). Okrem toho, v zápise, stotožníme vrcholy grafu a prvky, ktoré zodpovedajú vrcholom. Takže ak u a v budú dva rôzne vrcholy stromu B, tak buď platí $u < v$, alebo platí $v < u$, podľa toho v akom vzájomnom vzťahu sú prvky usporiadanej množiny A, priradené týmto vrcholom. Napokon je v pseudokóde použitá funkcia STOP (**while**), ktorá ukončí cyklus while, v ktorom sa nachádza. Pseudokód algoritmu na konštrukciu prehľadávacieho binárneho stromu sa potom dá zapísať nasledovným spôsobom.

Konštrukcia prehľadávacieho binárneho stromu

VSTUP: Postupnosť P neopakujúcich sa prvkov usporiadanej množiny A.

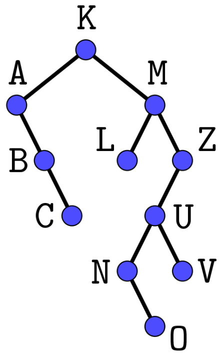
VÝSTUP: Prehľadávací binárny strom B pre postupnosť P.

```
    INICIALIZÁCIA
r := prvy(P);          (koreň prehľadávacieho stromu)
V := {r};
E := {};

    VYTVÁRANIE PREHĽADÁVACIEHO BINÁRNEHO STROMU B
while { postupnosť P je neprázdna } do
    u := prvy(P);
    v := r;
    while { vrchol v je koreň stromu, alebo má syna } do
        if { u < v } then
            F := L;          (návestie určujúce smer pridávanej hrany)
            if { existuje ľavý syn vrcholu v } then
                v := lavy.syn(v);
            else
                STOP(while);
            end
        else
            F := P;          (návestie určujúce smer pridávanej hrany)
            if { existuje pravý syn vrcholu v } then
                v := pravy.syn(v);
            else
                STOP(while);
            end
        end
    end
    V := V ∪ {u};
    E := E ∪ {F(v,u)};
end
```

Teraz si ukážeme dva príklady koštrukcie prehľadávacích binárnych stromov pomocou uvedeného algoritmu.

■ **Príklad 11.3**

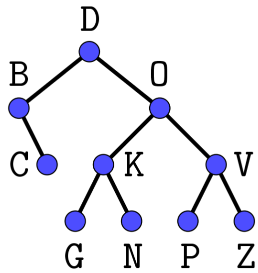


Ak pre množinu $A = \{\mathtt{K}, \mathtt{M}, \mathtt{A}, \mathtt{Z}, \mathtt{U}, \mathtt{B}, \mathtt{C}, \mathtt{N}, \mathtt{V}, \mathtt{O}, \mathtt{L}\}$ pomocou uvedeného algoritmu zostrojíme prehľadávací binárny strom, pričom prvky množiny A budeme brať v uvedenom poradí, tak dostaneme graf, ktorý vidíme na obrázku vľavo.

■

■ **Príklad 11.4**

Ak pre množinu $A = \{\mathtt{D}, \mathtt{O}, \mathtt{V}, \mathtt{K}, \mathtt{G}, \mathtt{N}, \mathtt{P}, \mathtt{Z}, \mathtt{B}, \mathtt{C}\}$ pomocou uvedeného algoritmu zostrojíme prehľadávací binárny strom, pričom prvky množiny A budeme brať v uvedenom poradí, tak dostaneme graf, ktorý vidíme na obrázku vpravo.



■

Prehľadávacie binárne stromy sú užitočné pri lokalizácii dát, čiže pri overovaní, či sa nejaká položka nachádza v danom súbore dát a ak áno, na ktorom mieste. Zoberme si napríklad prehľadávací binárny strom z príkladu 11.4. Chceli by sme vedieť, či sa v množine A nachádza aj písmeno N. Postup overovania by bol nasledovný.

Začneme od koreňa stromu, ktorý obsahuje písmeno D. Vieme, že $\mathtt{N} > \mathtt{D}$, takže ak má vrchol D pravého syna, prejdeme naň. Je to vrchol O. Platí $\mathtt{N} < \mathtt{O}$, takže ak má vrchol O ľavého syna, tak naň prejdeme. To je vrchol K. Platí $\mathtt{N} > \mathtt{K}$, takže ak má vrchol K pravého syna, prejdeme naň. Dostali sme sa na vrchol N a hľadanie skončilo.

Ako by prebiehalo hľadanie, ak by sme chceli zistiť, či sa v množine A nachádza písmeno R? Znovu začneme koreňom, vrcholom D. Vieme, že $\mathtt{R} > \mathtt{D}$, takže ak má vrchol D pravého syna, prejdeme naň. Je to vrchol O. Platí $\mathtt{R} > \mathtt{O}$, takže ak má vrchol O pravého syna, tak naň prejdeme. To je vrchol V. Platí $\mathtt{R} < \mathtt{V}$, takže ak má vrchol V ľavého syna, prejdeme naň. Je ním vrchol P a platí $\mathtt{R} > \mathtt{P}$, takže ak by mal vrchol P pravého syna, prešli by sme naň. Avšak vrchol P nemá pravého syna, takže hľadanie skončilo a vieme, že písmeno R sa v množine A nevyskytuje.

V praxi nás bude zaujímať, koľko krokov v binárnom strome musíme spraviť, aby sme dostali odpoveď na otázku, či sa nejaký prvok v súbore dát nachádza, alebo nenachádza. Potrebný počet krokov bude maximálny vtedy, ak musíme v binárnom strome prejsť až na koniec jeho najhlbšej vetvy. V strome z príkladu 11.4 by to boli otázky na písmena G, N, P a Z, ktoré sa v množine A nachádzajú, alebo otázky na písmená, ktoré sa v množine A nenachádzajú a pri ich hľadaní musíme prejsť, cez uvedené 4 písmená (napríklad písmeno R).

V aplikáciach bude maximálny čas potrebný na lokalizáciu dátovej položky závisieť od výšky prehľadávacieho binárneho stromu. Pri každom kroku postúpime o 1 úroveň ďalej od koreňa stromu. To znamená, že čím nižší je prehľadávací strom, tým skôr vieme lokalizovať dátovú položku. V praxi sa preto na účely organizácie a lokalizácie dát používajú vyvážené prehľadávacie binárne stromy, pretože v ich prípade je čas potrebný na lokalizáciu dát minimálny. Algoritmus konštrukcie prehľadávacieho binárneho stromu, uvedený vyššie, vo všeobecnosti nedáva optimálne prehľadávacie stromy. Existuje ale viacero spôsobov ako výšku prehľadávacieho stromu minimalizovať a určite sa s nimi študenti aplikovanej informatiky stretnú na odborných informatických predmetoch. Poďme sa však teraz venovať odhadu, koľko najviac krokov je potrebných na lokalizáciu dát v prehľadávacom binárnom strome s n vrcholmi.

Majme prehľadávací binárny strom B, ktorého výška je h. Ako už bolo spomenuté, v každom kroku prehľadávania, t. j. pri každom porovnaní hľadanej dátovej položky s aktuálnym vrcholom stromu, postúpime o 1 úroveň ďalej od koreňa. Takže maximálny počet krokov, ktoré môžeme spraviť v binárnom strome je $(h+1)$, čiže výška stromu plus 1. Koreň stromu je úroveň 0, preto ak má koreňový strom výšku h, tak má $(h+1)$ úrovni.

Ľubovoľný prehľadávací binárny strom B s n vrcholmi vieme doplniť na úplný binárny strom B^* tým, že pridáme hrany a vrcholy ku jeho pôvodným vrcholom tak, aby všetky jeho pôvodné vrcholy mali 2 synov. Takto vznikne úplný binárny strom B^*, ktorého vnútorné vrcholy sú práve všetky vrcholy pôvodného binárneho stromu B. Takže strom B^* má n vnútorných vrcholov. Podľa vety 4.4.1 vieme, že úplný binárny strom s n vnútornými vrcholmi má $(n+1)$ koncových vrcholov. Takže strom B^* bude mať $(n+1)$ koncových vrcholov a jeho výška je $(h+1)$. Podľa vety 4.4.2 potom vieme, že platí nerovnosť $\log_2(n+1) \leq (h+1)$. Platí preto nasledujúca veta.

Veta 11.1.1 — O optimálnej lokalizácii v prehľadávacom binárnom strome. Pre počet krokov k, potrebných na lokalizáciu dátovej položky v prehľadávacom binárnom strome s n vrcholmi, platí

$$k \geq \log_2(n+1) .$$

Dôkaz: vyplýva z viet 4.4.1, 4.4.2 a vyššieuvedeného.

Dá sa ukázať, že v prípade minimalizovanej výšky prehľadávacieho binárneho stromu, pri vyvážených binárnych stromoch, platí

$$k = \lceil \log_2(n+1) \rceil ,$$

kde $\lceil a \rceil$ označuje hornú celú časť reálneho čísla a. Ak napríklad potrebujeme zorganizovať $n = 2\,000\,000$ položiek, tak ich vieme uložiť do prehľadávacieho binárneho stromu tak, aby sme ľubovoľnú položku vedeli lokalizovať na maximálne

$$k = \lceil \log_2 2\,000\,000 \rceil = \lceil 20.93\ldots \rceil = 21$$

krokov, t. j. stačí nám na to prehľadávací binárny strom s výškou 20.

11.2 Izomorfizmus stromov

V podkapitole 5.2 (strana 98) bol definovaný izomorfizmus grafov vo všeobecnosti. Pripomeňme, že podľa definície 5.2.1, sú dva grafy $G = (V,E)$ a $G' = (V',E')$ izomorfné, ak existuje bijekcia $\varphi : V \to V'$, ktorá zachováva susednosť vrcholov a násobnosť hrán.

Stromy sú grafy, t. j. izomorfizmus stromov sa definuje rovnako ako izomorfizmus grafov. V častiach 5.2.2 (strana 105) a 5.2.3 (strana 106) bol definovaný izomorfizmus koreňových a binárnych stromov. Tieto kategórie stromov majú niektoré vlastnosti naviac[1], a preto aj v definícii izomorfizmu týchto kategórii stromov potrebujeme doplňujúce podmienky.

V podkapitole o izomorfizme bolo spomenuté, že zistiť, či dané dva grafy sú, alebo nie sú, izomorfné, je vo všeobecnosti ťažký problém. Sú však kategórie grafov, pre ktoré problém zistenia ich izomorfizmu je ľahký. Napríklad stromy sú takouto kategóriou grafov a v nasledujúcich častiach budú popísané algoritmy overovania izomorfizmu dvoch binárnych stromov, dvoch koreňových stromov a dvoch stromov všeobecne. Časová zložitosť overovania izomorfizmu dvoch stromov je pre všetky typy stromov lineárna.

[1] Koreňové stromy majú oproti stromom naviac koreň a binárne stromy majú oproti koreňovým stromom naviac orientáciu hrán a to, že každý vrchol môže mať najviac 2 synov.

11.2.1 Algoritmus overovania izomorfizmu binárnych stromov

Algoritmus overovania izomorfizmu dvoch binárnych stromov bude spočívať v tom, že každému binárnemu stromu jednoznačne priradíme kód. O tomto kóde ukážeme, že jednoznačne určuje príslušný binárny strom a naviac, že dva izomorfné binárne stromy budú mať rovnaký kód.

Vrcholy binárneho stromu budeme označovať písmenami $v_1, \dots, v_i, \dots$ Každému vrcholu budeme prideľovať značku, ktorú pre vrchol v_i budeme označovať $Z(v_i)$. Keďže sa jedná o binárny strom, v ktorom každý vrchol môže mať ľavého a pravého syna, budeme pre vrchol v_i označovať jeho ľavého syna v_{iL} a jeho pravého syna v_{iP}.

Pseudokód algoritmu vytvárania kódu binárneho stromu, máme na strane 219 hore. Vytváranie kódu sa začína tým, že každému koncovému vrcholu dáme značku 01. Potom postupujeme od koncových vrcholov ku koreňu a každému vnútornému vrcholu v_i budeme dávať značku zostavenú zo značiek jeho synov nasledovne

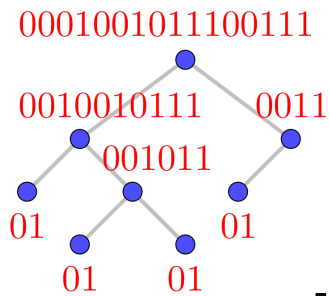
- ▷ Ak vrchol v_i má ľavého aj pravého syna, tak jeho značka bude $0 + Z(v_{iL}) + Z(v_{iP}) + 1$.
- ▷ Ak vrchol v_i má len ľavého syna, tak jeho značka bude $0 + Z(v_{iL}) + 1$.
- ▷ Ak vrchol v_i má len pravého syna, tak jeho značka bude $0 + \mathtt{X} + Z(v_{iP}) + 1$.

V uvedených zápisoch znamená symbol $+$ „zreťazenie“ dvoch značiek. Takže ak napríklad vrchol v_i má oboch synov a jeho synovia sú koncové vrcholy so značkami 01 a 01, tak značka vrcholu v_i bude $Z(v_i) = 001011$. Podrobnejšie si postup ukážeme na nasledujúcich príkladoch.

Ako vidíme z popísaného algoritmu, značka každého vrcholu bude pozostávať zo znakov $\{0, 1, \mathtt{X}\}$. Ďalej si všimnime, že značky vrcholov sú zostavované tak, že je dodržaná parita znakov 0 a 1. To znamená, že v značke každého vrcholu je vždy rovnako veľa núl ako jedničiek. Napokon si ešte všimnime, že dĺžka značiek narastá smerom od koncových vrcholov ku koreňu stromu. Keď všetkým vrcholom binárneho stromu popísaným spôsobom pridelíme značky, tak značku koreňa zoberieme ako kód binárneho stromu. Teraz to ilustrujeme na sľúbených príkladoch. Najskôr ukážeme zostavovanie kódu daného binárneho stromu, potom dokážeme, že takto vygenerovaný kód je jednoznačný, že izomorfné stromy majú rovnaký kód a nakoniec ukážeme ako z kódu binárneho stromu môžeme nakresliť pôvodný binárny strom.

■ **Príklad 11.5**

Na obrázku vpravo máme binárny strom. Pri zostavovaní jeho kódu začneme tým, že najskôr všetkým jeho koncovým vrcholom dáme značky 01. Potom všetkým vnútorným vrcholom dávame značky podľa ich detí. Značky jednotlivých vrcholoch máme na obrázku a výsledný kód binárneho stromu z obrázku, je 0001001011100111.



■

V predošlom príklade mali všetky vnútorné vrcholy daného stromu ľavých synov, a preto výsledný kód pozostáva len z núl a jedničiek. Symbol X v kóde potrebujeme kvôli tomu, že pri binárnych stromoch rozlišujeme medzi ľavým a pravým synom vrcholu. Symbol X v kóde označuje chýbajúceho ľavého syna vrcholu. Takže tým vlastne daný binárny strom fiktívne „doplníme“ na úplný binárny strom. Tam, kde pri vnútornom vrchole chýba ľavý syn, „doplníme“ namiesto neho X. Na ďalšom príklade predvedieme vytváranie kódu pre binárny strom, v ktorom chýbajú ľaví synovia niektorých vnútorných vrcholov.

Vytváranie identifikačného kódu binárneho stromu

VSTUP: Binárny strom B s koreňom v_0.

VÝSTUP: Kód $Z(v_0)$, jednoznačne určujúci daný binárny strom.

INICIALIZÁCIA

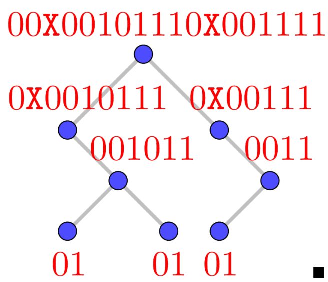
Každému koncovému vrcholu v_i priraď značku $Z(v_i) = 01$;

VYTVÁRANIE JEDNOZNAČNÉHO KÓDU BINÁRNEHO STROMU B

for { *pre každý vnútorný vrchol* v_i *, ktorého všetci synovia už majú značky* } **do**
  if { *ak* v_i *má ľavého aj pravého syna* } **then**
    $Z(v_i) := 0 + Z(v_{iL}) + Z(v_{iP}) + 1;$
  end
  if { *ak* v_i *má len ľavého syna* } **then**
    $Z(v_i) := 0 + Z(v_{iL}) + 1;$
  end
  if { *ak* v_i *má len pravého syna* } **then**
    $Z(v_i) := 0 + \mathtt{X} + Z(v_{iP}) + 1;$
  end
end

■ **Príklad 11.6**

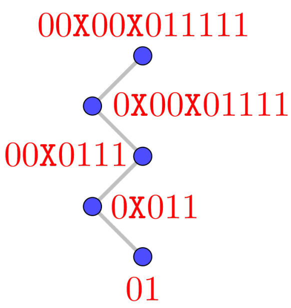
Výsledný kód binárneho stromu, ktorý vidíme na obrázku vpravo, je 00X00101110X001111. Značky jeho vrcholov sú uvedené na obrázku. Prideľovanie značiek sa začína od koncových vrcholov stromu.



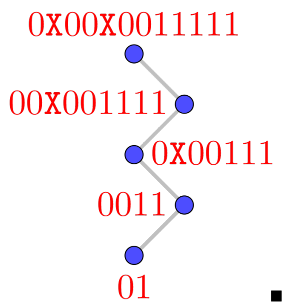
■

Postup vytvárania kódu ukážeme ešte na dvoch ďalších binárnych stromoch. Bude sa jednať o dva vertikálne symetrické binárne stromy, ktoré by ako stromy, aj ako koreňové stromy, boli izomorfné. Ako binárne stromy však izomorfné nie sú, a preto budú mať rôzne kódy.

■ **Príklad 11.7**



Výsledný kód binárneho stromu na obrázku vľavo je 00X00X011111 a výsledný kód binárneho stromu na obrázku vpravo je 0X00X0011111. Ako vidíme, tieto kódy sú rôzne, čo znamená, že dané binárne stromy nie sú izomorfné.



■

Z algoritmu vytvárania identifikačného kódu binárneho stromu ako aj z uvedených príkladov je zrejmé, že dva izomorfné binárne stromy musia mať rovnaké kódy. Všetky vlastnosti, ktoré využívame pri zostavovaní kódov vrcholov (koncové vrcholy a ich počet, ľavý a pravý syn vrcholu, počet úrovní podstromu,. . .) sú invarianty binárnych stromov. Takže, ak dva binárne stromy sú izomorfné, tak musia mať rovnaké kódy.

Opačným smerom dokážeme správnosť algoritmu tak, že ukážeme ako sa z daného kódu dá **jednoznačne** nakresliť pôvodný binárny strom. To znamená, že z jedného kódu nemôžeme dostať dva rôzne (neizomorfné) binárne stromy. Dôkaz nebudeme robiť celý, iba načrtneme jeho myšlienku. Najkratší kód, aký môžeme dostať, je 01. Takýto kód zodpovedá jednému izolovanému vrcholu. Pri rekonštrukcii binárneho stromu z kódu budeme postupovať od koreňa nadol, po úrovniach stromu. Zoberme si kód ľubovoľného vrcholu, označme si tento vrchol v_i. Tento kód má vždy tvar `0K1`, kde `K` je „zreťazenie" kódov ľavého a pravého syna vrcholu v_i. Pre kód `K`, čiže kód vrcholu v_i bez ľavej krajnej nuly a pravej krajnej jednotky, budeme rozlišovať 2 možnosti. Kód `K` sa buď začína znakom `X`, alebo sa ním nezačína.

- ▷ Pokiaľ sa `K` začína znakom `X`, tak to znamená, že vrchol v_i nemá ľavého syna a `K` je kód jeho pravého syna.
- ▷ Ak sa `K` nezačína znakom `X`, tak využijeme skutočnosť, že kód každého vrcholu musí mať rovnako veľa znakov 0 ako znakov 1. Takže zo začiatku `K` vezmeme najkratšiu časť, v ktorej je rovnaký počet núl ako jedničiek. Táto časť bude kód ľavého syna vrcholu v_i a zvyšok `K`, bude kód pravého syna vrcholu v_i. Ak by nám z `K`, po zobratí najkratšej časti s rovnakým počtom 0 ako 1 z jeho začiatku, už nič nezvýšilo, tak to znamená, že vrchol v_i nemá pravého syna.

Uvedený postup rekonštrukcie stromu je deterministický a jednoznačný, čo znamená, že z jedného kódu môžeme spätne dostať len jeden binárny strom. Tento postup je vhodný na ukázanie toho, že stromy s rovnakým kódom sú izomorfné. Ale na reálne nakreslenie pôvodného stromu je tento postup príliš ťažkopádny. Na to si ukážeme iný postup. Ak chceme z daného kódu spätne nakresliť pôvodný binárny strom, tak budeme postupovať nasledovne

1. Z kódu odstránime ľavú krajnú nulu a pravú krajnú jednotku. Ak si napríklad zoberieme kód binárneho stromu z príkladu 11.5, tak dostaneme 0001001011100111 $\to$ 00100101110011.
2. Všetky nuly v kóde nahradíme šípkou dole a všetky jednotky nahradíme šípkou hore. Pre lepšiu prehľadnosť si nuly a jednotky očíslujeme podľa poradia a ak sú v kóde znaky `X`, tak tie ignorujeme, t. j. neprideľujeme im žiadne čísla. Kód binárneho stromu z príkladu 11.5 bude mať podobu

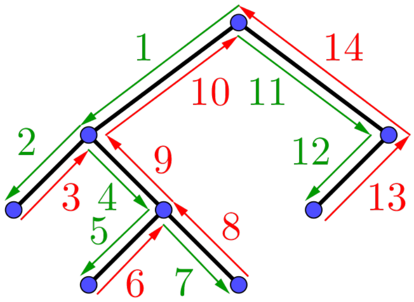
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1
↓	↓	↑	↓	↓	↑	↓	↑	↑	↑	↓	↓	↑	↑

3. Nakreslíme si vrchol, ktorý bude koreňom stromu a vychádzajúc z neho, začneme kresliť šípky. V binárnom strome môže mať každý vrchol najviac dvoch synov a rozlišujeme ich na ľavého a pravého syna. Takže ak sme v nejakom vrchole a nasleduje
   - ▷ znak `X`, tak ľavého syna tohto vrcholu zablokujeme.
   - ▷ šípka dole a tento vrchol ešte nemá ľavého syna a ani tento nie je blokovaný znakom `X`, tak nakreslíme šípku šikmo doľava, dole a na konci šípky nakreslíme nový vrchol.
   - ▷ šípka dole a tento vrchol už má ľavého syna, alebo je tento blokovaný znakom `X`, tak nakreslíme šípku šikmo doprava, dole a na konci šípky nakreslíme nový vrchol.
   - ▷ šípka hore, tak nakreslíme šípku idúcu šikmo hore, po protismerne idúcej šípke (orientovanej smerom dole).

▷ Ak sme už nakreslili všetky šípky, tak stačí len spojiť hranami nakreslené vrcholy. Každá dvojica protismerne idúcich šípok zodpovedá hrane.

Uvedený postup si ilustrujeme najskôr na príklade 11.5, ktorého kód, aj s prepísaním na šípky, už máme uvedený vyššie.

■ Príklad 11.8

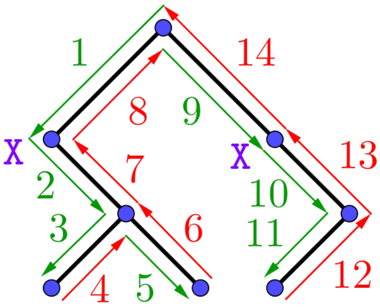


Zadaný je kód binárneho stromu 0001001011100111. Tabuľku s upraveným kódom, aj s jeho transkripciou pomocou šípok, máme uvedenú pred týmto príkladom na predošlej strane. Postup rekonštrukcie pôvodného binárneho stromu, ako aj zrejkonštruovaný binárny strom, vidíme na obrázku vľavo.

■

V ďalšom si ešte ukážeme rekonštrukciu binárnych stromov z príkladov 11.6 a 11.7.

■ Príklad 11.9



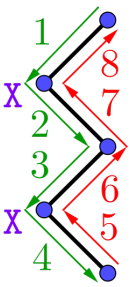
Zadaný je kód binárneho stromu 00X00101110X001111. Upravený kód, s vynechanou ľavou krajnou 0 a pravou krajnou 1 a jeho transkripciu pomocou šípok, máme zobrazený v nižšie uvedenej tabuľke. Postup rekonštrukcie binárneho stromu vidíme na obrázku vľavo. Všimnime si, že po 1. a po 9. šípke sme zablokovali ľavého syna príslušného vrcholu znakom X, takže nasledujúca šípka dole musí ísť smerom doprava.

00X00101110X001111 → 0X00101110X00111															
1.	—	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	—	10.	11.	12.	13.	14.
0	X	0	0	1	0	1	1	1	0	X	0	0	1	1	1
↓	X	↓	↓	↑	↓	↑	↑	↑	↓	X	↓	↓	↑	↑	↑

■

■ Príklad 11.10

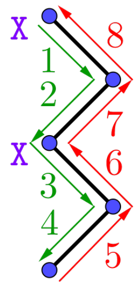
Zadaný kód binárneho stromu je 00X00X011111. Vynechaním ľavej krajnej 0 a pravej krajnej 1 a následnou transkripciou na šípky dostaneme



00X00X011111 → 0X00X01111									
1.	—	2.	3.	—	4.	5.	6.	7.	8.
0	X	0	0	X	0	1	1	1	1
↓	X	↓	↓	X	↓	↑	↑	↑	↑

Postup rekoštrukcie binárneho stromu a výsledný strom, vidíme na ľavom obrázku.

Zadaný kód binárneho stromu je 0X00X0011111. Vynechaním ľavej krajnej 0 a pravej krajnej 1 a následnou transkripciou na šípky dostaneme

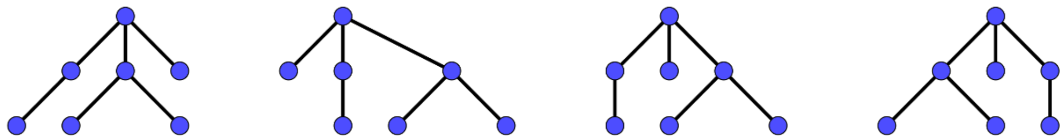


0X00X0011111 → X00X001111									
—	1.	2.	—	3.	4.	5.	6.	7.	8.
X	0	0	X	0	0	1	1	1	1
X	↓	↓	X	↓	↓	↑	↑	↑	↑

Postup rekoštrukcie binárneho stromu a výsledný strom, vidíme na obrázku vpravo. ■

11.2.2 Algoritmus overovania izomorfizmu koreňových stromov

V predošlej časti sme ukázali, ako sa overuje izomorfizmus binárnych stromov. Teraz ukážeme ako sa dá uvedený postup modifikovať, aby sme pomocou neho mohli overiť izomorfizmus koreňových stromov. Koreňové stromy sa od binárnych líšia tým, že každý ich vnútorný vrchol môže mať aj viac než 2 synov a na ľavo-pravom poradí jeho synov nezáleží. Takže štyri koreňové stromy na obrázku 11.4 sú všetky navzájom izomorfné. Pri overovaní izomorfizmu dvoch koreňových stromov pomocou ich identifikačného kódu musíme preto synov a príslušné podstromy každého vrcholu usporiadať. Na druhej strane nebudeme pri zápise kódu koreňového stromu potrebovať znak X, pretože v koreňovom strome nerozlišujeme, či syn nejakého vrcholu je ľavý, alebo pravý. Algoritmus konštrukcie identifikačného kódu koreňového stromu je uvedený nižšie.



Obr. 11.4: Štyri izomorfné koreňové stromy

Vytváranie identifikačného kódu koreňového stromu

VSTUP: Koreňový strom R s koreňom v_0.

VÝSTUP: Kód $Z(v_0)$, jednoznačne určujúci daný koreňový strom.

INICIALIZÁCIA

Každému koncovému vrcholu v_i priraď značku $Z(v_i) = 01$;

VYTVÁRANIE JEDNOZNAČNÉHO KÓDU KOREŇOVÉHO STROMU R

for { *pre každý vnútorný vrchol* v_i } **do**

  if { *vrchol* v_i *má* k *synov* } **then**

    Usporiadaj synov vrcholu v_i zľava-doprava tak, aby platilo $Z(v_{i1}) \leq \ldots \leq Z(v_{ik})$;

  end

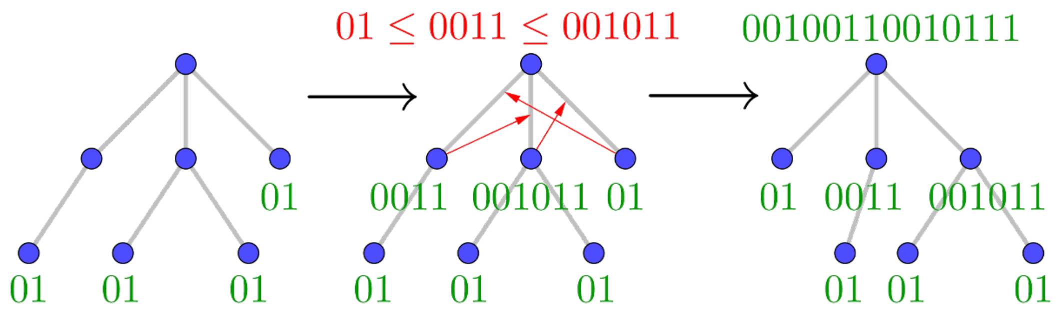
  $Z(v_i) := 0 + Z(v_{i1}) + \ldots Z(v_{ik}) + 1;$

end

Ako vidíme zo zápisu algoritmu, najskôr pridelíme všetkým koncovým vrcholom značky 01, rovnako ako pri binárnych stromoch. Potom postupujeme od koncových vrcholov ku koreňu. Predtým než pridelíme značku nejakému vrcholu, musia mať už všetci jeho synovia pridelené značky a všetkých jeho synov musíme lineárne usporiadať zľava-doprava podľa ich značiek. Je potrebné si preto uvedomiť, že symbol $\leq$ v zápise algoritmu znamená nejaké lineárne usporiadanie[2] značiek vrcholov. Môžeme napríklad zvoliť také lineárne usporiadanie, pri ktorom značky usporiadame podľa počtu ich cifier a ak budú mať dve značky rovnaký počet cifier, tak ich usporiadame podľa veľkosti, ako čísla. Napríklad $01 < 0011 < 001011 < \dots$ Týmto usporiadaním synov vrcholu je zabezpečené to, že dva izomorfné koreňové stromy budú mať rovnaký kód. Nemôže totiž nastať prípad aký vidíme na obrázku 11.4, kde synov a príslušné podstromy nejakého vrcholu ľubovoľne preusporiadavame. Postup si ilustrujeme na príklade prvého koreňového stromu z obrázku 11.4.

■ **Príklad 11.11** Ideme nájsť kód ľavého krajného koreňového stromu z obrázku 11.4. Postup je znázornený na obrázku 11.5 a bude nasledovný.

1. V prvom kroku dáme koncovým vrcholom značky 01.
2. V druhom kroku ideme na predposlednú úroveň stromu a pridelíme značky dvom vnútorným vrcholom.
3. V treťom kroku sme sa dostali ku koreňu, ktorý má 3 synov so značkami 0011, 001011 a 01. Pri vyššieuvedenom lineárnom usporiadaní, je ich poradie $01 < 0011 < 001011$, takže zodpovedajúcim spôsobom preusporiadame synov koreňa a príslušné podstromy. Koreňu následne pridelíme značku 00100110010111, ktorá je zároveň identifikačným kódom koreňového stromu.



Obr. 11.5: Konštrukcia kódu koreňového stromu

■

Z uvedeného postupu je zrejmé, že izomorfné koreňové stromy musia mať rovnaké identifikačné kódy. Ak by sme chceli z identifikačného kódu spätne nakresliť koreňový strom, tak postup bude v podstate rovnaký ako pri rekonštrukcii binárneho stromu z jeho kódu. Rozdiel bude len v dvoch bodoch. Po prvé, kódy koreňových stromov neobsahujú žiaden znak `X`, a preto všetky časti rekonštrukčného algoritmu, ktoré sa týkajú znaku `X`, môžeme vynechať. A po druhé, v koreňových stromoch sa synovia nerozlišujú na ľavého a pravého a vrchol môže mať aj viac než 2 synov. Preto, ak z nejakého vrcholu máme nakresliť šípku dole, tak túto šípku nakreslíme vpravo od poslednej šípky, ktorá už vedie z tohto vrcholu dole. Zvyšok algoritmu zostáva nezmenený.

11.2.3 Algoritmus overovania izomorfizmu stromov

Koreňové stromy sa od stromov líšia len tým, že majú jeden pevne vybraný vrchol, ktorý sa nazýva koreň. Takže ak chceme stromom prideľovať kódy, na základe ktorých vieme povedať či dané dva stromy sú izomorfné, musíme si vhodným spôsobom nájsť koreň týchto stromov.

V definícii 3.3.5 (strana 56) bol definovaný pojem *centrum grafu*. Pripomíname, že centrum grafu je množina tých vrcholov daného grafu, ktoré majú minimálnu excentricitu. Voľne môžeme

[2] Viď definícia 7.1.3 na strane 138.

povedať, že centrum je tvorené vrcholmi, ktorých vzdialenosť od všetkých ostatných vrcholov grafu je najmenšia možná. Sú typy grafov, napríklad cykly, v ktorých je centrum tvorené celou ich vrcholovou množinou. Na druhej strane spektra sú stromy, ktorých centrum zahŕňa len minimálnu časť ich vrcholovej množiny. Platí nasledujúca veta.

Veta 11.2.1 — O centre stromu. Centrum stromu pozostáva buď z jedného vrcholu alebo z dvoch susedných vrcholov.

Dôkaz: pre stromy s 1 alebo s 2 vrcholmi, tvrdenie triviálne platí. Vezmime si teraz strom T, ktorý má viac než 2 vrcholy. Veľmi ľahko sa nahliadne, že listy sú tie vrcholy stromu, ku ktorým má každý vrchol stromu najväčšiu vzdialenosť (viď cvičenie 11.7). Z toho potom vyplýva, že ak stromu T odtrhneme všetky jeho pôvodné (len pôvodné, pretože odtrhnutím listu, môže vzniknúť nový list) listy, tak excentricita každého zostávajúceho vrcholu sa zníži práve o 1. Okrem toho je zrejmé, že pokiaľ má strom viac než 2 vrcholy, tak list nemôže byť centrálny vrchol. Preto ak strom T' dostaneme zo stromu T odtrhnutím všetkých pôvodných listov stromu T, tak platí $C(T) = C(T')$. Inak povedané, centrum stromu sa po aplikácii operácie odtrhnutia všetkých jeho pôvodných listov zachováva. Strom má konečný počet vrcholov, takže krok s trhaním všetkých jeho listov budeme opakovať dovtedy, kým výsledný graf bude mať viac než 2 vrcholy. Po konečnom počte krokov musíme skončiť, pretože nám buď zostane len jeden vrchol, alebo nám zostanú dva vrcholy spojené hranou. V oboch prípadoch sa jedná o centrum pôvodného stromu T. Q.E.D.

Veta 11.2.1 je síce veľmi jednoduchá, avšak pre algoritmus zisťovania izomorfizmu stromov je kľúčová. Vlastnosť „byť centrom grafu“ je totiž invariant (viď cvičenie 11.8). Dokáže sa to veľmi jednoducho pomocou toho, že aj vlastnosť „vzdialenosť ľubovoľných dvoch vrcholov grafu“ je invariant. Vďaka vete 11.2.1 vieme každému stromu priradiť jednoznačný identifikačný kód tak, že dva stromy budú izomorfné práve vtedy, keď ich identifikačné kódy budú rovnaké. Postup konštrukcie identifikačného kódu pre daný strom je nasledovný.

1. Pre daný strom T nájdeme jeho centrum $C(T)$.
2. Ak je centrum tvorené len jedným vrcholom, tak tento vrchol zoberieme ako koreň a kód príslušného koreňového stromu bude kód stromu T.
3. Ak je centrum tvorené dvoma susednými vrcholmi $\{c_1, c_2\}$, tak zo stromu T odstránime hranu (c_1, c_2). Vynechaním hrany (c_1, c_2) sa strom T rozpadne na dva komponenty T_1 a T_2, pričom c_1 patrí do T_1 a c_2 patrí do T_2. Nájdeme kódy koreňových stromov (T_1, c_1) a (T_2, c_2). Označme kódy týchto dvoch koreňových stromov, v uvedenom poradí, ako K_1 a K_2. Potom
   - ak $K_1 \leq K_2$, kde symbol $\leq$ označuje lexikografické[3] usporiadanie, tak za koreň stromu T zvolíme vrchol c_1 a kód stromu T bude kód koreňového stromu (T, c_1).
   - ak $K_2 \leq K_1$, kde symbol $\leq$ označuje lexikografické usporiadanie, tak za koreň stromu T zvolíme vrchol c_2 a kód stromu T bude kód koreňového stromu (T, c_2).

11.3 Hra NIM

Hra NIM[4] údajne vznikla v Číne a v Európe pochádzajú prvé zmienky o nej zo 16. storočia. Táto hra bola v rôznych regiónoch sveta a v rôznych dobách známa pod rozličnými menami. Názov NIM pochádza od amerického matematika Boutona z Harvardskej univerzity, ktorý v roku 1901 vypracoval kompletnú teóriu tejto hry. Hra NIM bola jedna z prvých počítačových hier. Už v roku

[3] Lexikografické usporiadanie je lineárne usporiadanie.
[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Nim

1940 postavili v New Yorku stroj *Nimatron*, na ktorom sa dala hrať hra NIM. V minulosti, v časoch pred príchodom PC, mobilov a smartfónov, bola hra NIM veľmi populárna aj medzi mládežou. My sa budeme zaoberať hrou NIM preto, lebo táto hra má víťaznú stratégiu a naviac sa táto víťazná stratégia dá popísať pomocou grafov.

11.3.1 Pravidlá hry NIM

Existuje množstvo variánt hry NIM. V zásade však ide vždy o to, že sa pridávajú, alebo odoberajú nejaké objekty a ten hráč, ktorý dosiahne určené množstvo, alebo zoberie posledný objekt, prehráva, alebo vyhráva – v závislosti od verzie hry. Hra NIM môže vyzerať napríklad takto

> *Hru NIM hrajú dvaja hráči. Na začiatku hry je na stole kôpka 100 zápaliek a hráči z nej striedavo odoberajú 1 až 10 zápaliek. To znamená, že každý hráč musí v každom ťahu odobrať z kôpky najmenej 1 zápalku a najviac 10 zápaliek. Hráč, ktorý zoberie poslednú zápalku, prehráva.*

Pozrieme sa teraz na víťaznú stratégiu hry NIM.

11.3.2 Hra NIM a grafy

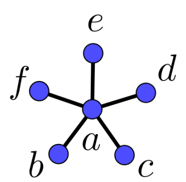
Najskôr si ukážeme ako môžeme hru NIM reprezentovať pomocou grafov. Počtu zápaliek v kôpke priradíme čísla 1 až 100 a každému číslu bude zodpovedať vrchol grafu. Dva vrcholy grafu, označme si ich napríklad u, v, budú spojené hranou práve vtedy, ak sa v jednom ťahu vieme dostať z počtu u na počet v. Napríklad vrchol 100 bude spojený s vrcholmi 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98 a 99.

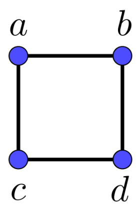
Predtým než budeme pokračovať v popise víťaznej stratégie hry, zadefinujeme tri nové pojmy a dokážeme jednoduchú vetu.

Definícia 11.3.1 — Stabilná množina vrcholov. Nech $G = (V, E)$ je graf. Potom $S \subseteq V$ sa nazýva stabilná množina vrcholov grafu G, ak každý vrchol z $V \setminus S$ je susedný s aspoň jedným vrcholom z S.

■ **Príklad 11.12**

Napríklad v grafe na obrázku vpravo množina $S_1 = \{a\}$ **je** stabilná a množina $S_2 = \{f, c\}$ **nie je** stabilná.





V grafe na obrázku vľavo množina $S_1 = \{a, d\}$ **je** stabilná, množina $S_2 = \{a, b\}$ takisto **je** stabilná a množina $S_3 = \{a\}$ **nie je** stabilná. ■

Definícia 11.3.2 — Nezávislá množina vrcholov. Nech $G = (V, E)$ je graf. Potom $N \subseteq V$ sa nazýva nezávislá množina vrcholov grafu G, ak žiadne dva vrcholy z množiny N nie sú susedné.

Pomocou predchádzajúcich dvoch pojmov môžeme definovať pojem *jadro grafu*.

Definícia 11.3.3 — Jadro grafu. Nech $G = (V, E)$ je graf. Potom $J \subseteq V$ sa nazýva jadro grafu G, ak je množina J stabilná a zároveň nezávislá.

■ **Príklad 11.13** V prípade prvého grafu (hviezda) z príkladu 11.12 množina $S_1 = \{a\}$ **je** jadrom tohto grafu.
V prípade druhého grafu (cyklus) z príkladu 11.12 množina $S_1 = \{a,d\}$ **je** jadrom daného grafu ale množina $S_2 = \{a,b\}$ **nie je** jadrom daného grafu, pretože nie je nezávislá. ■

O jadre grafu platí nasledujúca veta.

Veta 11.3.1 — O existencii jadra. Každý konečný súvislý graf bez slučiek má jadro.

Dôkaz: spravíme popisom algoritmu konštrukcie jadra grafu. Budeme používať nasledovné označenie. Ak $G = (V,E)$ je daný graf a $M \subseteq V$, tak zápisom $o(M)$ budeme označovať množinu všetkých vrcholov grafu G, ktoré susedia s niektorým vrcholom z množiny M, t. j. $o(M) \subseteq V$.
Algoritmus konštrukcie jadra daného grafu $G = (V,E)$ je nasledovný:

1. Zoberme si ľubovoľný $v_1 \in V$ a položme $J = \{v_1\}$.
2. Ak $o(J) = V \setminus J$, tak J je jadro grafu G a algoritmus STOP.
3. Zvoľme si ľubovoľný $v_i \in V \setminus o(J)$, položme $J := J \cup \{v_i\}$ a ideme na krok 2.

Keďže daný graf je konečný, po konečnom počte krokov dostaneme jadro grafu G.

11.3.3 Víťazná stratégia hry NIM

Skúmajme hru NIM, s pravidlami uvedenými v časti 11.3.1. Je zrejmé, že prehráva ten hráč, ktorý je na ťahu v momente, keď na stole zostala už len 1 zápalka. Ako môže jeho súper dosiahnuť tento stav? Vyhrávajúci hráč musí mať v momente pred svojím posledným ťahom na stole 2 až 11 zápaliek. To sú všetky počty zápaliek, z ktorých sa odobratím 1 až 10 zápaliek vie dostať na konečný počet 1. Pri grafovej reprezentácii hry NIM popísanej v časti 11.3.2 to znamená, že vrchol 1 susedí s vrcholmi 2 až 11. Ak by sme v tejto úvahe postupovali ďalej, tak dostaneme vrcholy grafu, po ktorých sa hráč musí pohybovať, ak chce hru vyhrať.

Hra NIM, s pravidlami uvedenými v časti 11.3.1, má preto vyhrávajúcu stratégiu pre 2. hráča. Tomuto hráčovi stačí, ak bude v každom ťahu odoberať z kôpky toľko zápaliek, aby skončil vo vrcholoch grafu, ktoré sú v nasledujúcom zozname zobrazené čiernou farbou.

$$100,\ 99,\ \ldots,\ 90,\ 89,\ 88,\ \ldots,\ 79,\ 78,\ 77,\ \ldots\ldots\ldots,\ 24,\ 23,\ 22,\ \ldots,\ 13,\ 12,\ 11,\ \ldots,\ 2,\ 1$$

Množina vrcholov $J = \{1,12,23,34,45,56,67,78,89,100\}$ tvorí jadro grafu hry NIM. Tieto vrcholy sú nezávislé a každý vrchol hry NIM, ktorý nepatrí do J, susedí s niektorým vrcholom množiny J. Preto ak 2. hráč skončí svoj ťah v niektorom vrchole množiny J, tak 1. hráč sa nemôže dostať do iného vrcholu množiny J, ale po jeho ťahu sa 2. hráč vždy vie dostať do nasledujúceho vrcholu množiny J. Pre hru s pravidlami uvedenými v časti 11.3.1 spočíva víťazná stratégia pre 2. hráča v pohybovaní sa po vrcholoch takého jadra grafu hry, ktoré obsahuje vrchol 1. A to je práve množina J uvedená vyššie.

Všetky varianty hry NIM sa dajú reprezentovať pomocou grafov a ich víťazná stratégia vždy súvisí s jadrom grafu hry. Hra NIM pritom nie je jediná hra s grafovou reprezentáciou. My sme túto hru použili len ako jednoduchú ukážku takejto kategórie hier na ilustráciu možností aplikácií teórie grafov.

11.4 Cvičenia

Cvičenie 11.1 Zostrojte binárny prehľadávací strom pre množinu Ω pri uvedenom poradí jej prvkov

(a) $\Omega = \{G, V, M, Z, L, A, I, K, F, N, R\}$
(b) $\Omega = \{K, V, C, T, S, M, I, B, N, G, A\}$
(c) $\Omega = \{M, G, S, R, V, C, I, B, O, T\}$
(d) $\Omega = \{H, Y, T, A, L, S, R, K, O, E, X\}$

■

Cvičenie 11.2 Je nasledovné tvrdenie pravdivé? Svoju odpoveď riadne zdôvodnite.

Nech B je binárny strom. Ak pre každý jeho vrchol v je dátová položka vložená do v väčšia, než dátová položka vložená v ľavom synovi vrcholu v a zároveň menšia, než dátová položka vložená v pravom synovi vrcholu v, tak B je prehľadávací binárny strom. ■

Cvičenie 11.3 Pre všetky binárne stromy z cvičenia 5.20 (strana 118) zostavte ich kódy a pomocou nich overte, či sú tieto binárne stromy izomorfné. ■

Cvičenie 11.4 Pre všetky koreňové stromy z cvičenia 5.19 (strana 118) zostavte ich kódy a pomocou nich overte, či sú tieto koreňové stromy izomorfné. ■

Cvičenie 11.5 Pre všetky stromy z cvičenia 5.18 (strana 117) zostavte ich kódy a pomocou nich overte, či sú tieto stromy izomorfné. ■

Cvičenie 11.6 Dokážte, že dva stromy (bez prívlastkov) sú izomorfné práve vtedy, ak majú rovnaký kód skonštruovaný postupom popísaným v časti 11.2.3. ■

Cvičenie 11.7 Dokážte, že ak G je strom, tak jeho vrchol s maximálnou excentricitou je list. ■

Cvičenie 11.8 Dokážte, že vlastnosť „byť centrom grafu“ je invariant. Inak povedané, ak máme dva izomorfné grafy G a G', tak $C(G)$ sa izomorfizmom musí zobraziť na $C(G')$. ■

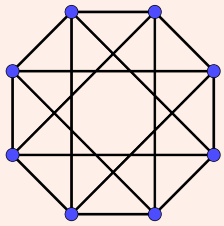
Cvičenie 11.9 V Pythone alebo v C napíšte program, ktorý pre dané dva binárne stromy nájde ich identifikačné kódy a pomocou nich overí, či sú izomorfné. ■

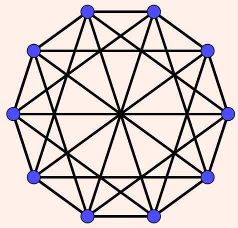
Cvičenie 11.10 V Pythone alebo v C napíšte program, ktorý pre dané dva koreňové stromy nájde ich identifikačné kódy a pomocou nich overí, či sú izomorfné. ■

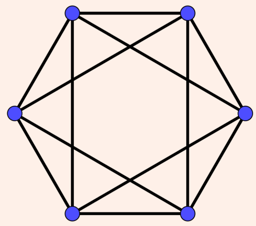
Cvičenie 11.11 V Pythone alebo v C napíšte program, ktorý pre dané dva stromy nájde ich identifikačné kódy a pomocou nich overí, či sú izomorfné. ■

Cvičenie 11.12 Pre ktorého hráča by existovala a ako by vyzerala víťazná stratégia hry NIM (podľa pravidiel z časti 11.3.1), ak by na začiatku hry bolo na stole 150 zápaliek? ■

Cvičenie 11.13 Nájdite nejaké stabilné a nejaké nezávislé množiny vrcholov nasledujúcich grafov tak, aby tieto množiny boli / neboli jadrá daných grafov







■

Cvičenie 11.14 Dokážte, že každý konečný graf bez slučiek má jadro. ■

Cvičenie 11.15 Dvaja hráči hrajú nasledovnú hru

> *Prvý hráč povie číslo od 1 do 10 a potom k tomuto číslu hráči striedavo v každom ťahu pripočítavajú číslo od 1 do 10. Hru vyhráva hráč, ktorý ako prvý dosiahne číslo 100.*

Má táto hra víťaznú stratégiu? Ak áno, pre ktorého hráča a ako vyzerá táto stratégia? ■

Cvičenie 11.16 Zovšeobecnite víťaznú stratégiu hry z cvičenia 11.15, ak hráči v každom ťahu pripočítavajú číslo od 1 po n, kde $n \in \mathbb{N}$ a vyhráva ten hráč, ktorý ako prvý dosiahne hodnotu x, kde $x \in \mathbb{N}$. ■

Cvičenie 11.17 Dokážte, že každá nezávislá množina vrcholov daného grafu G je obsiahnutá v nejakom jeho jadre. ■

Cvičenie 11.18 V Pythone alebo v C napíšte program, ktorý bude proti ľudskému súperovi hrať hru NIM s pravidlami uvedenými v časti 11.3.1. Pritom

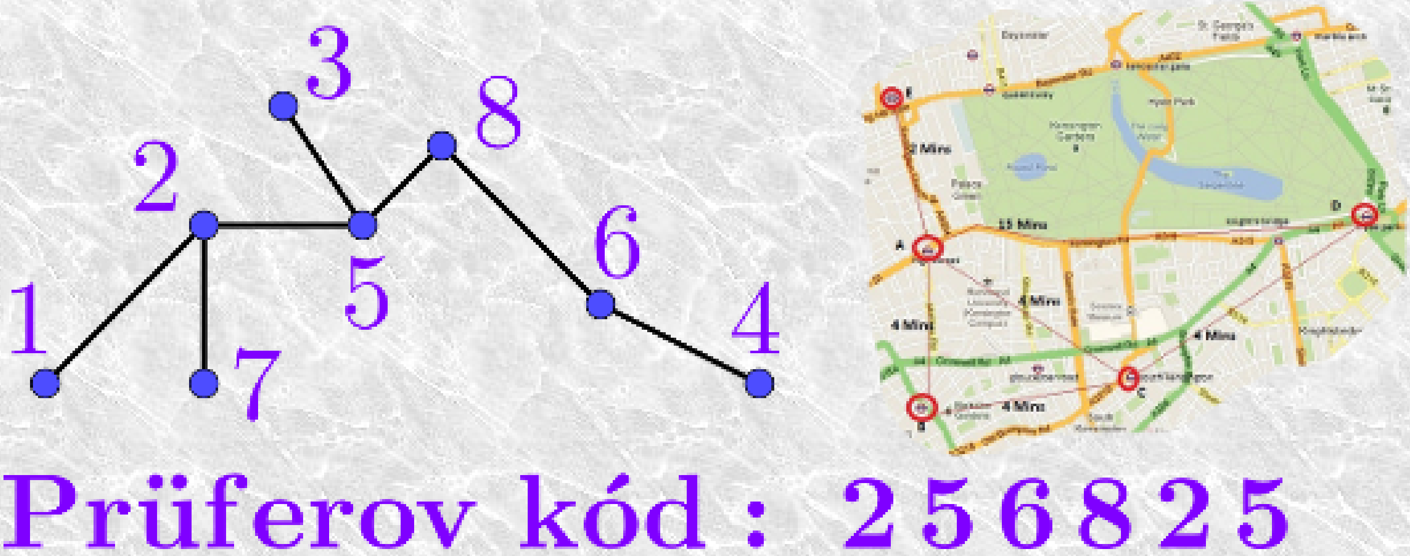
- ▷ počiatočný počet zápaliek v kôpke bude X, kde $X \geq 1$ je prirodzené číslo,
- ▷ hráči budú v každom ťahu hry odoberať z kôpky 1 až N zápaliek, kde $N \geq 1$ je prirodzené číslo,
- ▷ ľudský hráč si, pred začiatkom hry, môže zvoliť či chce hrať ako 1., alebo ako 2. hráč,
- ▷ program bude hrať „inteligentne“, čiže bude sa snažiť hru vyhrať.

■

Cvičenie 11.19 V Pythone alebo v C napíšte program, ktorý bude proti ľudskému súperovi hrať hru popísanú v cvičení 11.15 a zovšeobecnenú v cvičení 11.16. Pritom

- ▷ hráči budú v každom ťahu hry pripočítavať číslo 1 až n, kde $n \in \mathbb{N}$,
- ▷ vyhráva ten hráč, ktorý ako prvý dosiahne číslo x, kde $x \in \mathbb{N}$,
- ▷ ľudský hráč si, pred začiatkom hry, môže zvoliť či chce hrať ako 1., alebo ako 2. hráč,
- ▷ program bude hrať „inteligentne“, čiže bude sa snažiť hru vyhrať.

■



12. Dijkstrov algoritmus, Prüferov kód

12.1 Hľadanie najlacnejšej cesty Dijkstrovým algoritmom

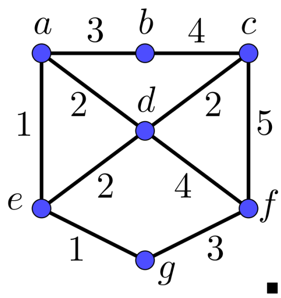
V kapitole 10 boli definované ohodnotené grafy a popísané dva algoritmy hľadania minimálnej kostry ohodnoteného grafu. Problém hľadania minimálnej kostry daného grafu sa v aplikáciach vyskytuje pomerne často, ale ani zďaleka to nie je jediný problém súvisiaci s ohodnotenými grafmi. Iným častým problémom je napríklad hľadanie najlacnejšej cesty medzi dvoma danými vrcholmi, alebo najlacnejšej cesty z daného vrcholu do všetkých ostatných vrcholov.

Už v príklade 10.1 sme hľadali „najkratšiu“, alebo lepšie povedané najlacnejšiu, cestu medzi dvoma vrcholmi. Teraz formálne definujeme pojmy *hodnota sledu* a *najlacnejšia cesta*.

Definícia 12.1.1 — Hodnota sledu. Hodnotou sledu v ohodnotenom grafe, nazývame súčet ohodnotení všetkých hrán daného sledu.

P Spomeňme si, že podľa definície 3.3.3 je každá cesta zároveň ťah a každý ťah je zároveň sled, takže predošlá definícia sa rovnako týka aj ťahov a ciest. V prevažnej väčšine praktických aplikácií nás budú zaujímať práve cesty.

■ Príklad 12.1



Hodnota sledu $s = (a,b,c,f,d,e)$ v grafe, ktorý vidíme na obrázku vpravo, je $3+4+5+4+2 = 18$. ■

Keď budeme hľadať sled s najmenšou hodnotou medzi dvoma danými vrcholmi grafu G, tak sa vždy bude jednať o taký ohodnotený graf, ktorého všetky ohodnotenia sú kladné čísla. Pre graf, v ktorom by mali hrany aj záporné ohodnotenia, úloha hľadania sledu s najmenšou hodnotou väčšinou nemá zmysel, pretože hodnota sledu v takých grafoch môže byť zdola neohraničená. Preto vo všetkých úlohach, v ktorých pôjde o hľadanie sledu s najmenšou hodnotou, budeme uvažovať len grafy s kladnými ohodnoteniami.

Okrem toho, ak hľadáme sled s najmenšou hodnotou, tak vždy sa bude jednať o cestu. Každá cesta je zároveň sled, v ktorom sa neopakujú hrany ani vrcholy. Triviálne sa dá dokázať tvrdenie, že ak má sled medzi vrcholmi u a v v ohodnotenom grafe grafe G najmenšiu možnú hodnotu, tak potom sa v ňom žiadne hrany ani vrcholy neopakujú. Viď cvičenie 12.1.

Definícia 12.1.2 — Najlacnejšia cesta. Cesta z vrcholu u do vrcholu v, ktorá má najmenšiu hodnotu, sa nazýva najlacnejšia cesta z u do v.

P V úlohách, v ktorých ohodnotenia hrán grafov budú zodpovedať vzdialenostiam alebo dĺžkam, napríklad grafy dopravnej siete, budeme niekedy hovoriť aj *najkratšej* ceste, prípadne *najmenšej vzdialenosti* medzi vrcholmi, tak ako sme to robili v príklade 10.1. Inak budeme vždy hovoriť o najlacnejšej ceste a ceste s najmenšou hodnotou medzi dvoma vrcholmi.

■ **Príklad 12.2** V grafe z príkladu 12.1 má cesta s najmenšou hodnotou (najkratšia cesta) z vrcholu a do vrcholu c hodnotu (dĺžku) 4 a je to cesta (a,d,c). ■

Úloha nájdenia najlacnejšej cesty medzi danými dvoma vrcholmi v ohodnotenom grafe sa veľmi často vyskytuje v rôznych aplikáciach. Existuje algoritmus, ktorý v ohodnotenom grafe nájde najlacnejšiu cestu medzi dvoma jeho vrcholmi. Jeho autorom je holandský matematik Edsger W. Dijkstra. Existuje viacero modifikácií Dijkstrovho algoritmu. Popis Dijkstrovho algoritmu nájdeme napríklad v [15], [7], alebo [18] a samozrejme nájdeme ho aj na webe, napríklad vo Wikipedii[1]. Vo svojej základnej verzii Dijkstrov algoritmus nájde, pre daný ohodnotený graf G a v ňom pevne určený vrchol v, dĺžky najlacnejších ciest od vrcholu v ku všetkým ostatným vrcholom v grafe G. My tu uvedieme drobnú modifikáciu Dijkstrovho algoritmu, ktorá nám okrem dĺžok najlacnejších ciest od vrcholu v umožní tieto cesty aj jednoducho skonštruovať.

12.1.1 Popis Dijkstrovho algorimu

Pri hľadaní najlacnejšej cesty sa stačí zaoberať obyčajnými grafmi, pretože slučky sa v najlacnejších cestách určite vyskytovať nebudú (viď cvičenie 12.2). Preto, ak by daný graf obsahoval slučky, môžeme tieto vynechať. A ak by daný graf obsahoval násobné hrany medzi dvoma vrcholmi, tak stačí brať do úvahy len hranu s najmenšou hodnotou a všetky ostatné hrany medzi týmito dvoma vrcholmi môžeme vynechať.

Majme teda ohodnotený obyčajný graf $G=(V,E)$, v ktorom sú všetky ohodnotenia hrán kladné a pevne daný vrchol v v tomto grafe. Dijkstrov algoritmus nám určí najlacnejšiu cestu medzi každým vrcholom grafu G a vrcholom v. Algoritmus bude každému vrcholu $u \in V$ priraďovať značky. Tieto značky budú najskôr dočasné a potom trvalé. V oboch prípadoch bude mať značka tvar $\big(L(u),\mathbb{P}(u)\big)$. Hodnota $L(u)$ predstavuje pri dočasnej značke momentálne odhadovanú „najmenšiu“ hodnotu cesty medzi vrcholom u a vrcholom v. V prípade trvalej značky je to hodnota najlacnejšej cesty medzi vrcholom u a vrcholom v. Kým má niektorý vrchol len dočasnú značku, tak táto sa môže ešte meniť. Akonáhle je niektorému vrcholu priradená trvalá značka, táto sa už meniť nebude. Množina $\mathbb{P}(u)$ v značke vrcholu sa v pôvodnom Dijkstrovom algoritme nevyskytuje. Je to práve tá modifikácia, ktorá nám po skončení algoritmu umožní skonštruovať najlacnejšie cesty od každého vrcholu grafu G do vrcholu v. Množina $\mathbb{P}(u)$ bude v trvalej značke obsahovať všetkých susedov vrcholu u na cestách s najmenšou hodnotou vedúcich z vrcholu u do vrcholu v.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Dijkstra's_algorithm

P V popise Dijkstrovho algoritmu budeme používať tieto označenia

- ▷ $G = (V,E)$ – ohodnotený obyčajný graf, ktorého všetky ohodnotenia hrán sú kladné,
- ▷ V – množina všetkých vrcholov grafu G,
- ▷ $w(h)$ – ohodnotenie hrany h v grafe G,
- ▷ $\mathbb{A}$ – množina „aktívnych“ vrcholov grafu G, čiže tých, ktoré ešte nemajú trvalú značku.

Dijkstrov algoritmus

VSTUP: Ohodnotený obyčajný graf graf $G = (V,E)$ a vrchol $v \in V$.

VÝSTUP: Pre $\forall u \in V$ trvalá značka $\big(L(u), \mathbb{P}(u)\big)$.

INICIALIZÁCIA

$\mathbb{A} := V$;
for $\big\{\, \forall u \in V \,\big\}$ **do**
  $L(u) := \infty$;
  $\mathbb{P}(u) := \{u\}$;
end
$L(v) := 0$;
$\mathbb{P}(v) := \{v\}$;

PRIDEĽOVANIE ZNAČIEK VRCHOLOM

while $\big\{\, \exists x \in \mathbb{A};\ L(x) < \infty \,\big\}$ **do**
  $\delta := \min\{L(u);\ u \in \mathbb{A}\}$;
  $\mathbb{N} := \{u \in \mathbb{A};\ L(u) = \delta\}$;
  $\mathbb{A} := \mathbb{A} \setminus \mathbb{N}$;
  for $\big\{$ *pre každú hranu* $h = \{u,x\}$, *kde* $u \in \mathbb{N}$ *a* $x \in \mathbb{A}$ $\big\}$ **do**
    if $\big\{\, L(x) = L(u) + w(h) \,\big\}$ **then**
      $\mathbb{P}(x) := \mathbb{P}(x) \cup \{u\}$;
    end
    if $\big\{\, L(x) > L(u) + w(h) \,\big\}$ **then**
      $L(x) := L(u) + w(h)$;
      $\mathbb{P}(x) := \{u\}$;
    end
  end
end

V pseudokóde Dijkstrovho algoritmu uvedenom vyššie je podmienka ukončenia algoritmu $\forall x \in \mathbb{A} :\ L(x) = \infty$. Znamená to, že buď $\mathbb{A} = \emptyset$, alebo sú všetky vrcholy množiny $\mathbb{A}$ nedosiahnuteľné z vrcholu v. V prípade súvislého grafu G môže nastať len prípad $\mathbb{A} = \emptyset$. Po skončení Dijkstrovho algoritmu má každý vrchol grafu G značku $\big(L(u), \mathbb{P}(u)\big)$, kde $L(u)$ je hodnota najlacnejšej cesty medzi vrcholmi u a v a množina $\mathbb{P}(u)$ obsahuje zoznam všetkých susedov vrcholu u, na cestách s najmenšou hodnotou vedúcich z vrcholu u do vrcholu v. Uvedený algoritmus sa dá triviálne modifikovať aj pre orientované ohodnotené grafy.

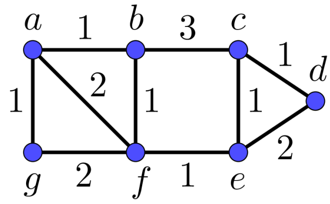
Dôkaz správnosti Dijkstrovho algoritmu sa robí matematickou indukciou a môžeme ho nájsť napríklad v knihe [15]. Slovný popis Dijkstrovho algoritmu je nasledovný:

1. Prvým krokom algoritmu je inicializácia.
   - Množina $\mathbb{A}$ bude obsahovať všetky vrcholy grafu $G = (V, E)$.
   - Pre každý vrchol $u \in V$ bude $\mathbb{P}(u) = \{u\}$.
   - Pre každý vrchol $u \in V$, $u \neq v$ bude $L(u) = \infty$.
   - Pre vrchol v bude $L(v) = 0$.
2. Podmienka ukončenia algoritmu je $\forall x \in \mathbb{A} : L(x) = \infty$, čiže ak $\exists x \in \mathbb{A} : L(x) < \infty$, algoritmus pokračuje.
3. Druhým krokom algoritmu je voľba množiny $\mathbb{N}$ a úprava množiny $\mathbb{A}$.
   - Spomedzi vrcholov $x \in \mathbb{A}$ nájdeme minimálnu hodnotu $L(x)$ a označíme ju δ.
   - Do množiny $\mathbb{N}$ dáme všetky vrcholy $x \in \mathbb{A}$, pre ktoré $L(x) = \delta$.
   - Z množiny $\mathbb{A}$ vyhodíme vrcholy patriace do množiny $\mathbb{N}$.
4. Ďalším krokom algoritmu je úprava dočasných a prideľovanie trvalých značiek vrcholom.
   - Nájdeme všetky hrany $h = \{u, x\}$, ktorých koncový vrchol u patrí do množiny $\mathbb{N}$ a koncový vrchol x patrí do množiny $\mathbb{A}$. Budeme upravovať značky vrcholov x.
   - Ak platí $L(x) = L(u) + w(h)$, znamená to, že z vrcholu x sa cez vrchol u dostaneme do vrcholu v cestou rovnakej hodnoty ako má doteraz najlacnejšia nájdená cesta. Takže hodnotu $L(x)$ meniť netreba. Ale do množiny $\mathbb{P}(x)$ pridáme vrchol u ako počiatočný vrchol alternatívnej najlacnejšej cesty do vrcholu v.
   - Ak platí $L(x) > L(u) + w(h)$, tak z vrcholu x do vrcholu v sa vieme dostať cez vrchol u lacnejšou cestou, než sme našli doteraz. Preto zmeníme hodnoty $L(x)$ aj $\mathbb{P}(x)$.
   - Návrat na test podmienky ukončenia algoritmu (2. bod).

Použitie Dijkstrovho algoritmu si teraz ilustrujeme na niekoľkých príkladoch.

■ **Príklad 12.3**

V ohodnotenom grafe, ktorý je na obrázku vpravo, nájdite hodnoty najlacnejších ciest z vrcholu a do všetkých ostatných vrcholov a všetky najlacnejšie cesty z vrcholu a do vrcholu d.



Priebeh Dijkstrovho algoritmu budeme zapisovať do tabuľky. Pokiaľ sa v niektorom kroku značka vrcholu nebude meniť, tak do príslušného políčka zapíšeme —. Trvalé značky vrcholov budú označené modrou farbou a vrcholmi, ktoré už majú pridelenú trvalú značku, sa nemusíme viac zaoberať.

	a	b	c	d	e	f	g
1.	$(0, \{a\})$	$(\infty, \{b\})$	$(\infty, \{c\})$	$(\infty, \{d\})$	$(\infty, \{e\})$	$(\infty, \{f\})$	$(\infty, \{g\})$
2.	$(0, \{a\})$	$(1, \{a\})$	—	—	—	$(2, \{a\})$	$(1, \{a\})$
3.		$(1, \{a\})$	$(4, \{b\})$	—	—	$(2, \{a, b\})$	$(1, \{a\})$
4.			—	—	$(3, \{f\})$	$(2, \{a, b\})$	
5.			$(4, \{b, e\})$	$(5, \{e\})$	$(3, \{f\})$		
6.			$(4, \{b, e\})$	$(5, \{c, e\})$			
7.				$(5, \{c, e\})$			

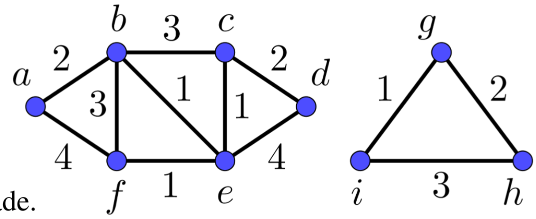
Hodnoty najlacnejších ciest z vrcholu a do všetkých ostatných vrcholov grafu odčítame z trvalých značiek vrcholov. Napríklad najlacnejšia cesta do vrcholu c má hodnotu 4 a najlacnejšia cesta do vrcholu e má hodnotu 3. Ak chceme nájsť najlacnejšie cesty medzi vrcholom a a vrcholom d, tak začneme vo vrchole d, z jeho značky odčítame predposledný vrchol na najlacnejšej ceste, ideme do tohto vrcholu a opäť z jeho značky odčítame ďalší vrchol cesty atď. Takže najlacnejšie cesty medzi vrcholmi a a d sú

$$d \leftarrow \begin{cases} c \leftarrow \begin{cases} b \leftarrow a \\ e \leftarrow f \leftarrow \begin{cases} a \\ b \leftarrow a \end{cases} \end{cases} \\ e \leftarrow f \leftarrow \begin{cases} a \\ b \leftarrow a \end{cases} \end{cases}$$

Z obrázku vidíme, že existuje 5 najlacnejších ciest z vrcholu a do vrcholu d. Sú to cesty (a,b,c,d), (a,f,e,c,d), (a,b,f,e,c,d), (a,f,e,d) a (a,b,f,e,d). Všetkých päť ciest má hodnotu 5. ■

■ **Príklad 12.4**

V ohodnotenom grafe, ktorý je na obrázku vpravo, nájdite hodnoty najlacnejších ciest z vrcholu a do všetkých ostatných vrcholov a najlacnejšie cesty z vrcholu a do vrcholu d.



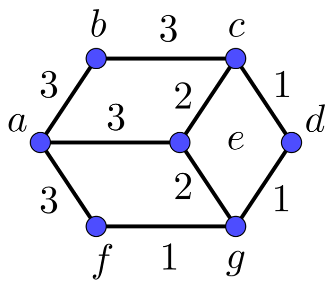
Postupovať budeme rovnako ako v predošlom príklade.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1.	$(0,\{a\})$	$(\infty,\{b\})$	$(\infty,\{c\})$	$(\infty,\{d\})$	$(\infty,\{e\})$	$(\infty,\{f\})$	$(\infty,\{g\})$	$(\infty,\{h\})$	$(\infty,\{i\})$
2.	$(0,\{a\})$	$(2,\{a\})$	—	—	—	$(4,\{a\})$	—	—	—
3.		$(2,\{a\})$	$(5,\{b\})$	—	$(3,\{b\})$	—	—	—	—
4.			$(4,\{e\})$	$(7,\{e\})$	$(3,\{b\})$	$(4,\{a,e\})$	—	—	—
5.			$(4,\{e\})$	$(6,\{c\})$		$(4,\{a,e\})$	—	—	—
6.				$(6,\{c\})$			—	—	—

Algoritmus v 6. kroku skončil, pretože v aktívnej množine zostali už len vrcholy x so značkou $L(x) = \infty$. To znamená, že tieto vrcholy sú z vrcholu a nedosiahnuteľné. Najlacnejšia cesta z vrcholu a do vrcholu d je len jedna. Je to cesta $d \leftarrow c \leftarrow e \leftarrow b \leftarrow a$. ■

■ **Príklad 12.5**

V ohodnotenom grafe, ktorý je na obrázku vpravo, nájdite hodnoty najlacnejších ciest z vrcholu a do všetkých ostatných vrcholov a najlacnejšie cesty z vrcholu a do vrcholu d.



Postupovať budeme rovnako ako v predošlých príkladoch.

	a	b	c	d	e	f	g
1.	$(0,\{a\})$	$(\infty,\{b\})$	$(\infty,\{c\})$	$(\infty,\{d\})$	$(\infty,\{e\})$	$(\infty,\{f\})$	$(\infty,\{g\})$
2.	$(0,\{a\})$	$(3,\{a\})$	—	—	$(3,\{a\})$	$(3,\{a\})$	—
3.		$(3,\{a\})$	$(5,\{e\})$	—	$(3,\{a\})$	$(3,\{a\})$	$(4,\{f\})$
4.			—	$(5,\{g\})$			$(4,\{f\})$
5.			$(5,\{e\})$	$(5,\{g\})$			

Najlacnejšia cesta z vrcholu a do vrcholu d je len jedna. Je to cesta $d \leftarrow g \leftarrow f \leftarrow a$ a má dĺžku 5. ■

12.2 Problém obchodného cestujúceho

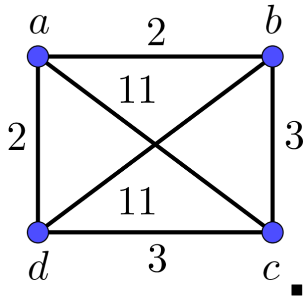
Problém obchodného cestujúceho je podobný problému hamiltonovského cyklu. Je to v podstate problém nájdenia najlacnejšieho hamiltonovského cyklu v ohodnotenom grafe. Rovnako ako problém existencie hamiltonovského cyklu v danom grafe, vznikol aj problém obchodného cestujúceho už v 19. storočí a súvisí s čiste praktickým problémom. Máme niekoľko miest, medzi nimi sú cesty. Tieto cesty sú rôznej dĺžky a kvality a obchodný cestujúci má prejsť všetkými mestami. Aby šetril čas a náklady na cestu, chce prejsť každým mestom práve raz.

Situáciu si môžeme opäť modelovať grafom. Mestám budú zodpovedať vrcholy grafu a cestám budú zodpovedať hrany grafu. Dĺžka ciest, časová náročnosť ciest, alebo cestovné náklady zodpovedajúce jednotlivým cestám budú vyjadrené ohodnotením hrán grafu. Tým sa problém obchodného cestujúceho transformuje na problém hľadania najlacnejšieho hamiltonovského cyklu v ohodnotenom grafe. Úlohou je nájsť najlacnejší, v zmysle dĺžky, dopravných nákladov, času, alebo ďalších kritérií vyjadrených ohodnotením hrán, hamiltonovský cyklus.

Keďže už samotný problém existencie hamiltonovského cyklu v neohodnotenom grafe je NP-úplný, je taký aj problém obchodného cestujúceho. To znamená, že vo všeobecnosti neexistuje jeho efektívne riešenie. Existuje však celá rada heuristík, pomocou ktorých sa tento problém dá riešiť. Pri malom počte miest, hrán a vhodných ohodnoteniach, je riešenie pomerne jednoduché. Ukážeme si to na príklade.

■ Príklad 12.6

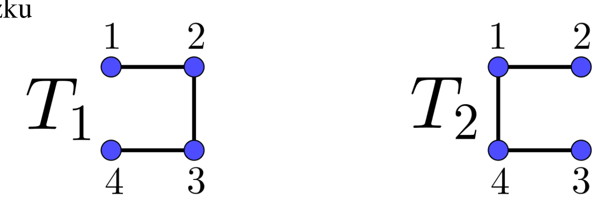
Problém obchodného cestujúceho budeme riešiť na grafe z obrázku vpravo. Cyklus $c = (a,b,c,d)$ je hamiltonovský cyklus v danom grafe a jeho hodnota je 10. Akýkoľvek cyklus obsahujúci hrany $\{a,c\}$, alebo $\{b,d\}$, ktoré majú dĺžku 11, by mal väčšiu hodnotu. Vidíme teda, že cyklus dĺžky 10 je najlacnejší možný. Preto bude cyklus c riešením problému obchodného cestujúceho v danom grafe.



■

12.3 Prüferov kód

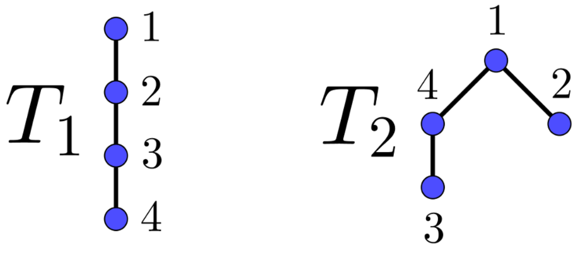
Prüferov kód je efektívny spôsob kódovania očíslovaných stromov. Pod *očíslovaným stromom* rozumieme strom, ktorého vrcholy sú označené číslami[2]. Napríklad očíslované stromy T_1 a T_2 na nasledovnom obrázku



sú rôzne, aj keď ako grafy sú izomorfné. Očíslovaný strom si môžeme predstaviť ako koreňový strom, ktorého koreň je vždy vrchol 1. Stromu T_1 a T_2 sa potom dajú nakresliť aj tak, ako to vidíme na obrázku 12.1 (strana 235). Pri takejto interpretácii môžu mať aj dva izomorfné grafy úplne odlišnú podobu, ako to vidno z uvedeného príkladu.

Pomocou Prüferovho kódu vieme každý očíslovaný strom na n vrcholoch, jednoznačne reprezentovať postupnosťou $(p_1, p_2, \ldots, p_{n-2})$, čiže ako usporiadanú $(n-2)$-ticu. Uvedieme si pseudokódy dvoch algoritmov. Pomocou prvého algoritmu budeme z daného očíslovaného stromu vytvárať

[2]Niekedy sa namiesto čísel používajú aj písmená, alebo akékoľvek iné symboly s daným lineárnym usporiadaním. V anglickej terminológii sa očíslovaný strom označuje ako *„labeled tree"* a v slovenskej terminológii sa občas používa aj pojem *„označený strom"*.



Obr. 12.1: Očíslované stromy

Prüferov kód a pomocou druhého algoritmu, budeme z daného Prüferovho kódu rekonštruovať pôvodný strom. V definícii 4.2.3 (strana 77) bol definovaný pojem *list* (stromu). V pseudokóde algoritmu na konštrukciu Prüferovho kódu budeme používať funkciu $\texttt{sused}\,(i)$, ktorá nám pre list so značkou i vráti značku jeho suseda. Keďže list je vrchol stromu, ktorého stupeň je 1, je táto funkcia dobre definovaná. Okrem toho budeme používať aj operáciu $\uplus$, ktorá nám pridá jeden prvok na koniec už vytvorenej postupnosti. Napríklad:

$$(2,6,1,3,4) \biguplus 7 = (2,6,1,3,4,7)\,.$$

Konštrukcia Prüferovho kódu z daného očíslovaného stromu je veľmi jednoduchá. V každom kroku algoritmu nájdeme v strome list s najmenšou značkou, do kódu pridáme značku jeho suseda a tento list potom z pôvodného stromu odtrhneme aj s hranou, ktorá s ním inciduje. Toto opakujeme dovtedy, kým nám z pôvodného stromu nezostane len cesta dĺžky 1, t. j. len jedna hrana. Pseudokód algoritmu vytvárania Prüferovho kódu z očíslovaného stromu vyzerá takto

Prüferov kód z očíslovaného stromu

VSTUP: Očíslovaný strom $T = (V,E)$, kde $V = \{1,\ldots,n\}$.

VÝSTUP: Postupnosť $P = \{p_1,\ldots,p_{n-2}\}$, kde $\forall p_i : p_i \in \{1,\ldots,n\}$.

INICIALIZÁCIA

$P := ()$;

VYTVÁRANIE PRÜFEROVHO KÓDU STROMU T

while $\big\{\, |P| < (n-2) \,\big\}$ **do**

  $i := \min\big\{\, x;\ x$ je list aktuálneho stromu $T \,\big\}$;

  $P := P \uplus \texttt{sused}\,(i)$;

  MODIFIKÁCIA STROMU T

  $V := V \setminus \{i\}$;

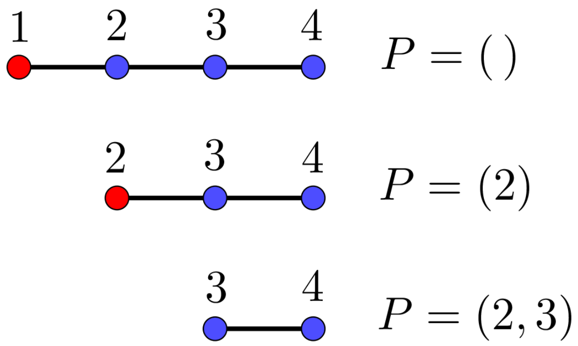
  $E := E \setminus \{i, \texttt{sused}\,(i)\}$;

end

Tvorbu Prüferovho kódu z očíslovaného stromu si ilustrujeme na príkladoch.

■ **Príklad 12.7** Nájdite Prüferov kód očíslovaného stromu T_1 z obrázku 12.1 (strana 235).

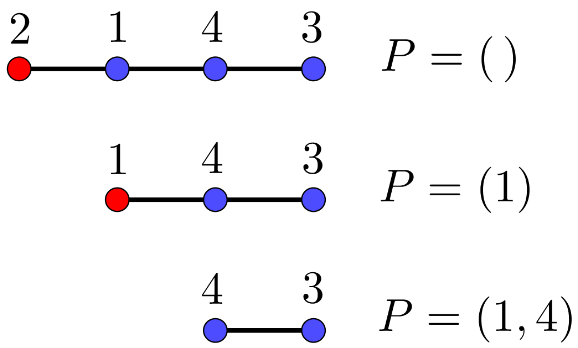
Riešenie: Strom T_1 má 4 vrcholy, takže bude mať dvojciferný Prüferov kód. Postup jeho tvorby je zobrazený na nasledovnom obrázku



List s najmenšou značkou je 1, takže prvou číslicou kódu bude značka jeho suseda, čo je 2. Potom vrchol 1, aj so s ním incidujúcou hranou, odtrhneme a pokračujeme ďalej. V druhom kroku je list s najmenšou značkou 2, takže druhá číslica kódu bude značka jeho suseda, čo je 3. Vrchol 2, aj so s ním incidujúcou hranou, odtrhneme a keďže nám zostala už len jedna hrana, skončili sme. Prüferov kód grafu T_1 z obrázku 12.1 je $P = (2,3)$. ■

■ **Príklad 12.8** Nájdite Prüferov kód očíslovaného stromu T_2 z obrázku 12.1 (strana 235).

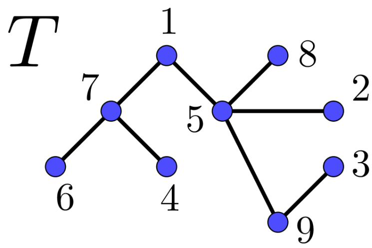
Riešenie: Strom T_2 má 4 vrcholy, takže bude mať dvojciferný Prüferov kód. Postup jeho tvorby je zobrazený na nasledovnom obrázku



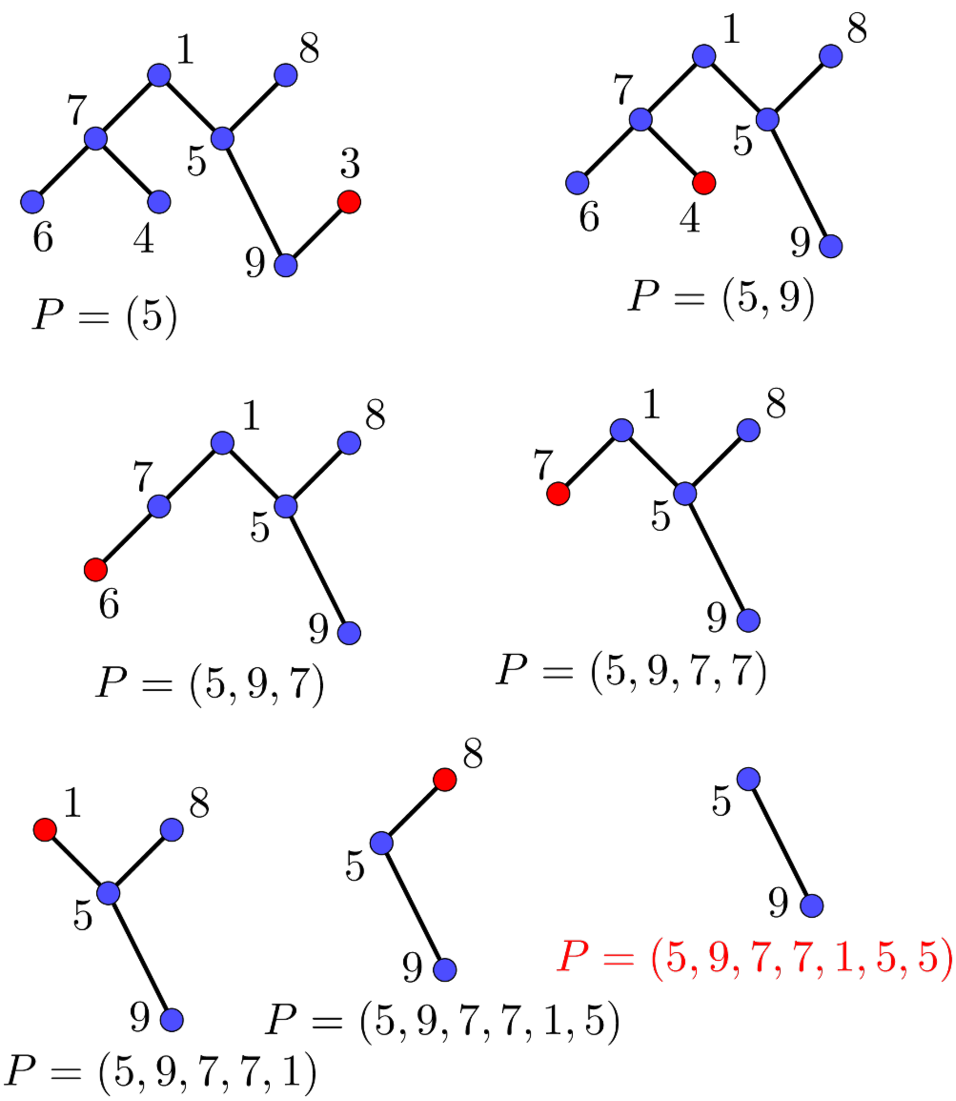
List s najmenšou značkou je 2, takže prvou číslicou kódu bude značka jeho suseda, čo je 1. Potom vrchol 2 aj so s ním incidujúcou hranou odtrhneme a pokračujeme ďalej. V druhom kroku je list s najmenšou značkou 1, takže druhá číslica kódu bude značka jeho suseda, čo je 4. Vrchol 1, aj so s ním incidujúcou hranou, odtrhneme a keďže nám zostala už len jedna hrana, skončili sme. Prüferov kód grafu T_2 z obrázku 12.1 je $P = (1,4)$. ■

Na predošlých dvoch príkladov sme videli, že dva rôzne očíslované stromy, aj keď sú izomorfné, majú rôzne Prüferové kódy. Tvorbu Prüferovho kódu si ilustrujeme ešte na jednom príklade.

■ **Príklad 12.9** Nájdite Prüferov kód očíslovaného stromu T z nasledujúceho obrázku



<u>Riešenie:</u> Daný strom má 9 vrcholov, a preto jeho Prüferov kód bude usporiadaná sedmica. Postup riešenia máme zobrazený na nasledovnej sérii obrázkov. Séria sa začína stromom, ktorý už má odtrhnutý vrchol 2 a s ním incidujúcu hranu. Listy stromu T budeme postupne trhať v poradí



Obr. 12.2: Postup konštrukcie Prüferovho kódu stromu z príkladu 12.9

$2,3,4,6,7,1,8$. Samozrejme nie všetky uvedené vrcholy sú listy pôvodného stromu T. Vrcholy 7 a 1 sa stanú listami až po odtrhnutí niektorých vrcholov pôvodného stromu. Výsledný Prüferov kód očíslovaného stromu T je usporiadaná sedmica $P = (5,9,7,7,1,5,5)$. ■

V ďalšom si ukážeme ako z $(n-2)$ číselného Prüferovho kódu zrekonštruujeme pôvodný n vrcholový očíslovaný strom. Najskôr si musíme uvedomiť dva fakty

1. Ak je Prüferov kód usporiadaná $(n-2)$-tica, tak pôvodný strom má n vrcholov so značkami $\{1,\dots,n\}$.
2. Pre všetky $i \in \{1,\dots,n\}$, ktoré sa nenachádzajú v Prüferovom kóde, je i značka listu pôvodného stromu.

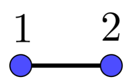
Pri rekonštrukcii očíslovaného stromu z Prüferovho kódu budeme postupovať presne opačným spôsobom, ako pri vytváraní Prüferovho kódu z očíslovaného stromu. Celý postup si najskôr ilustrujeme na príkladoch a až potom si zapíšeme pseudokód rekonštrukčného algoritmu. Budeme rekonštruovať očíslované stromy z príkladov 12.7, 12.8 a 12.9. Podrobný popis postupu rekonštrukcie uvedieme v texte príkladov.

■ **Príklad 12.10** Zrekonštruujte očíslovaný strom, ktorého Prüferov kód je $P=(2,3)$.

Riešenie: Prüferov kód je usporiadaná dvojica, takže pôvodný strom má 4 vrcholy so značkami $\{1,2,3,4\}$. Pri rekonštrukcii pôvodného očíslovaného stromu budeme používať pomocnú množinu M. Túto množinu budeme zapisovať ako usporiadanú k-ticu a jej prvky budeme písať vždy v lexikografickom usporiadaní. Na začiatku bude množina M obsahovať[3] všetky listy pôvodného stromu, čiže $M=(1,\dots,n)\setminus P$, kde $P=(p_1,\dots,p_{n-2})$ je Prüferov kód. Okrem toho budeme pracovať s množinou L, do ktorej budeme postupne pridávať „listy“, ktoré sme už spojili hranou so s nimi susediacimi vrcholmi. Úvodzovky sú v predošlej vete použité preto, lebo nie všetky vrcholy z množiny L budú listami pôvodného očíslovaného stromu. Viď poznámka v riešení príkladu 12.9. Na začiatku bude množina L prázdna. Postup rekonštrukcie budeme písať po jednotlivých krokoch. Vždy si uvedieme aktuálny stav množín P, M a L a následne obrázok aktuálne zrekonštruovaného stromu.

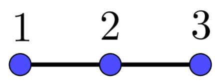
▷ **0. krok**
$P=(2,3)\qquad L=()\qquad M=(1,2,3,4)\setminus(2,3)=(1,4)$
List, ktorý bude spojený s vrcholom so značkou 2, čo je prvé číslo v Prüferovom kóde, musí byť list pôvodného stromu, ktorý mal najmenšiu značku. Čiže prvý vrchol z množiny M. V ďalšom kroku teda spojíme hranou vrcholy 1 a 2, vrchol 1 pridáme do množiny L, vrchol 2 vyhodíme z Prüferovho kódu P a novú množinu M dostaneme ako $M=(1,2,3,4)\setminus\big(P\cup L\big)$. List, ktorý budeme spájať s ďalším vrcholom z Prüferovho kódu, musí byť vrchol s najmenšou značkou, ktorá sa nenachádza v aktuálnom Prüferovom kóde, ani medzi „listami“, ktoré sme už spojili s ich susedom.

▷ **1. krok**
$P=(3)\qquad L=(1)\qquad M=(1,2,3,4)\setminus\big((3)\cup(1)\big)=(2,4)$



S vrcholom 3, čo je momentálne prvé číslo v Prüferovom kóde, bude spojený vrchol so značkou 2, pretože je to najmenšia značka, ktorá sa nenachádza ani v aktuálnom Prüferovom kóde, ani medzi už použitými listami.

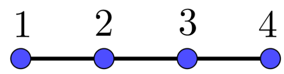
▷ **2. krok**
$P=()\qquad L=(1,2)\qquad M=(1,2,3,4)\setminus\big(\emptyset\cup(1,2)\big)=(3,4)$



Teraz už máme Prüferov kód prázdny. Je ale zrejmé, že z pôvodného stromu nám ešte chýba jedna hrana, čo je hrana, ktorá zostala po skončení tvorby Prüferovho kódu. Jeden vrchol tejto hrany musí byť posledné číslo, ktoré sa nachádzalo v Prüferovom kóde, čiže 3. A druhý vrchol tejto hrany je vrchol z množiny M, ktorý má najmenšiu značku rôznu od 3. Takže bude to vrchol 4.

[3] Nasledujúci zápis používa symbol odčítania množín, ale M aj P sú usporiadané množiny. Tejto drobnej nezrovnalosti sme si vedomí. Pri odčítaní budeme s M a P pracovať ako s množinami.

▷ **3. krok**
V poslednom kroku už len spojíme vrchol, ktorý bol ako posledný v Prüferovom kóde, s najmenším, od neho rôznym vrcholom v poslednej množine M.



■

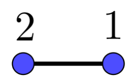
Na predošlom príklade sme videli, že v poslednom kroku rekonštrukcie stromu, pridávame hranu, ktorá nám ako posledná zostala pri tvorbe Prüferovho kódu. Jedným vrcholom tejto hrany musí byť posledný vrchol, uvedený v Prüferovom kóde. V ďalších príkladoch preto budeme zapisovať množinu P tak, že jej posledný prvok zopakujeme dvakrát, čo nám zjednotí popis rekonštrukčného algoritmu pre všetky kroky, vrátane toho posledného. Čiže Prüferov kód P budeme zapisovať takto $P = (p_1, \ldots, p_{n-2}, \boldsymbol{p_{n-2}})$. Okrem toho pre väčšiu prehľadnosť už nebudeme písať ako sme dostali aktuálnu množinu M, čiže $M = (1, \ldots, n) \setminus (P \cup L)$, ale len jej výslednú podobu.

■ **Príklad 12.11** Zrekonštruujte očíslovaný strom, ktorého Prüferov kód je $P = (1,4)$.

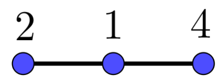
Riešenie: Prüferov kód je usporiadaná dvojica, takže pôvodný strom má 4 vrcholy so značkami $\{1,2,3,4\}$. Postup riešenia bude rovnaký ako v predošlom príklade a opäť ho budeme zapisovať po krokoch.

▷ **0. krok**
$P = (1,4,\mathbf{4})$ $L = ()$ $M = (2,3)$
V ďalšom kroku spojíme vrcholy 2 a 1.

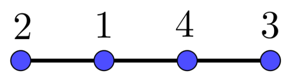
▷ **1. krok**
$P = (4,\mathbf{4})$ $L = (2)$ $M = (1,3)$
V ďalšom kroku spojíme vrcholy 1 a 4.



▷ **2. krok**
$P = (\mathbf{4})$ $L = (2,1)$ $M = (3)$
V ďalšom kroku spojíme vrcholy 3 a 4.



▷ **3. krok**
Po pridaní poslednej hrany, spojením vrcholov 3 a 4, sme dostali pôvodný očíslovaný strom.



■

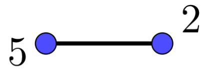
■ **Príklad 12.12** Zrekonštruujte očíslovaný strom, ktorého Prüferov kód je $P = (5,9,7,7,1,5,5)$.

Riešenie: Prüferov kód je usporiadaná sedmica, takže pôvodný strom má 9 vrcholov so značkami $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Na začiatku rekonštrukcie budeme mať množinu $P = (5,9,7,7,1,5,5,\mathbf{5})$, množina L bude prázdna a aktuálnu množinu M dostaneme vždy ako $M = (1,\ldots,9) \setminus (P \cup L)$. V každom kroku spojíme a, prvý vrchol množiny M, s vrcholom b, prvým vrcholom množiny P. Potom vrchol a pridáme do množiny L, vrchol b vyhodíme z množiny P a určíme si novú množinu M. Jednotlivé kroky budú vyzerať takto

▷ **0. krok**
$P = (5,9,7,7,1,5,5,\mathbf{5})$ $L = ()$ $M = (2,3,4,6,8)$
V ďalšom kroku spojíme vrcholy 2 a 5.

▷ **1. krok**

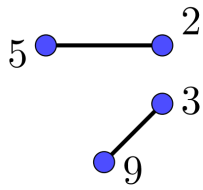
$P = (9,7,7,1,5,5,\mathbf{5})$ $\quad L = (2)$ $\quad M = (3,4,6,8)$



V ďalšom kroku spojíme vrcholy 3 a 9.

▷ **2. krok**

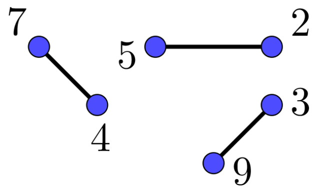
$P = (7,7,1,5,5,\mathbf{5})$ $\quad L = (2,3)$ $\quad M = (4,6,8,9)$



V ďalšom kroku spojíme vrcholy 4 a 7.

▷ **3. krok**

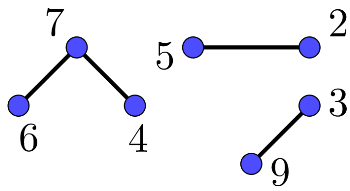
$P = (7,1,5,5,\mathbf{5})$ $\quad L = (2,3,4)$ $\quad M = (6,8,9)$



V ďalšom kroku spojíme vrcholy 6 a 7.

▷ **4. krok**

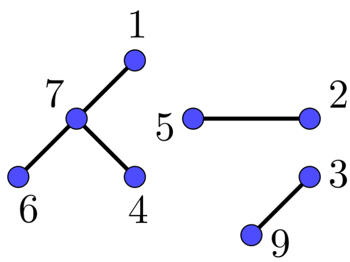
$P = (1,5,5,\mathbf{5})$ $\quad L = (2,3,4,6)$ $\quad M = (7,8,9)$



V ďalšom kroku spojíme vrcholy 7 a 1.

▷ **5. krok**

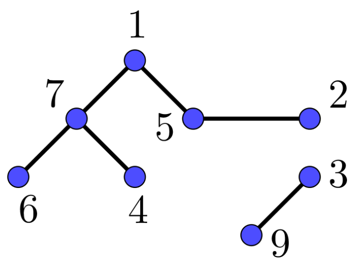
$P = (5,5,\mathbf{5})$ $\quad L = (2,3,4,6,7)$ $\quad M = (1,8,9)$



V ďalšom kroku spojíme vrcholy 1 a 5.

▷ **6. krok**

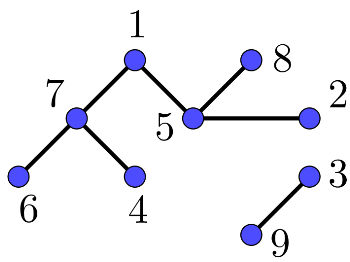
$P = (5,\mathbf{5})$ $\quad L = (2,3,4,6,7,1)$ $\quad M = (8,9)$



V ďalšom kroku spojíme vrcholy 8 a 5.

▷ **7. krok**

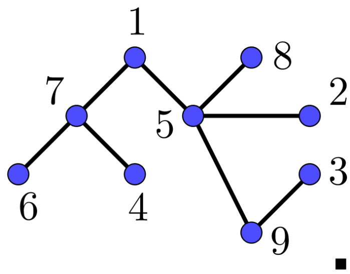
$P = (\mathbf{5})$ $\quad L = (2,3,4,6,7,1,8)$ $\quad M = (9)$



V ďalšom, už poslednom, kroku spojíme vrcholy 9 a 5, čím dostaneme pôvodný očíslovaný strom. V poslednom kroku, keď už množina P je prázdna, nepotrebujeme ani určovať novú množinu M.

▷ **8. krok**

$P = ()$ $L = (2,3,4,6,7,1,8,9)$ $M = (5)$



∎

Pri popise pseudokódu konštrukcie očíslovaného stromu z Prüferovho kódu budeme používať funkciu $\texttt{prvy}\,(P)$, ktorá nám z usporiadanej k-tice P vráti jej prvý prvok a zároveň tento prvok z P odstráni. Rovnakú funkciu sme používali aj v pseudokódoch Kruskalovho algoritmu (strana 202) a algoritmu na konštrukciu prehľadávacieho binárneho stromu (strana 215).
Korektnosť algoritmov konštrukcie očíslovaného stromu z Prüferovho kódu a naopak, sa dokazuje ľahko. Treba ukázať dve veci. Po prvé treba dokázať, že uvedeným algoritmom vždy vytvoríme očíslovaný strom a po druhé treba dokázať, že zo zrekonštruovaného stromu spätne dostaneme pôvodný Prüferov kód. Dôkaz korektnosti je uvedený napríklad v knihe [15] v časti 7.4.

Očíslovaný strom z Prüferovho kódu

VSTUP: Postupnosť $P = \{p_1, \ldots, p_{n-2}\}$, kde $\forall p_i : p_i \in \{1, \ldots, n\}$.
VÝSTUP: Očíslovaný strom $T = (V, E)$, kde $V = \{1, \ldots, n\}$.

INICIALIZÁCIA

$V := \{1, \ldots, n\};$
$E := \{\,\};$
$P := (p_1, \ldots, p_{n-2}, p_{n-2});$
$L := \{\,\};$
$M := V \setminus (P \cup L);$

REKONŠTRUKCIA OČÍSLOVANÉHO STROMU T

while $\{\, |P| > 0 \,\}$ **do**
  $i := \min\{\, x;\ x \in M \,\};$
  $j := \texttt{prvy}\,(P);$
  $E := E \cup \{i, j\};$
  $L := L \cup \{i\};$
  $M := V \setminus (P \cup L);$
end

Ako sme mali možnosť vidieť z uvedených príkladov, konštrukcia Prüferovho kódu z očíslovaného stromu, rovnako ako rekonštrukcia očíslovaného stromu z Prüferovho kódu, je veľmi jednoduchá. Prüferov kód je pritom veľmi efektívny spôsob reprezentácie stromov. Autorom tohto kódu je nemecký matematik Heinz Prüfer, ktorý tento kód navrhol v roku 1918 v súvislosti s dôkazom Cayleyho[4] vety. Znenie Cayleyho vety je nasledovné.

[4] Arthur Cayley bol slávny britský matematik z 19. storočia, zaoberajúci sa diskrétnou matematikou, predovšetkým algebrou a teóriou grafov.

Veta 12.3.1 — Cayleyoho veta. Počet rôznych kostier očíslovaného kompletného grafu na n vrcholoch je n^{n-2}. Alebo inak sformulované:
Počet rôznych koreňových stromov s vrcholmi $V = \{1,\dots,n\}$ a koreňom 1 je n^{n-2}.

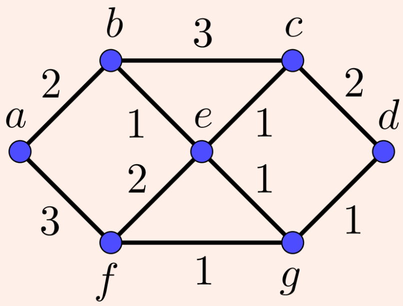
Dôkaz Cayleyho vety je s použitím Prüferovho kódu triviálny. Prenechávame ho ako cvičenie 12.8.

12.4 Cvičenia

Cvičenie 12.1 Nech G je ohodnotený graf a s je najlacnejší sled medzi vrcholmi u a v v tomto grafe. Dokážte potom, že sled s je cesta, t. j. neopakujú sa v ňom ani hrany, ani vrcholy. ■

Cvičenie 12.2 Dokážte, že najlacnejšia cesta medzi dvoma vrcholmi daného grafu neobsahuje slučky. ■

Cvičenie 12.3



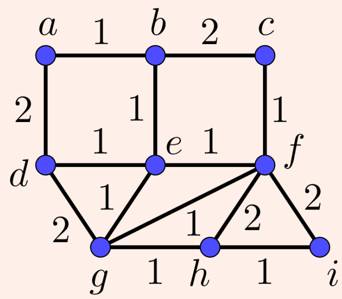
(a) Nájdite hodnoty najlacnejších ciest od vrcholu d ku všetkým ostatným vrcholom grafu.

(b) Nájdite všetky najlacnejšie cesty z vrcholu d do vrcholu a. ■

Cvičenie 12.4

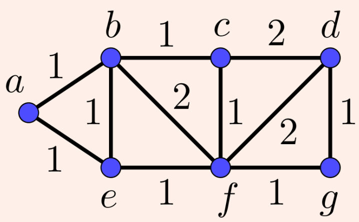
(a) Nájdite hodnoty najlacnejších ciest od vrcholu d ku všetkým ostatným vrcholom grafu.

(b) Nájdite všetky najlacnejšie cesty z vrcholu a do vrcholu g.



■

Cvičenie 12.5



(a) Nájdite hodnoty najlacnejších ciest od vrcholu a ku všetkým ostatným vrcholom grafu.

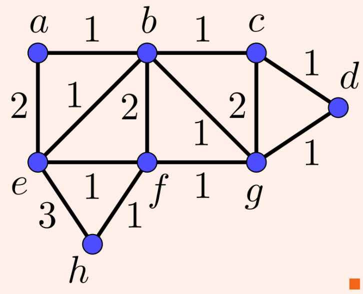
(b) Nájdite všetky najlacnejšie cesty z vrcholu a do vrcholu d. ■

Cvičenie 12.6 Naprogramujte Dijkstrov algorimus v Pythone alebo v C. ■

Cvičenie 12.7

(a) Nájdite hodnoty najlacnejších ciest od vrcholu a ku všetkým ostatným vrcholom grafu.

(b) Nájdite všetky najlacnejšie cesty z vrcholu a do vrcholov d a h.

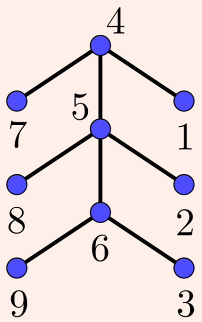


■

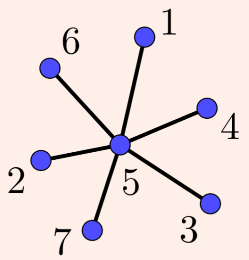
Cvičenie 12.8 Dokážte Cayleyho vetu (strana 242).
Návod: použite Prüferov kód. ■

Cvičenie 12.9 Nájdite Prüferov kód pre nasledujúce očíslované stromy

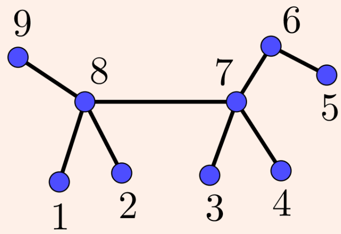
(a)



(b)



(c)



■

Cvičenie 12.10 Pre nasledujúce Prüferové kódy zrekonštruujte pôvodné očíslované stromy

(a) $(3,3,3,3,3)$
(b) $(1,2,3,4,5)$
(c) $(2,2,3,3,5)$
(d) $(4,4,4,2,2,2,3)$
(e) $(5,4,3,2,1)$
(f) $(1,2,2,3,3,3)$
(g) $(1,1,1,2,2,3)$
(h) $(3,2,1,4,2,4)$
(i) $(5,3,2,4,2,5,2)$ ■

Cvičenie 12.11 Vrcholy cesty dĺžky 5 očíslujte číslami z množiny $\{1,\dots,5\}$ tak, aby jej Prüferov kód obsahoval čo najmenej rôznych cifier. ■

Cvičenie 12.12 V Prüferovom kóde nejakého stromu, ktorý je usporiadanou päticou čísel, sa jedno číslo opakovalo trikrát a druhé dvakrát. Koľko má tento strom vrcholov, a aké sú ich stupne? Uveďte príklad takého stromu. ■

Cvičenie 12.13 Nájdite graf, v ktorom má každý vrchol stupeň aspoň 2 a ktorý má kostru získanú prehľadávaním do šírky izomorfnú

(a) s cestou dĺžky n,
(b) s hviezdou na n vrcholoch $\big(\text{graf } K_{1,(n-1)}\big)$,
(c) so stromom, ktorého Prüferov kód je $(3,3,3,1,4,4,2)$,
(d) so stromom, ktorého Prüferov kód je $(2,1,3,1,4)$. ■

Cvičenie 12.14 Nájdite graf, v ktorom má každý vrchol stupeň aspoň 2 a ktorý má kostru získanú prehľadávaním do hĺbky izomorfnú

(a) s cestou dĺžky n,

(b) s hviezdou na n vrcholoch (graf $K_{1,(n-1)}$,

(c) so stromom, ktorého Prüferov kód je $(3,3,3,1,4,4,2)$,

(d) so stromom, ktorého Prüferov kód je $(2,1,3,1,4)$.

Cvičenie 12.15 Nájdite graf, ktorého každá kostra získaná prehľadávaním do šírky, je izomorfná so stromom, ktorého Prüferov kód je $(2,2,1,3,3,1,4,4)$.

Cvičenie 12.16 V Pythone alebo v C naprogramujte vytvorenie Prüferoveho kódu ku zadanému očíslovanému stromu.

Cvičenie 12.17 V Pythone alebo v C naprogramujte rekonštrukciu očíslovaného stromu zo zadaného Prüferoveho kódu. Strom môžete zapísať napríklad pomocou matice susednosti.

Použitá a doporučená literatúra a zdroje

Použitá a doporučená literatúra 247

Použitá a doporučená literatúra

[1] Martin Aigner: **Combinatorial Theory**, Springer Verlag, Heidelberg 1979

[2] Bohuslav Balcar, Petr Štěpánek: **Teorie množin**, Academia, Praha 1986

[3] Berežný, Draženská, Kravecová: **Zbierka úloh z diskrétnej matematiky**, FEI TU, Košice 2005; `http://web.tuke.sk/fei-km/sites/default/files/prilohy/10/Zbierka-DM.pdf`

[4] J. A. Bondy, U. S. Murty: **Graph Theory With Applications**, North-Holland 1976

[5] Reinhard Diestel: **Graph Theory**, Springer 2000

[6] Harary, Frank: **Graph theory**, Addison-Wesley 1969

[7] Richard Johnsonbaugh: **Discrete Mathematics**, Pearson 2017

[8] Josef Kaucký: **Kombinatorické identity**, VEDA, vydavateľstvo SAV, Bratislava 1975

[9] Martin Knor: **Úvod do matematickej logiky**, FIIT STU, Bratislava 2016 `http://www.math.sk/jmkollar/literatura/Knor-Uvod_do_matematickej_logiky.pdf`

[10] Martin Knor: **Teória grafov**, SvF STU, Bratislava 2008 `http://www.svf.stuba.sk/docs/dokumenty/skripta/teoria_grafov_martin_knor.pdf`

[11] Martin Knor, Jozef Kollár: **Matematika pre architektov**, STU Bratislava, 2002

[12] Donald E. Knuth: **The Art of Computer Programming, Volume 1**, Addison-Wesley, 1997

[13] Sergei K. Lando: **Lectures on Generating Functions**, American Mathematical Society, Student Mathematical Library 2003

[14] Milan Mareš: **Příběhy matematiky**, Pistorius & Olšanská, Příbram 2011

[15] J. Matoušek, J. Nešetřil: **Kapitoly z diskrétní matematiky**, Karolinum, Praha 2002

[16] М. В. Меньшиков, А. М. Ревякин, А. Н. Копылова, Ю. Н. Макаров, Б. С. Стечкин: **Комбинаторный Анализ – Задачи и упражнения**, Издательство »НАУКА«, Москва 1982

[17] В. А. Носов: **Комбинаторика и теория графов**, Москва 1999
`http://intsys.msu.ru/staff/vnosov/combgraph.htm` (PDF verzia)

[18] Stanislav Palúch: **Algoritmická teória grafov**, Žilinská univerzita, 2008
`http://frcatel.fri.uniza.sk/users/paluch/grafy.pdf`

[19] Ján Plesník: **Grafové algoritmy**, VEDA, Bratislava 1983

[20] Franco P. Preparata, Raymond T. Yeh: **Úvod do téorie diskrétnych matematických štruktúr**, Alfa, Bratislava 1982

[21] Edward M. Reingold, Jurg Nievergelt, Narsingh Deo: **Combinatorial Algorithms – Theory and Practice**, Prentice-Hall, New Jersey 1977

[22] Beloslav Riečan a kol.: **Úlohy z matematiky pre 4. ročník gymnázia**, SPN, Bratislava 1976

[23] Beloslav Riečan a kol.: **Matematika pre 4. ročník gymnázia**, SPN, Bratislava 1987

[24] Beloslav Riečan a kol.: **Zbierka úloh z matematiky pre 4. ročník gymnázia**, SPN, Bratislava 1991

[25] Karol Rovan a kol.: **Zbierka riešených úloh z algebry pre SVŠ a odborné školy**, SPN, Bratislava 1969

[26] К. А. Рыбников: **Введение в Комбинаторный Анализ**, Издательство Московского Университета, Москва 1985

[27] Raymond M. Smullyan: **A Beginner's Guide to Mathematical Logic**, Dover Publications, New York 2014

[28] František Vejsada, František Talafous: **Zbierka úloh z matematiky pre SVŠ a gymnázia**, SPN, Bratislava 1973

[29] Naum J. Vilenkin: **Rozhovory o množinách**, SPN, Bratislava 1972

[30] Herbert S. Wilf: **generatingfunctionology**, Academic Press, Inc. 1994
`https://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html`

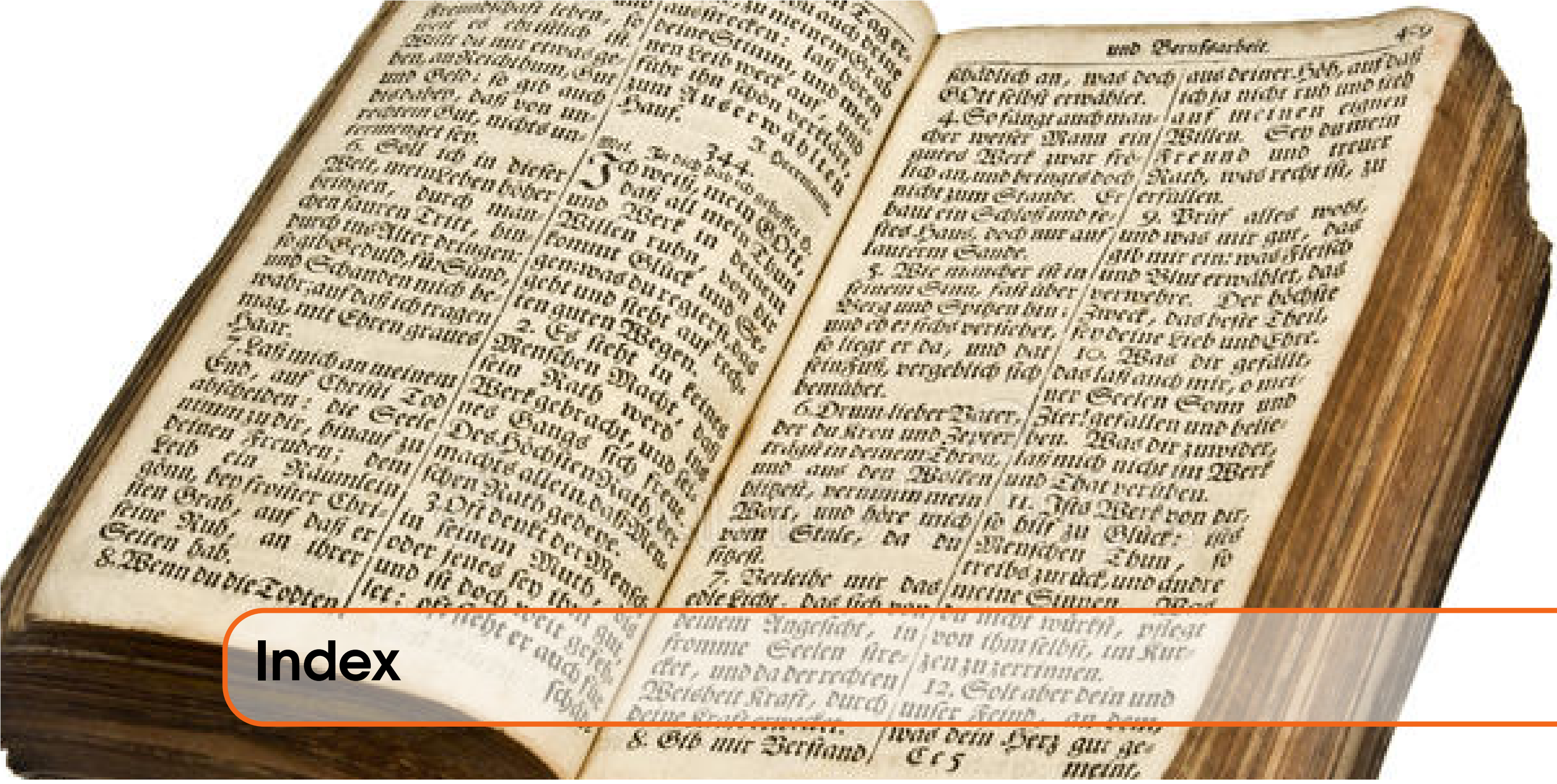
[31] Niklaus Wirth: **Algoritmy a štruktúry údajov**, Alfa, Bratislava 1989

[32] Štefan Znám: **Kombinatorika a teória grafov**, PF UK, Bratislava 1978

IV

Index

Index 251



Index

Symboly

$\in$ operátor „patrí do množiny“ 11
$\notin$ operátor „nepatrí do množiny“ 11
$\subset$ operátor vlastnej podmnožiny 12
$\subseteq$ operátor nevlastnej podmnožiny 12
$\cup$ operátor zjednotenia množín 12
$\cap$ operátor prieniku množín 13
$\setminus$ operátor rozdielu množín 13
$\overline{\mathbb{A}}$ komplement množiny $\mathbb{A}$ 14
$\triangle$ operátor symetrickej diferencie 41
$\neg$ operátor logickej negácie 20
$\vee$ operátor disjunkcie 20
$\wedge$ operátor konjunkcie 20
$\Leftrightarrow$ operátor ekvivalencie 20
$\Rightarrow$ operátor implikácie 20
$\exists$ existenčný kvantifikátor 23
$\forall$ všeobecný kvantifikátor 23
$\mid$ operátor „a delí b“ $(a \mid b)$ 40

A

acyklický graf 62
algoritmus
- Borůvkov 203
- Dijkstrov 229–231
- hľadania kostry grafy 179
- Jarníkov (Primov) 197
- konštrukcie očíslovaného stromu z Prüferovho kódu 241

algoritmus
- konštrukcie optimálneho Huffmanovho kódu 206
- konštrukcie Prüferovho kódu z očíslovaného stromu 235
- konštrukcie prehľadávacieho binárneho stromu 215
- Kruskalov 201, 202
- pažravý 201
- prehľadávania grafu do šírky 182
- prehľadávania grafu do hĺbky 187
- zostavovania identifikačného kódu binárneho stromu 219
- zostavovania identifikačného kódu koreňového stromu 222

antisymetrickosť (relácie) 125, 130
Appel Kenneth (1932–2013) 48
ASCII kód 204
atomická formula 20
axióma 31

B

backtracking 186
bijektívnosť 145
binárny strom 80
binomický koeficient 171
Borůvka Otakar (1899–1995) 196, 203
Bouton Charles Leonard (1869–1922) 224

C

Catalanovo číslo . . . 174, 213
Cayley Arthur (1821–1895) . . . 16, 48, 241
centrálny vrchol grafu . . . 56
centrum grafu . . . 56
cesta (v grafe) . . . 55, 112
cyklus (v grafe) . . . 57, 112

Č

číslo
- Catalanovo . . . 174, 213
- celé $\mathbb{Z}$ . . . 15
- iracionálne . . . 15
- komplexné $\mathbb{C}$ . . . 16
- kvaternion . . . 16
- oktonion . . . 16
- prirodzené $\mathbb{N}$ . . . 14
- racionálne $\mathbb{Q}$ . . . 15
- reálne $\mathbb{R}$ . . . 15

D

dátová štruktúra
- fronta . . . 180
- zásobník . . . 180

de Moivre Abraham (1667–1754) . . . 155
de Morgan Augustus (1806–1871) . . . 48
definícia . . . 32
Dijkstra Edsger Wybe (1930–2002) . 197, 230
Dijkstrov algoritmus . . . 229, 231
disjunkcia ($\vee$) . . . 21
disjunktné množiny . . . 13
dôkaz
- matematickou indukciou . . . 37, 39
- nepriamy . . . 35
- priamy . . . 32
- sporom . . . 36

E

ekvivalencia ($\Leftrightarrow$) . . . 22
ekvivalencia (relácie) . . . 140
entropický kód . . . 204
Euklides Alexandrijský (∼3. stor. pred n. l.) 15
Euklidovský priestor . . . 108
Euler Leonhard (1707–1783) 47, 84, 109, 156

F

faktor grafu . . . 62
faktoriál . . . 39
- dvojný . . . 172

Fano Roberto Mario (1917–2016) . . . 204
Fibonacci Leonardo (∼1170 – ∼1240) . . . 167
Fibonacciho postupnosť . . . 167
formula
- atomická . . . 20
- prvotná . . . 20
- výroková . . . 20, 22

formuly
- ekvivalentné . . . 22

fronta . . . 180
funkcia . . . 143
- bijektívna . . . 145
- charakteristická funkcia množiny . . . 149
- definičný obor . . . 143
- injektívna . . . 144
- inverzná . . . 145
- koobor . . . 143
- obor hodnôt . . . 143
- parciálna . . . 143
- surjektívna . . . 144
- vytvárajúca
  - exponenciálna, 161
  - obyčajná, 160
- zložená . . . 146

G

Gauss Carl Friedrich (1777-1855) . . . 38
geometrická postupnosť
- súčet prvých n členov . . . 39

Gonthier Georges . . . 48
graf
- acyklický . . . 62
- artikulácia . . . 61
- bipartitný . . . 53
  - kompletný ($K_{m,n}$), 54, 112
- centrum . . . 56
- cesta . . . 55, 112
- cesta (P_n) . . . 112
- cyklus . . . 57, 112
  - hamiltonovský, 95
- cyklus (C_n) . . . 112
- digraf . . . 50
- dĺžka ťahu . . . 55
- dĺžka cesty . . . 55

graf
- dĺžka cyklu . . . 57
- dĺžka sledu . . . 54
- dokonalé párovanie . . . 89
- Eulerova veta o rovinných grafoch . . . 110
- eulerovský . . . 87
- eulerovský ťah . . . 85
  - otvorený, 85, 87
  - uzavretý, 85, 86
- excentricita vrcholu . . . 56
- faktor . . . 62
- hodnota . . . 196
- hodnota hrany . . . 195
- hodnota sledu . . . 229
- homeomorfné grafy . . . 112
- hrana . . . 49
  - ohodnotená, 195
- hranica oblasti . . . 108
- húsenica . . . 113
- hviezda (S_n) . . . 113
- incidencia (vrchol–hrana) . . . 50
- invariant . . . 101
- izomorfizmus
  - binárnych stromov, 106
  - koreňových stromov, 105
- izomorfizmus grafov . . . 98, 99
- izomorfné grafy . . . 99
- jadro . . . 225
- jednoduchý (obyčajný) . . . 51
- Knight graph . . . 98
- koleso (W_n) . . . 113
- komplementárny . . . 53
- kompletný (K_n) . . . 52, 112
- kompletný bipartitný $(K_{m,n})$ . . . 54, 112
- komponent súvislosti . . . 57, 60
- konečný . . . 49
- koreňový strom . . . 77
  - dieťa vrcholu, 78
  - koncový vrchol, 78
  - list, 78
  - otec vrcholu, 78
  - podstrom, 78
  - potomok vrcholu, 78
  - predkovia vrcholu, 78
  - súrodenci (vrcholy), 78
  - úroveň vrcholu, 77
  - výška, 77
  - vnútorný vrchol, 78

graf
- kostra . . . 62
  - minimálna, 196
- Kuratowského veta . . . 112
- les . . . 77
- list . . . 77
- ľavý podstrom . . . 213
- matica incidencie . . . 72
- matica susednosti . . . 69
- minimálna kostra . . . 196
- množina vrcholov
  - nezávislá, 225
  - stabilná, 225
- most . . . 61
- najlacnejšia cesta . . . 230
- najlacnejšia kostra . . . 196
- násobné hrany . . . 50
- nekonečný . . . 49
- neorientovaný . . . 49
- nesúvislý . . . 57
- nezávislá množina vrcholov . . . 225
- oblasť . . . 108
- obyčajný (jednoduchý) . . . 51
- ohodnotený . . . 195
- ohodnotenie hrany . . . 195
- orientovaná hrana . . . 49, 50
- orientovaný . . . 49, 50
- otvorený sled . . . 55
- párovanie . . . 89
  - maximálne, 89
- perfektné párovanie . . . 89
- podgraf . . . 58
- polomer . . . 56
- pravý podstrom . . . 213
- pravidelný . . . 52
- prázdny . . . 49, 80
- prehľadávanie do šírky . . . 182
- prehľadávanie do hĺbky . . . 187
- priemer . . . 56
- problém obchodného cestujúceho . . . 234
- rovinné nakreslenie . . . 108
- rovinný . . . 108
- sled . . . 54
  - otvorený, 55
  - uzavretý, 55
- slučka (hrana) . . . 50
- stabilná množina vrcholov . . . 225

graf
strom . . . 73
binárny, 80
binárny dokonalý, 82
binárny prehľadávací, 214
binárny úplný, 81
binárny vyvážený, 81
koreň, 77, 105
očíslovaný, 234
prehľadávací binárny, 213
stupeň vrcholu . . . 51
subdivízia hrany . . . 111
susedné oblasti . . . 108
susednosť (vrchol–vrchol) . . . 50
súvislý . . . 57
ťah . . . 55
uzavretý sled . . . 55
vrchol . . . 49, 50
centrálny, 56
izolovaný, 50
stupeň, 51
vzdialenosť vrcholov . . . 56
Graves John Thomas (1806–1870) . . . 16
Guthrie Francis (1831–1899) . . . 48

H

Haken Wolfgang (1928–. . .) . . . 48
Hamilton William R. (1805–1865) . 16, 48, 95
harmonická postupnosť . . . 166
Herón Alexandrijský (10–75) . . . 15
Hippasos (∼530–∼450 pred n. l.) . . . 15
hodnota grafu . . . 196
hrana
koncový vrchol . . . 181
počiatočný vrchol . . . 181
Huffman David Albert (1925–1999) . . . 204
Huffmanov kód . . . 80, 204, 206
húsenica (graf) . . . 113
hviezda (graf) . . . 113
hypotéza . . . 32

I

implikácia (⇒) . . . 21
indukčný
krok . . . 38
predpoklad . . . 38
injektívnosť . . . 144
inverzná funkcia . . . 145
inverzná relácia . . . 127

J

jadro grafu . . . 225
Jarník Vojtěch (1897–1970) . . . 196, 197
Jarníkov (Primov) algoritmus . . . 197
jazyk 1. rádu . . . 23
jednotka
imaginárna . . . 16
kvaternionová . . . 16
oktonionová . . . 16

K

kartézsky súčin . . . 19
Kempe Alfred Bray (1849-1922) . . . 48
koeficient
binomický . . . 171
Newtonov, 171
multinomický . . . 176
koleso (graf) . . . 113
komplementárna množina . . . 14
komponent súvislosti (grafu) . . . 60
konjunkcia (∧) . . . 21
kontradikcia . . . 20
koreň . . . 77
koreňový strom . . . 77
kostra grafu . . . 62
kód
ASCII . . . 204
Huffmanov . . . 80, 204, 206
Prüferov . . . 234
Kőnig Dénes (1884–1944) . . . 48
Kruskal Joseph B. (1928–2010) . . . 196, 201
Kruskalov algoritmus . . . 202
Kuratowski Kazimierz (1896–1980) . . . 111
kvantifikátor
existenčný . . . 23
všeobecný . . . 23

L

Laplace Pierre-Simon (1749–1827) . . . 156
lema . . . 62
les . . . 77
list . . . 77
logická
hodnota . . . 19
premenná . . . 19

logická
- spojka . . . 19, 20

logický
- operátor . . . 19
- výrok . . . 19

logika
- predikátová . . . 23
- výroková . . . 22

M

matematická indukcia . . . 37, 39

matica
- incidencie grafu . . . 72
- relácie . . . 128
- susednosti grafu . . . 69

maximálne párovanie grafu . . . 89

množina . . . 11
- charakteristická funkcia . . . 149
- kartézsky súčin množín . . . 19
- komplementárna . . . 14
- konečná . . . 12
- mohutnosť . . . 12
- nekonečná . . . 12
- podmnožina . . . 12
- potenčná . . . 13
- prázdna . . . 11
- rozklad . . . 138
- spočítateľná . . . 37
- systém množín . . . 138
- univerzálna . . . 14
- univerzum . . . 13, 14

množiny
- disjunktné . . . 13
- prienik množín . . . 13
- rovnosť množín . . . 11
- rozdiel množín . . . 13
- symetrická diferencia množín . . . 41
- zjednotenie množín . . . 12

mocninový rad . . . 156

modulo (zvyšok po delení) . . . 41

modulo $a \pmod b$ . . . 41

modus ponens . . . 32

mohutnosť množiny . . . 12

Moskovský papyrus . . . 16

multinomická veta . . . 176

multinomický koeficient . . . 176

N

negácia ($\neg$) . . . 20

Newton Isaac (1642–1727) . . . 171

Newtonov binomický koeficient . . . 171

P

P-kód (prefixový kód) . . . 204

párovanie grafu . . . 89

perfektné párovanie . . . 89

podgraf grafu . . . 58

podmnožina
- vlastná . . . 12

postupnosť
- Fibonacciho . . . 167
- harmonická . . . 166

potenčná množina . . . 13

pravdivostná hodnota . . . 19

pravdivostná tabuľka . . . 20

prázdna množina . . . 11

prázdny graf . . . 80

prefixový kód . . . 204

prehľadávací binárny strom . . . 213, 214

prehľadávania grafu
- do šírky . . . 181

prehľadávanie grafu
- do šírky . . . 182
- do hĺbky . . . 186, 187

prienik množín . . . 13

Prim Robert Clay (1921–. . .) . . . 197

princíp zapojenia-vypojenia . . . 18

problém
- NP-úplný . . . 96
- obchodného cestujúceho . . . 47, 234
- štyroch farieb . . . 48

Prüfer Ernst Paul Heinz (1896–1934) . . . 241

Prüferov kód . . . 234

prvky
- neporovnateľné . . . 137
- porovnateľné . . . 137

prvotná formula . . . 20

pseudokód
- Dijkstrovho algoritmu . . . 231
- hľadania kostry grafu . . . 179
- Jarníkovho algoritmu . . . 197
- konštrukcie očíslovaného stromu z Prüferovho kódu . . . 241
- konštrukcie optimálneho Huffmanovho kódu . . . 206

pseudokód
konštrukcie Prüferovho kódu z očíslovaného stromu . . . 235
konštrukcie prehľadávacieho binárneho stromu . . . 215
Kruskalovho algoritmu . . . 202
prehľadávania grafu do šírky . . . 182
prehľadávania grafu do hĺbky . . . 187
zostavovania identifikačného kódu binárneho stromu . . . 219
zostavovania identifikačného kódu koreňového stromu . . . 222
pytagorejci . . . 15

R

rad
formálny mocninový . . . 156
Maclaurinov . . . 156
mocninový . . . 156
Taylorov . . . 156
reflexívnosť (relácie) . . . 124, 129
relácia
n-árna . . . 123
antisymetrická . . . 125, 130
binárna . . . 123, 124
čiastočné usporiadanie . . . 137
ekvivalencie . . . 140
inverzná . . . 127
maticová reprezentácia . . . 128
na množine . . . 124
reflexívna . . . 124, 129
symetrická . . . 125, 129
tranzitívna . . . 126
zložená . . . 128
rovnosť množín . . . 11
rozdiel množín . . . 13
rozklad množiny . . . 138
triedy ekvivalencie . . . 141
triedy rozkladu . . . 138

S

semifaktoriál . . . 172
skladanie funkcií . . . 146
skladanie relácií . . . 128
sled (v grafe) . . . 54
slučka (graf) . . . 50
spočítateľná množina . . . 37
Stirling James (1692–1770) . . . 156
strom (graf) . . . 73
vyvážený binárny . . . 81
subdivízia hrany . . . 111
surjektívnosť . . . 144
súčin
kartézsky . . . 19
sylogizmus . . . 34
symetrická diferencia množín (△) . . . 41
symetrickosť (relácie) . . . 125, 129
systém množín . . . 138

T

tabuľka
pravdivostná . . . 20
Tait Peter Guthrie (1831–1901) . . . 48
tautológia . . . 20
tautologicky ekvivalentné formuly . . . 22
tranzitívnosť (relácie) . . . 126
trieda
rozkladu . . . 138
zvyšková . . . 142
trieda ekvivalencie . . . 141

Ť

ťah (v grafe) . . . 55

U

univerzum množín . . . 13, 14
usporiadaná dvojica . . . 18
usporiadanie
čiastočné . . . 137
neporovnateľnosť, 137
porovnateľnosť, 137
lineárne . . . 138

Ú

úplný binárny strom . . . 81

V

Vennove diagramy . . . 16
veta
Cayleyho . . . 242
Eulerova o rovinných grafoch . . . 110
Kuratowského . . . 112
multinomická . . . 176
o centre stromu . . . 224

veta
- o cykloch . . . 58
- o existencii cesty v grafe . . . 56
- o existencii jadra grafu . . . 226
- o existencii kostry grafu . . . 63
- o explicitnom vyjadrení rekurentných postupností . . . 170
- o invariantnosti cyklu C_n . . . 102
- o invariantnosti stupňov vrcholov . . . 101
- o inverznej funkcii . . . 145
- o komponentoch grafu . . . 61
- o korektnosti prehľ. algoritmov . . . 191
- o matematickej indukcii . . . 39
- o matici susednosti . . . 71
- o matici zloženej relácie . . . 131
- o maticiach susednosti izomorfných grafov . . . 100
- o mohutnosti kartézskeho súčinu . . . 19
- o optimálnej lokalizácii v prehľadávacom binárnom strome . . . 217
- o otvorenom eulerovskom ťahu . . . 87
- o počte koncových vrcholov úplných binárnych stromov . . . 81
- o potenčnej množine . . . 40
- o relácii danej rozkladom množiny . . 139
- o rozklade danom rel. ekvivalencie . . 141
- o správnosti Jarníkovho algoritmu . . . 199
- o stromoch . . . 76
- o stupňoch vrcholov rovinného grafu . 111
- o súčte stupňov vrcholov grafu . . . 52
- o súvislosti výšky a počtu koncových vrcholov binárnych stromov . . . 82
- o tranzitívnosti relácie na množine . . . 132
- o uzavretom eulerovskom ťahu . . . 86
- o vrcholoch stromov . . . 76
- pravidlo sylogizmu . . . 34
- základná algebry . . . 16
- základná aritmetiky . . . 37

veta (matematická) . . . 31

vrchol
- dieťa . . . 78
- koncový . . . 50, 78
- list . . . 77
- otec . . . 78
- počiatočný . . . 50
- potomok . . . 78
- predkovia . . . 78
- rodič . . . 78
- súrodenci . . . 78

vrchol
- syn . . . 78
- vnútorný . . . 78

vytvárajúca funkcia
- exponenciálna . . . 161
- obyčajná . . . 160
- súčet . . . 161
- súčin . . . 163

vyvážený binárny strom . . . 81

výroková formula . . . 20, 22

W

Werner Benjamin . . . 48

Z

základná veta algebry . . . 16

základná veta aritmetiky . . . 37

zásobník . . . 180

zjednotenie množín . . . 12

zložená funkcia . . . 146

zvyšková trieda . . . 142

zvyšok po delení (modulo) . . . 41