Príklady z LS

RNDr. Peter Kaprálik, PhD.

1. Úvodné pojmy

1.1. Riešené príklady

Príklad 1. Zistite, ci zobrazenie $g:(-2,7\rangle \to \boldsymbol{R},\ g(x)=-3x+2$ je injektívne, surjektívne alebo bijektívne.
Riešenie. Nech $x_1,\ x_2 \in (-2,7\rangle,\ x_1 \neq x_2$. Potom

$$\begin{aligned} x_1 &\neq x_2 \quad /\,.(-3) \\ -3x_1 &\neq -3x_2 \quad /+2 \\ -3x_1+2 &\neq -3x_2+2 \\ g(x_1) &\neq g(x_2) \end{aligned}$$

To však znamená, že zobrazenie g je injektívne.
Pre každé $x \in (-2,7\rangle$ platí

$$\begin{aligned} -2 \leq x &< 7 \\ 6 \geq -3x &> -21 \\ 8 \geq -3x+2 &> -19 \\ 8 \geq g(x) &> -19 \end{aligned}$$

preto napr. císlo 10 nemá vzor (neexistuje $x \in (-2,7\rangle$, pre ktoré $g(x)=10$), co znamená, že zobrazenie g nie je surjektívne a teda ani bijektívne.

Príklad 2. Zistite, ci binárna operácia $\star : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R},\ x \star y = x\dfrac{y}{2}$ je komutatívna, asociatívna a ci má neutrálny prvok.
Riešenie. Pre každé $x, y, z \in \boldsymbol{R}$ platí

1. $x \star y = x\dfrac{y}{2} = \dfrac{xy}{2} = y\dfrac{x}{2} = y \star x,$
2. $(x \star y) \star z = \dfrac{xy}{2} \star z = \dfrac{\dfrac{xy}{2}z}{2} = \dfrac{xyz}{4} = \dfrac{x\dfrac{yz}{2}}{2} = x \star \dfrac{yz}{2} = x \star (y \star z).$

Daná operácia je preto komutatívna aj asociatívna.

Zistime, ci existuje císlo $e \in \boldsymbol{R}$, také, že pre všetky $x \in \boldsymbol{R}$ je $x \star e = x$.

$$\begin{aligned} x \star e &= x \\ \frac{xe}{2} &= x \\ xe &= 2x \\ x(e-2) &= 0 \end{aligned}$$

Vidíme, že ak $e=2$, je pre každé $x \in \boldsymbol{R}\quad x \star 2 = x$, teda císlo 2 je neutrálny prvok operácie $\star$.

Príklad 3. Aká je pravdivostná hodnota kvantifikovaného výroku $\exists x \in \boldsymbol{R}\ \forall y \in \boldsymbol{R}\ xy > x + y$? Napíšte jeho negáciu.

Riešenie. Ak by existovalo císlo $x = x_0$ také, že pre všetky $y \in \boldsymbol{R}$ by platilo $x_0 y > x_0 + y$, potom by

$$-x_0 > y - x_0 y$$

$$-x_0 > (1 - x_0)y$$

Túto nerovnost môžeme dalej upravit v závislosti od toho, ci

a) $x_0 = 1$, b) $x_0 > 1$, c) $x_0 < 1$.

a) $-1 > 0.y$. Táto nerovnost neplatí pre žiadne y.

b) $\frac{-x_0}{1-x_0} < y$. Táto nerovnost neplatí napr. pre císlo $y = \frac{-x_0}{1-x_0} - 1$.

c) $\frac{-x_0}{1-x_0} > y$. Táto nerovnost zas neplatí napr. pre císlo $y = \frac{-x_0}{1-x_0} + 1$.

Vidíme, že také císlo x_0 neexistuje, preto daný výrok je nepravdivý, t.j. jeho pravdivostná hodnota je 0.

Negácia uvedeného výroku: $\forall x \in \boldsymbol{R}\ \exists y \in \boldsymbol{R}\ \ x_0 y \le x_0 + y$.

Príklad 4. Zistite, ci výroková formula $b = (p \Rightarrow q) \Rightarrow \overline{q}$ je tautológia, kontradikcia alebo splnitelná formula.

Riešenie. Zistíme to pomocou tabulky pravdivostných hodnôt.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	b
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

Z tabulky vyplýva, že b je splnitelná formula.

Príklad 5. Zistite, ci výrokové formuly $a = p \Rightarrow (p \wedge q)$, $b = p \Rightarrow q$ sú tautologicky ekvivalentné.

Riešenie. Úlohu budeme riešit pomocou tabulky pravdivostných hodnôt.

p	q	$p \wedge q$	a	b
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1

Výrokové formuly a, b majú rovnaké pravdivostné ohodnotenie, preto $a \cong b$.

Príklad 6. Úpravami (pomocou tabulky tautologických ekvivalenci) dokážte, že výrokové formuly $a = \overline{\overline{p} \Rightarrow (q \wedge \overline{r})}$, $b = \overline{p} \wedge (q \Rightarrow r)$ sú tautologicky ekvivalentné.

Riešenie.

$$a = \overline{\overline{p} \Rightarrow (q \wedge \overline{r})} \cong \overline{p \vee (q \wedge \overline{r})} \cong \overline{p} \wedge \overline{(q \wedge \overline{r})} \cong \overline{p} \wedge (\overline{q} \vee r) \cong \overline{p} \wedge (q \Rightarrow r) = b$$

Príklad 7. Zistite, ci relácia $\sigma = \{(x,y); x^2 - x = y^2 - y\}$ na množine $\boldsymbol{R}$ je reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna.

Riešenie.

Pre každé $x \in \boldsymbol{R}$ platí $x^2 - x = x^2 - x$, preto $x\,\sigma\,x$. Relácia σ je teda reflexívna.

Nech $x\,\sigma\,y$ t.j. $x^2 - x = y^2 - y$. Potom aj $y^2 - y = x^2 - x$ a teda $y\,\sigma\,x$, co znamená, že relácia σ je symetrická.

Nech $x\,\sigma\,y$, $y\,\sigma\,z$. Potom $x^2 - x = y^2 - y$, $y^2 - y = z^2 - z$, odkial vyplýva $x^2 - x = z^2 - z$, teda $x\,\sigma\,z$. To ale znamená, že σ je tranzitívna relácia.

Nech $x\,\sigma\,y$, $y\,\sigma\,x$ t.j. $x^2 - x = y^2 - y$. Upravme túto rovnost :

$$x^2 - y^2 + y - x = 0$$

$$(x - y)(x + y) - (x - y) = 0$$

$$(x - y)(x + y - 1) = 0$$

Vidíme, že táto rovnost je splnená pre $x = y$ ale aj pre $y = 1 - x$. Potom však napr. pre $x = 3$, $y = 1 - 3 = -2$ platí $(3,-2) \in \sigma$, $(-2,3) \in \sigma$, ale $3 \neq -2$. Preto relácia σ nie je antisymetrická.

Príklad 8. Na množine $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ je daný rozklad $T = \{\{2,5,6\},\{1,3\},\{4\}\}$. Napíšte reláciu ekvivalencie, ktorá je indukovaná rozkladom T.

Riešenie. Reláciu indukovanú rozkladom T oznacme . Dvojica $(x,y) \in A$ patrí do relácie ϱ práve vtedy, ked x,y patria do tej istej triedy rozkladu. Teda

$$\varrho = \{(2,2),(5,5),(6,6),(2,5),(5,2),(2,6),(6,2),(5,6),(6,5),(1,1),(3,3),(1,3),(3,1),(4,4)\}$$

1.2. Cvicenia

Zobrazenia a operácie

1. Zistite, ci dané zobrazenia sú injektívne, surjektívne alebo bijektívne.
   a) $h_1 : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}, \quad h_1(x) = 2x,$
   b) $h_2 : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, \quad h_2(x) = 2x,$
   c) $h_3 : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, \quad h_3(x) = x^2,$
   d) $h_4 : \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}, \quad h_3(x) = x^2,$
   e) $h_5 : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^+ \cup \{0\}, \quad h_5(x) = x^2,$
   f) $h_6 : \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+, \quad h_6(x) = x^2$
   g) $h_7 : \boldsymbol{R} \setminus \{2\} \to \boldsymbol{R}, \quad h_7(x) = \dfrac{3x+1}{x-2},$
   h) $h_7 : \boldsymbol{R} \setminus \{2\} \to \boldsymbol{R} \setminus \{3\}, \quad h_7(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}.$

2. Zistite, ci dané operácie sú komutatívne, asociatívne a ci majú neutrálny prvok.
   a) $\star : (\boldsymbol{R}^+)^2 \to \boldsymbol{R}^+,\ a \star b = a^b,$
   b) $\square : \boldsymbol{N}^2 \to \boldsymbol{N},\ a \,\square\, b = b,$
   c) $\triangle : \boldsymbol{N}^2 \to \boldsymbol{N},\ a \,\triangle\, b = a,$
   d) $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R},\ f(x,y) = x + y + 1.$

3. Na množine $\boldsymbol{N}$ máme definované tri binárne operácie + (štandardné scitovanie), $\square : a \,\square\, b = b$, $\triangle : a \,\triangle\, b = a$. Zistite, ktorá operácia vzhladom ku ktorej je distributívna.

Výroková logika

4. Urcte pravdivostnú hodnotu výroku a napíšte jeho negáciu.
   a) $\forall x \in \boldsymbol{R}\ \exists y \in \boldsymbol{R}\quad 3x - 6 > 2y$,
   b) $\exists y \in \boldsymbol{R}\ \forall x \in \boldsymbol{R}\quad 3x - 6 > 2y$,
   c) $\exists x \in \boldsymbol{R}\ \forall y \in \boldsymbol{R}\quad xy \le y^2$,
   d) $\forall y \in \boldsymbol{R}\ \exists x \in \boldsymbol{R}\quad xy \le y^2$,
   e) $\forall x \in \boldsymbol{R}\ \forall y \in \boldsymbol{R}\quad xy \le y^2$.

5. Napíšte negáciu výrokov
   a) $\exists m \in \boldsymbol{N}\ \forall n \in \boldsymbol{N}\quad (m \ge 4 - n \vee m + n$ je párne císlo).
   b) $\forall m \in \boldsymbol{N}\ \exists n \in \boldsymbol{N}\quad (m \ge 4 - n \Rightarrow m + n$ je párne císlo).

6. Zistite, ci výroková formula b je tautológia, kontradikcia alebo splnitelná formula
   a) $b = p \vee \overline{p}$,
   b) $b = p \wedge \overline{p}$,
   c) $b = (p \Rightarrow q) \Rightarrow p$,
   d) $b = (p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$,
   e) $b = (\overline{(p \Rightarrow q)} \vee r) \Rightarrow (p \vee q \vee r)$,
   f) $b = ((p \wedge \overline{s}) \vee (p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{r} \wedge s)) \Leftrightarrow ((\overline{p} \wedge \overline{s}) \vee (\overline{p} \wedge r) \vee (p \wedge \overline{q} \wedge s))$.

7. Zistite, ci formuly a, b sú tautologicky ekvivalentné.
   a) $a = p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$, $b = (p \Rightarrow q) \Rightarrow r$,
   b) $a = p$, $b = \overline{p} \Rightarrow (q \wedge \overline{q})$,
   c) $a = p \Rightarrow q$, $b = (p \wedge \overline{q}) \Rightarrow (r \wedge \overline{r})$,
   d) $a = p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$, $b = (\overline{p} \vee \overline{q} \vee r)$.

8. Pomocou tabulky tautologických ekvivalencií dokážte, že formuly a, b sú tautologicky ekvivalentné.
   a) $a = p \Rightarrow q$, $b = \overline{q} \Rightarrow \overline{p}$,
   b) $a = (\overline{(p \vee q)} \Rightarrow (q \vee \overline{r})) \wedge (p \vee q)$, $b = p \vee q$,
   c) $a = (p \Rightarrow q) \Rightarrow r$, $b = (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \overline{q} \vee r) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q} \vee r)$.

9. Zistite, ci uvedené množiny sú úplnými systémami logických spojok.
   a) $\{\overline{}, \vee, \wedge, \Rightarrow\}$,
   b) $\{\overline{}, \vee\}$,
   c) $\{\overline{}, \wedge\}$,
   d) $\{\overline{}, \Rightarrow\}$,
   e) $\{\overline{}\}$,
   f) $\{\vee\}$.

10. Vyjadrite $(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow q$ pomocou $\{\overline{}, \vee\}$ a pomocou $\{\overline{}, \Rightarrow\}$.

Relácie

11. Na množine $A = \{1, 2, 3, 4\}$ definujte reláciu, ktorá je
    a) reflexívna, symetrická a nie je tranzitívna,
    b) reflexívna a nie je symetrická ani tranzitívna,
    c) reflexívna, antisymetrická a nie je tranzitívna,
    d) symetrická, tranzitívna a nie je reflexívna ani antisymetrická,
    e) tranzitívna a nie je reflexívna ani symetrická,

12. Zistite, ci relácia ϱ na množine $\boldsymbol{R}$ je reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna, ak
    a) $\varrho = \{(x,y); y = x^2\}$,
    b) $\varrho = \{(x,y); x < y\}$,
    c) $\varrho = \{(x,y); x^2 + y^2 = 4\}$,
    d) $\varrho = \{(x,y); (x+1)^2 + y^2 = 3\}$,
    e) $\varrho = \{(x,y); |x| = |y|\}$,

13. Zistite, ci relácia ϱ na množine $\boldsymbol{N}$ je reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna, ak
    a) $\sigma = \{(a,b) \in \boldsymbol{N}^2; a \mid b\}$,
    b) $\sigma = \{(a,b) \in \boldsymbol{N}^2; a \leq b\}$,
    c) $\sigma = \{(a,b) \in \boldsymbol{N}^2; a < b\}$,
    d) $\sigma = \{(a,b) \in \boldsymbol{N}^2; a^2 + a = b^2 + b\}$,
    e) $\sigma : a\sigma b \Leftrightarrow a + b$je párne.

14. Zistite, ci relácia na množine A je reláciou ekvivalencie. Ak áno, nájdite triedy ekvivalencie jednotlivých prvkov množiny A.
    a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
    $\varrho = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,5), (5,1), (3,5), (5,3), (1,3), (3,1)\}$
    b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\varrho = \{(x,y) \in A^2;\ x \mid 2 - y\}$,
    c) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\varrho = \{(x,y) \in A^2;\ 3 \mid x + y\}$,
    d) $A = \boldsymbol{N}^+$, $x\varrho y \Leftrightarrow x \mid y$ alebo $y \mid x$,
    e) $A = \boldsymbol{Z}$, $x\varrho y \Leftrightarrow x, y$ sú súdelitelné císla,
    f) $A = \boldsymbol{Z}$, $x\varrho y \Leftrightarrow 2 \mid x + y$.

15. Zistite, kolko rôznych relácií ekvivalencie je možné definovat na množine $A = \{1, 2, 3\}$?

16. Na množine $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ je daný rozklad $T = \{\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{4\}\}$. Napíšte reláciu ekvivalencie na množine A indukovanú rozkladom T.

17. Na množine $\boldsymbol{R}$ je daná relácia $\varrho : x\varrho y \Leftrightarrow x - y \in \boldsymbol{Z}$. Dokážte, že ϱ je relácia ekvivalencie na množine $\boldsymbol{R}$. Aké sú triedy ekvivalencie prvku 0 a $-2,1$?

Orientované grafy

18. Daný je orientovaný graf $G = (V, H, e)$, kde $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}\}$, $e(h_1) = (1,1), e(h_2) = (1,2), e(h_3) = (3,2), e(h_4) = (2,3), e(h_5) = (1,4)$, $e(h_6) = (5,1), e(h_7) = (2,4), e(h_8) = (6,2), e(h_9) = (6,3), e(h_{10}) = (6,3), e(h_{11}) = (4,5)\}$.

a) Nakreslite diagram grafu G.
b) Urcte indukovaný podgraf $G(\{2,3,4,5\})$ grafu G. (Stací nakreslit jeho diagram)
c) Napíšte orientovaný sled (v grafe G) z vrcholu 2 do vrcholu 2 dlžky 0, 1, 2 a 4.
d) V grafe G nájdite orientovanú cestu z vrcholu 6 do vrcholu 1.
e) V grafe G nájdite orientovaný tah z vrcholu 1 do vrcholu 4, ktorý nie je cestou.
f) Je graf G silne súvislý?
g) Nájdite všetky silne súvislé komponenty grafu G.

1.3. Výsledky

1. a) i. b) i, s, b. c) -. d) i. e) s. f) i, s, b. g) i. h) i, s, b. **2.** a) -. b) a. c) a. d) k, a, -1. **3.** Operácia △ je distributívna vzhladom k operácii ☐; operácia ☐ je distributívna vzhladom k operácii △. **4.** a) 1, $\exists x \in \boldsymbol{R}\ \forall y \in \boldsymbol{R}\quad 3x-6 \le 2y$. b) 0, $\forall y \in \boldsymbol{R}\ \exists x \in \boldsymbol{R}\quad 3x-6 \le 2y$. c) 1, $\forall x \in \boldsymbol{R} \exists y \in \boldsymbol{R}\quad xy > y^2$. d) 1, $\exists y \in \boldsymbol{R}\ \forall x \in \boldsymbol{R}\quad xy > y^2$. e) 0, $\exists x \in \boldsymbol{R}\ \exists y \in \boldsymbol{R}\quad xy > y^2$. **5.** a) $\forall m \in \boldsymbol{N}$ $\exists n \in \boldsymbol{N}$ $(m < 4-n \wedge m+n$ je nepárne císlo) b). $\exists m \in \boldsymbol{N}\ \forall n \in \boldsymbol{N}$ $(m \ge 4-n \wedge m+n$ je nepárne císlo). **6.** a) tautológia. b) kontradikcia. c) splnitelná formula. d) tautológia. e) splnitelná formula. f) kontradikcia. **7.** a) nie. b) áno. c) áno. d) áno. **9.** a) áno. b) áno. c) áno. d) áno. e) nie. f) nie. **10.** $\bar{p} \vee q,\ (q \Rightarrow p) \Rightarrow q$. **11.** Napríklad a) $\varrho = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$. b) $\varrho = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,3)\}$. c) $\varrho = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,3)\}$. d) $\varrho = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1)\}$. e) $\varrho = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1),(2,3),(1,3)\}$. **12.** a) a. b) a, t. c) s. d) a. e) r, s, t. **13.** a) r, a, t. b) r, a, t. c) a, t. d) r, s, t. e) r, s, t. **14.** a) áno, $\varrho(1) = \{1,3,5\}, \varrho(2) = \{2\}, \varrho(4) = \{4\}$. b) nie. c) nie. d) nie. e) nie. f) áno, $\varrho(0) = \{2k; k \in Z\}, \varrho(1) = \{2k-1; k \in Z\}$ **15.** 5. **16.** $\varrho = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,5),(5,3),(5,5),(4,4)\}$. **17.** $\varrho(0) = \boldsymbol{Z}$, $\varrho(-2,1) = \{k-0,1;\ k \in \boldsymbol{Z}\}$. **18.** b) $G(\{2,3,4,5\}) = (V', H', e'),\quad V' = \{2,3,4,5\},\quad H' = \{h_3, h_4, h_7, h_{11}\},\quad e'(h_3) = (3,2), e'(h_4) = (2,3), e'(h_7) = (2,4), e'(h_{11}) = (4,5)\}$. c) 2; neexistuje; $2, h_4, 3, h_3, 2$; $2, h_7, 4, h_{11}, 5, h_6, 1, h_2, 2$ d) $6, h_8, 2, h_7, 4, h_{11} 5, h_6, 1$ alebo $6, h_9, 3, h_3, 2, h_7, 4, h_{11} 5, h_6, 1$. e) $1, h_2, 2, h_4, 3, h_3, 2, h_7, 4$. f) nie, lebo neexistuje or. sled z 2 do 6. g) $G(\{1,2,3,4,5\}),\ G(\{6\})$.

2. Booleovské funkcie

2.1. Riešené príklady

Príklad 1. Booleovskú funkciu urcenú B-výrazom $U(x,y,z) = yz\,\overline{(\bar{x}(\bar{y}z+\bar{z}))}$ zapíšte pomocou tabulky.

Riešenie.

x	y	z	yz	$\bar{y}z$	$\bar{y}z+\bar{z}$	$\bar{x}(\bar{y}z+\bar{z})$	$\overline{\bar{x}(\bar{y}z+\bar{z})}$	$U(x,y,z)$
0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	1	1

Príklad 2. Zistite, ci sú B-výrazy $U,\ V$ ekvivalentné, ak

a) $U(x,y)=\bar{x}(x+\bar{y}),\ V(x,y)=x+\bar{x}\bar{y}$,

b) $U(x,y,z)=\bar{y}\,\overline{(x+\bar{z})(\bar{x}+z)},\ V(x,y,z)=\overline{y+xz+\bar{x}\bar{z}}$

Riešenie.

a) Zostavme tabulky booleovských funkcií urcených B-výrazmi $U,\ V$.

x	y	$x+\bar{y}$	$f_U(x,y)$	$\bar{x}\bar{y}$	$f_V(x,y)$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1

Z tabulky vidíme, že $f_U \neq f_V$, a teda B-výrazy $U,\ V$ nie sú ekvivalentné.

b) $U(x,y,z)=\bar{y}\,\overline{(x+\bar{z})(\bar{x}+z)}\cong\bar{y}\left(\overline{(x+\bar{z})}+\overline{(\bar{x}+z)}\right)\cong\bar{y}(\bar{x}z+x\bar{z})$,

$V(x,y,z)=\overline{y+xz+\bar{x}\bar{z}}\cong\bar{y}\,\overline{(xz)}\,\overline{(\bar{x}\bar{z})}\cong\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})(x+z)\cong\bar{y}(\bar{x}z+x\bar{z})$.

Teda $U(x,y,z)\cong V(x,y,z)$.

Príklad 3. Nájdite UNDF a UNKF funkcie $g(x,y,z)=\bar{x}y+x\bar{y}z+y\bar{z}$.

Riešenie. Nájdeme množinu jednotkových bodov funkcie g:

$$J(g)=J(\bar{x}y)\cup J(x\bar{y}z)\cup J(y\bar{z})=\{(0,1,0),(0,1,1)\}\cup\{(1,0,1)\}\cup\{(0,1,0),(1,1,0)\}$$

$$=\{(0,1,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$$

Teraz lahko zostavíme tabulku funkcie g. K tabulke pridáme ešte dva stlpce. Do prvého z nich zapíšeme elementárne súcinové cleny, ktorých jednotkové body sú jednotkovými bodmi funkcie g, a do druhého zase elementárne súctové cleny, ktorých nulové body sú nulovými bodmi funkcie g.

x	y		g		
0	0	0	0		$x+y+z$
0	0	1	0		$x+y+\bar{z}$
0	1	0	1	$\bar{x}y\bar{z}$	
0	1	1	1	$\bar{x}yz$	
1	0	0	0		$\bar{x}+y+z$
1	0	1	1	$x\bar{y}z$	
1	1	0	1		
1	1	1	0		$\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}$

$\mathrm{UNDF}(g)=\bar{x}y\bar{z}+\bar{x}yz+x\bar{y}z+xy\bar{z}$,

$\mathrm{UNKF}(g)=(x+y+z)(x+y+\bar{z})(\bar{x}+y+z)(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})$.

Príklad 4. Nájdite jednu NDF funkcie $h(x,y,z)=(x\bar{z}+\bar{y}z)\overline{(x\bar{y}z)}$ rôznu od UNDF.

Riešenie.

$h(x,y,z)=(x\bar{z}+\bar{y}z)(\bar{x}+y+\bar{z})=xy\bar{z}+x\bar{z}+\bar{x}\bar{y}z=x\bar{z}+\bar{x}\bar{y}z,\quad \mathrm{NDF}(h)=x\bar{z}+\bar{x}\bar{y}z.$

Príklad 5. Nájdite jednu NKF funkcie $h(x,y,z)=(x\bar{z}+\bar{y}z)\overline{(x\bar{y}z)}$ rôznu od UNKF.
Riešenie.

$$h(x,y,z)=(x\bar{z}+\bar{y}z)(\bar{x}+y+\bar{z})=(x\bar{z}+\bar{y})(x\bar{z}+z)(\bar{x}+y+\bar{z})=(x+\bar{y})(\bar{z}+\bar{y})(x+z)(\bar{x}+y+\bar{z})=$$
$$=(x+\bar{y})(\bar{y}+\bar{z})(x+z)(\bar{x}+y+\bar{z})$$
$$\mathrm{NKF}(h)=(x+\bar{y})(\bar{y}+\bar{z})(x+z)(\bar{x}+y+\bar{z}).$$

Príklad 6. Pomocou B-výrazu napíšte pravdivostné ohodnotenie výrokovej formuly $a=\overline{(p\Rightarrow q)}\vee q$.
Riešenie. Najprv nájdeme k výrokovej formule a tautologicky ekvivalentnú formulu, ktorá z logických spojok obsahuje len $\vee, \wedge, \overline{}$.

$$a=\overline{(p\Rightarrow q)}\vee q\sim\overline{(\bar{p}\vee q)}\vee q\sim(p\wedge\bar{q})\vee q=b$$

Ak pravdivostnými ohodnoteniami výrokových premenných $p,\ q$ sú v poradí premenné $x,\ y$, tak

$$ph_a(x,y)=ph_b(x,y)=x\bar{y}+y.$$

Príklad 7. Nájdite UNDF a UNKF výrokovej formuly $a=((p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow r))\Rightarrow\overline{(q\Rightarrow r)}$.
Riešenie. Najprv vyjadríme pravdivostné ohodnotenie formuly a pomocou B-výrazu.

$$a\sim((\bar{p}\vee q)\wedge(\bar{p}\vee r))\Rightarrow\overline{(\bar{q}\vee r)}\sim\overline{((\bar{p}\vee q)\wedge(\bar{p}\vee r))}\vee(q\wedge\bar{r})$$

Ak zvolíme $ph_p=x,\ ph_q=y,\ ph_r=z$, tak

$$ph_a(x,y,z)=\overline{(\bar{x}+y)(\bar{x}+z)}+y\bar{z}.$$

Teraz nájdeme UNDF booleovskej funkcie $ph_a(x,y,z)$.

$$ph_a(x,y,z)=x\bar{y}+x\bar{z}+y\bar{z}=x\bar{y}(z+\bar{z})+x(y+\bar{y})\bar{z}+(x+\bar{x})y\bar{z}=$$
$$=x\bar{y}z+x\bar{y}\bar{z}+xy\bar{z}+\bar{x}y\bar{z},$$
$$\mathrm{UNDF}(ph_a)=x\bar{y}z+x\bar{y}\bar{z}+xy\bar{z}+\bar{x}y\bar{z}.$$

Potom

$$\mathrm{UNDF}(a)=(p\wedge\bar{q}\wedge r)\vee(p\wedge\bar{q}\wedge\bar{r})\vee(p\wedge q\wedge\bar{r})\vee(\bar{p}\wedge q\wedge\bar{r}).$$

UNKF formuly a môžeme získať napr. pomocou tabuľky booleovskej funkcie $ph_a(x,y,z)$.

$x\ y\ z$	$ph_a(x,y,z)$	
0 0 0	0	$x+y+z$
0 0 1	0	$x+y+\bar{z}$
0 1 0	1	
0 1 1	0	$x+\bar{y}+\bar{z}$
1 0 0	1	
1 0 1	1	
1 1 0	1	
1 1 1	0	$\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}$

$$\mathrm{UNKF}(ph_a) = (x+y+z)(x+y+\bar z)(x+\bar y+\bar z)(\bar x+\bar y+\bar z).$$

Potom

$$\mathrm{UNKF}(a) = (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\bar r)\wedge(p\vee\bar q\vee\bar r)\wedge(\bar p\vee\bar q\vee\bar r).$$

Príklad 8. Ukážte, že množina $\{h\}$, kde $h:\boldsymbol{B}^3\to\boldsymbol{B}$, $h(x,y,z)=\overline{xyz}$, je úplný systém booleovských funkcií.
Riešenie. Kedže $\{+,\cdot,\bar{\ }\}$ je úplný systém booleovských funkcií, stačí ukázat, že funkcie $x+y$, xy a $\bar x$ sa dajú vyjadrit len pomocou funkcie h.

$$\bar x=\overline{xxx}=h(x,x,x),$$

$$x+y=\overline{\overline{x+y}}=\overline{\bar x\,\bar y}=\overline{\bar x\bar y.1}=\overline{\overline{x.1.1}\,\overline{yy.1}.1}=h(h(x,1,1),h(y,y,1),1),$$

$$xy=\overline{\overline{xy}}=\overline{\overline{xy.1}.1.1}=h(h(x,y,1),1,1).$$

Príklad 9. Funkciu $f(x,y,z)=\overline{(x+\bar yz)}(x+z)$ vyjadrite pomocou S$_2$-výrazov.
Riešenie.

$$f(x,y,z)=\overline{(x+\bar yz)}\,\overline{\overline{(x+z)}}=\bar x\overline{(\bar yz)}\,\overline{\bar x\bar z}=\left(\bar x\overline{(\bar yz)}\right)\overline{(\bar x\bar z)}=\overline{\overline{\left(\bar x\overline{(\bar yz)}\right)}}\,\overline{(\bar x\bar z)}=$$

$$=(((x\uparrow)\uparrow((y\uparrow)\uparrow z))\uparrow).((x\uparrow)\uparrow(z\uparrow))=$$

$$=\overline{\overline{(((x\uparrow)\uparrow((y\uparrow)\uparrow z))\uparrow).((x\uparrow)\uparrow(z\uparrow))}}=$$

$$=((((x\uparrow)\uparrow((y\uparrow)\uparrow z))\uparrow)\uparrow((x\uparrow)\uparrow(z\uparrow)))\uparrow$$

Príklad 10. Funkciu $f(x,y,z,u)=(\bar x+z+\bar u)(x+y)(\bar x+y+\bar z+u)$ vyjadrite pomocou P-výrazov.
Riešenie.

$$f(x,y,z,u)=\overline{\overline{(\bar x+z+\bar u)(x+y)(\bar x+y+\bar z+u)}}=\overline{\overline{(\bar x+z+\bar u)}+\overline{(x+y)}+\overline{(\bar x+y+\bar z+u)}}=$$

$$=((\bar x\downarrow z\downarrow\bar u)\downarrow(x\downarrow y)\downarrow(\bar x\downarrow y\downarrow\bar z\downarrow u))=$$

$$=(((x\downarrow)\downarrow z\downarrow(u\downarrow))\downarrow(x\downarrow y)\downarrow((x\downarrow)\downarrow y\downarrow(z\downarrow)\downarrow u))$$

Príklad 11. Nakreslite Karnaughovu mapu booleovskej funkcie $f(x,y,z)=(\bar x+y)(y+z)$.
Riešenie. Pre nulové body funkcie f platí:

$$N(f)=N(\bar x+y)\cup N(y+z)=\{(1,0,0),(1,0,1),(0,0,0)\}.$$

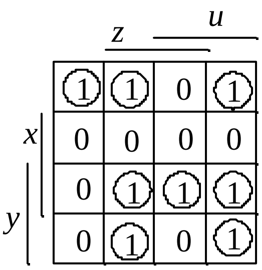
Teraz už lahko zostavíme Karnaughovu mapu funkcie f.

		y	y	
			z	z
	0	1	1	1
x	0	1	1	0

Príklad 12. Pomocou Karnaughovej mapy nájdite UNDF a jednu NDF (rôznu od UNDF) funkcie $h(x,y,z,u)=(\bar{y}+z+u)(x+\bar{z}+\bar{u})(\bar{x}+y)$.

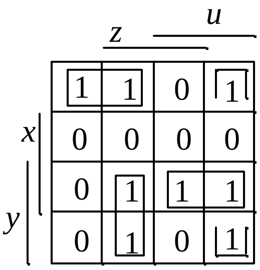
Riešenie.

$N(h)=\{(0,1,0,0),(1,1,0,0),(0,0,1,1),(0,1,1,1),(1,0,0,0),(1,0,0,1),(1,0,1,0),(1,0,1,1)\}$



1	1	0	1
0	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1

$\text{UNDF}(h)=\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{u}+\bar{x}\bar{y}z\bar{u}+\bar{x}\bar{y}\bar{z}u+xyz\bar{u}+xyzu+xy\bar{z}u+\bar{x}yz\bar{u}+\bar{x}y\bar{z}u,$



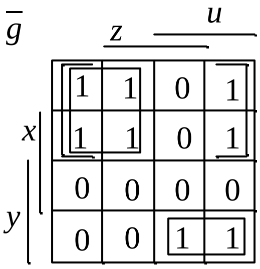
1	1	0	1
0	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1

$\text{NDF}(h)=\bar{x}\bar{y}\bar{u}+\bar{x}\bar{z}u+yz\bar{u}+xyu.$

Príklad 13. Pomocou Karnaughovej mapy nájdite NKF (rôznu od UNKF) funkcie $g(x,y,z,u)=$ $=xy+\bar{x}y\bar{u}+\bar{y}zu.$

Riešenie. Vytvoríme Karnaughovu mapu funkcie $\bar{g}$ a pomocou nej nájdeme $\text{NDF}(\bar{g})$.

$$J(g)=J(xy)\cup J(\bar{x}y\bar{u})\cup J(\bar{y}zu)=\{(1,1,0,0),(1,1,0,1),(1,1,1,0),(1,1,1,1),$$
$$(0,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(1,0,1,1)\}$$
$$J(\bar{g})=\boldsymbol{B}^4\setminus J(g)=\{(0,0,0,0),(0,0,0,1),(0,0,1,0),(0,1,0,1),(0,1,1,1),$$
$$(1,0,0,0),(1,0,0,1),(1,0,1,0)\}$$



1	1	0	1
1	1	0	1
0	0	0	0
0	0	1	1

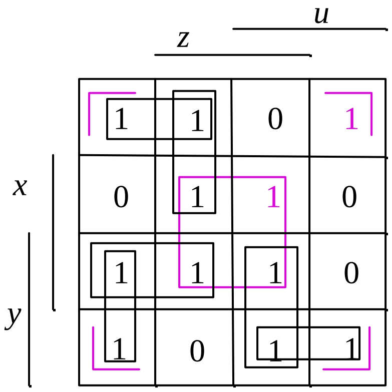
$\text{NDF}(\bar{g})=\bar{y}\bar{u}+\bar{y}\bar{z}+\bar{x}yu,$

$g(x,y,z,u)=\overline{\bar{y}\bar{u}+\bar{y}\bar{z}+\bar{x}yu}=(y+u)(y+z)(x+\bar{y}+\bar{u}),$

$\text{NKF}(g)=(y+u)(y+z)(x+\bar{y}+\bar{u}).$

Príklad 14. Nájdite SNDF a jadro funkcie $h(x,y,z,u)=\bar{x}\bar{y}\bar{u}+\bar{x}\bar{z}u+xz+yz\bar{u}+\bar{x}yu.$

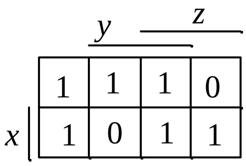
Riešenie. Na Karnaughovej mape funkcie h vyhladáme všetky konfigurácie jednotkových bodov, ktoré nie sú castou väcšej konfigurácie jednotkových bodov – tým získame všetky prosté implikanty funkcie h. Ich súctom je SNDF. Jadro tvoria tie prosté implikanty, ktoré obsahujú jednotkový bod funkcie h, ktorý nie je jednotkovým bodom žiadneho iného prostého implikanta tejto funkcie.



$$\text{SNDF}(h) = \bar{x}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{u} + \bar{y}z\bar{u} + xz + xy\bar{u} + y\bar{z}\bar{u} + yzu + \bar{x}yu,$$

$$\text{Jadro}(h) = \bar{x}\bar{z} + xz.$$

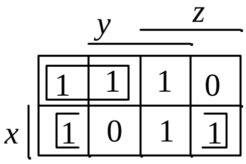
Príklad 15. Nájdite všetky INDF a MNDF funkcie $h(x,y,z) = (x+y+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+z)$.
Riešenie. Ako vidieť z Karnaughovej mapy, každý jednotkový bod funkcie h je jednotkovým

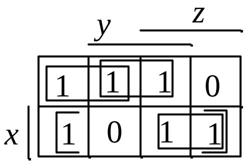


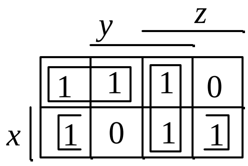
bodom dvoch prostých implikantov, preto $\text{Jadro}(h) = 0$.
Na pokrytie jednotkového bodu $(0,0,0)$ prostými implikantmi máme tri možnosti:

1. vyberieme $\bar{x}\bar{z}$ a nevyberieme $\bar{y}\bar{z}$,
2. vyberieme $\bar{y}\bar{z}$ a nevyberieme $\bar{x}\bar{z}$,
3. vyberieme $\bar{x}\bar{z}$ aj $\bar{y}\bar{z}$.

1. Kedže nevyberáme $\bar{y}\bar{z}$, musíme jednotkový bod $(1,0,0)$ pokryt prostým implikantom $x\bar{y}$. Ostávajú nepokryté dva jednotkové body $(0,1,1),(1,1,1)$.







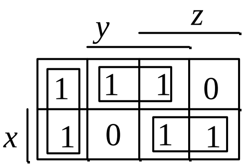
a) Bod $(0,1,1)$ môžeme pokryt prostým implikantom $\bar{x}y$ alebo yz. Vyberme $\bar{x}y$. Na pokrytie bodu $(1,1,1)$ nemôžeme použit prostý implikant yz, lebo už vybratý $\bar{x}y$ by bol nadbytocný, ostáva nám prostý implikant xz. Máme už pokryté všetky jednotkové body funkcie h, získali sme teda

$$\text{INDF}_1(h) = \bar{x}\bar{z} + x\bar{y} + \bar{x}y + xz.$$

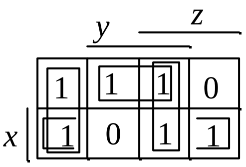
a) Bod $(0,1,1)$ teraz pokryme prostým implikantom yz. Tým pádom máme pokryté všetky jednotkové body funkcie h a získali sme

$$\text{INDF}_2(h) = \bar{x}\bar{z} + x\bar{y} + yz.$$

2. Kedže nevyberáme $\bar{x}\bar{z}$, musíme jednotkový bod $(0,1,0)$ pokryt prostým implikantom $\bar{x}y$. Jednotkové body $(1,1,1),(1,0,1)$ môžeme pokryt bud jedným prostým implikantom xz alebo dvomi prostými implikantmi yz, $x\bar{y}$. Tak dostávame dalšie dve INDF.

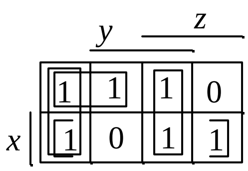


$\mathrm{INDF}_3(h) = \bar{y}\bar{z} + \bar{x}y + xz,$

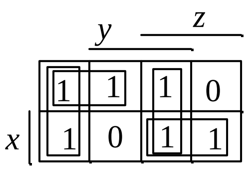


$\mathrm{INDF}_4(h) = \bar{y}\bar{z} + \bar{x}y + yz + x\bar{y}.$

3. V tomto prípade na pokrytie jednotkového bodu $(0,1,1)$ môžeme použit iba . Posledný jednotkový bod $(1,0,1)$ pokryjeme prostým implikantom $x\bar{y}$ alebo xy. Dostávame tak dalšie dve INDF funkcie .



$\mathrm{INDF}_5(h) = \bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{z} + yz + x\bar{y},$



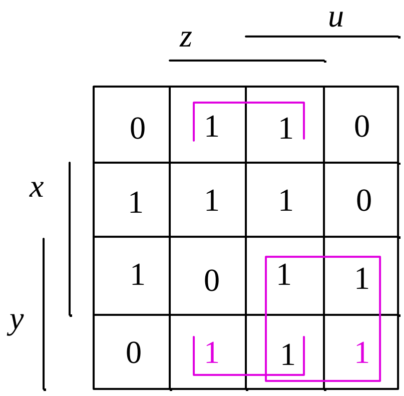
$\mathrm{INDF}_6(h) = \bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{z} + yz + xz.$

Spocítaním písmen jednotlivých INDF zistíme, že funkcia h má dve minimálne normálne disjunktívne formy:

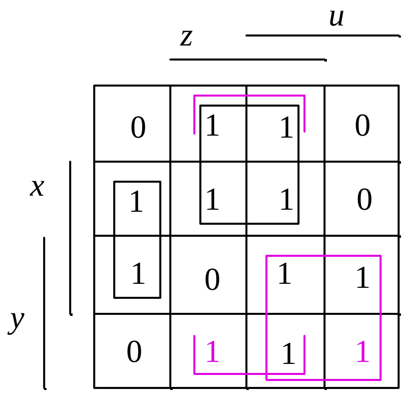
$$\mathrm{MNDF}_1(h) = \mathrm{INDF}_2(h) = \bar{x}\bar{z} + x\bar{y} + yz,$$
$$\mathrm{MNDF}_2(h) = \mathrm{INDF}_3(h) = \bar{y}\bar{z} + \bar{x}y + xz,$$

Príklad 16. Nájdite všetky INDF a MNDF funkcie h, ak $N(h) = \{(0,0,0,0), (0,0,0,1), (1,0,0,1), (1,1,1,0), (0,1,0,0)\}$.

Riešenie. Nájdeme jadro.



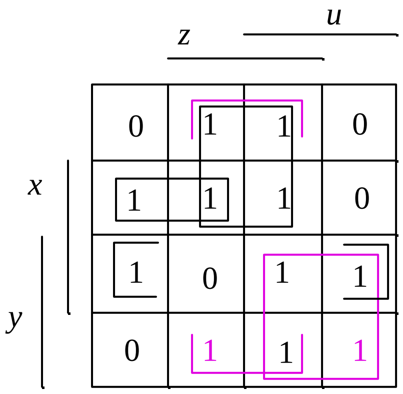
$\mathrm{Jadro}(h) = \bar{x}z + yu.$



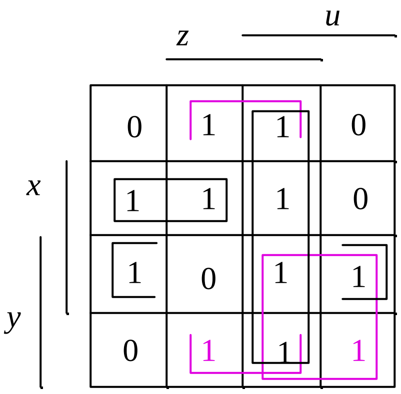
1. Na pokrytie jednotkového bodu $(1,0,0,0)$ vyberieme prostý implikant $x\bar{z}\bar{u}$ ale nevyberieme $x\bar{y}\bar{u}$. Potom bod $(1,0,1,0)$ musíme pokryt implikantom $\bar{y}z$.

$$\mathrm{INDF}_1(h) = \mathrm{Jadro}(h) + x\bar{z}\bar{u} + \bar{y}z.$$

2. Na pokrytie jednotkového bodu $(1,0,0,0)$ vyberieme prostý implikant $x\bar{y}\bar{u}$ ale nepoužijeme $x\bar{z}\bar{u}$. Potom bod $(1,1,0,0)$ musíme pokryt prostým implikantom $xy\bar{z}$. Ostávajúci bod $(1,0,1,1)$ môžeme pokryt prostým implikantom $\bar{y}z$ alebo zu. Dostávame tak další dve INDF

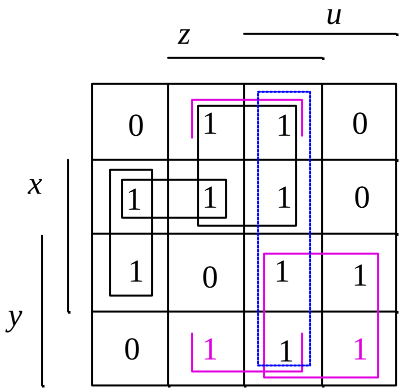


0	1	1	0
1	1	1	0
1	0	1	1
0	1	1	1



0	1	1	0
1	1	1	0
1	0	1	1
0	1	1	1

$\text{INDF}_2(h) = \text{Jadro}(h) + x\bar{y}\bar{u} + xy\bar{z} + \bar{y}z,$ $\qquad\text{INDF}_2(h) = \text{Jadro}(h) + x\bar{y}\bar{u} + xy\bar{z} + zu.$



0	1	1	0
1	1	1	0
1	0	1	1
0	1	1	1

3. Na pokrytie jednotkového bodu $(1,0,0,0)$ vyberieme prostý implikant $x\bar{z}\bar{u}$ aj $x\bar{y}\bar{u}$. Na pokrytie posledného jednotkového bodu $(1,0,1,1)$ môžeme použit prostý implikant $\bar{y}z$ alebo zu. Dostali sme další dve INDF.

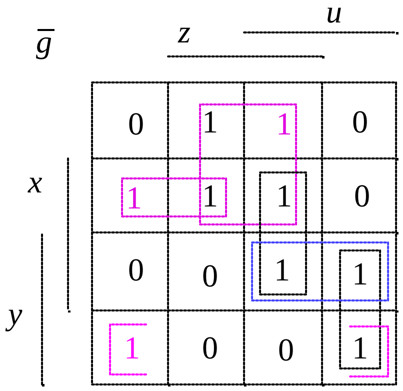
$\text{INDF}_3(h) = \text{Jadro}(h) + x\bar{z}\bar{u} + x\bar{y}\bar{u} + \bar{y}z$

$\text{INDF}_4(h) = \text{Jadro}(h) + x\bar{z}\bar{u} + x\bar{y}\bar{u} + zu.$

$\text{MNKF}(h) = \text{INDF}_1(h) = \bar{x}z + yu + x\bar{z}\bar{u} + \bar{y}z.$

Príklad 17. Nájdite všetky MNKF funkcie $g(x,y,z,u) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + xy\bar{u} + \bar{y}\bar{z}u + \bar{x}yz.$

Riešenie. Najprv nájdeme všetky MNDF funkcie $\bar{g}$.



0	1	1	0
1	1	1	0
0	0	1	1
1	0	0	1

$\text{Jadro}(\bar{g}) = \bar{y}z + x\bar{y}\bar{u} + \bar{x}y\bar{z},$

$\text{INDF}_1(\bar{g}) = \text{Jadro}(\bar{g}) + xzu + y\bar{z}u,$

$\text{INDF}_2(\bar{g}) = \text{Jadro}(\bar{g}) + xyu = \text{MNDF}(\bar{g}).$

Potom

$$g(x,y,z,u) = \overline{\overline{g}(x,y,z,u)} = \overline{\bar{y}z + x\bar{y}\bar{u} + \bar{x}y\bar{z} + xyu} = (y+\bar{z})(\bar{x}+y+u)(x+\bar{y}+z)(\bar{x}+\bar{y}+\bar{u}),$$

$$\text{MNKF}(g) = (y+\bar{z})(\bar{x}+y+u)(x+\bar{y}+z)(\bar{x}+\bar{y}+\bar{u}).$$

2.2. Cvicenia

Booleovské funkcie a výrazy

1. Booleovskú funkciu urcenú B-výrazom $U(x,y,z)=\overline{(\bar{x}z+y\bar{z})}+xyz$ zapíšte pomocou tabulky.
2. Zistite, ci sú B-výrazy U a V ekvivalentné.
   a) $U(x,y)=\overline{x\bar{y}+\overline{(\bar{x}+y)}},\quad V(x,y)=\bar{x}\bar{y}+xy,$
   b) $U(x,y,z)=\overline{(x+y)\overline{(\bar{x}z)}},\ V(x,y,z)=\overline{\overline{(\bar{x}\bar{y})}\ \overline{(\bar{x}z)}},$
   c) $U(x,y,u,v)=x\bar{v}+xy+\bar{x}\bar{u}v,\quad V(x,y,u,v)=(x+v)(x+\bar{u})(\bar{x}+y),$
   d) $U(x,y,z,u)=x\bar{u}+xy+\bar{x}\bar{z}u,\quad V(x,y,z,u)=(x+u)(x+\bar{z})(\bar{x}+y+\bar{u}).$

3. Pomocou tabulky ekvivalencií B-výrazov ukážte, že B-výrazy U a V sú ekvivaletné.
   a) $U(x,y,z)=x+\bar{y}+y(x+\bar{z}),\quad V(x,y,z)=\bar{z}+\overline{\bar{x}y},$
   b) $U(x,y,z)=\overline{(x+y)\overline{(\bar{x}z)}},\ V(x,y,z)=\overline{\overline{(\bar{x}\bar{y})}\overline{(\bar{x}z)}},$
   c) $U(x,y,z,u)=x\bar{u}+xy+\bar{x}\bar{z}u,\quad V(x,y,z,u)=(x+u)(x+\bar{z})(\bar{x}+y+\bar{u}).$

4. Nájdite všetky jednotkové a nulové body funkcie g bez použitia tabul ky funkcie.
   a) $g(x,y,z)=\bar{x}z+xy+x\bar{y}\bar{z},$
   b) $g(x,y,z)=(x+\bar{y})(x+z)\bar{z},$
   c) $g(x,y,z)=(x+\bar{y}+\bar{z})\overline{(x+\bar{y})z}\,.$

UNDF a UNKF B-výrazov a booleovských funkcií

5. Aké je oznacenie elementárneho súcinového ci súctového clena?
   a) $x\bar{y}z,\quad x+\bar{y}+z,$
   b) $xy\bar{z}u,\quad x+y+\bar{z}+u$
   c) $x\bar{y}z\bar{u},\quad x+\bar{y}+z+\bar{u}.$

6. Ktorý elementárny súctový ci súcinový clen má oznacenie
   a) $S_0(x,y,z),\ T_0(x,y,z),$
   b) $S_{12}(x,y,z,u),\ T_{12}(x,y,z,u)$

7. Nájdite UNDF a UNKF B-výrazu, ci funkcie
   a) $U(x,y,z)=\overline{(x+\bar{y})}z+(x+z)y,$
   b) $V(x,y,z,u)=(x+y+u)(x+z+u)(\bar{x}+z+\bar{u}),$
   c) $g(x,y,z)=(\overline{(xy+\bar{z})}y+x(\bar{y}+z))(\overline{xy}+z)$
   d) $h(x,y,z,u)=x\bar{y}+\bar{x}\bar{y}u+xyz+\bar{z}u+z\bar{u}.$

Normálna disjunktívna a konjunktívna forma
B-výrazov a booleovských funkcií

8. Nájdite jednu NDF (rôznu od UNDF) a jednu NKF (rôznu od UNKF) funkcie
   a) $g(x,y,z)=\overline{(x\bar{z}+yz)}(xy+\bar{y}),$

b) $g(x,y,z)=\overline{(\bar{x}+\bar{y}z)}+(\bar{x}+y)\bar{z}$.

9. $U(x,y,z)=(\bar{x}+y)(x+y+z)(\bar{y}+z)$. Nájdite jednu NDF (rôznu od UNDF) B-výrazu $\overline{U}$.

10. $V(x,y,z)=\bar{x}z+xy\bar{z}+\bar{y}$. Nájdite jednu NKF (rôznu od UNKF) B-výrazu $\overline{V}$.

Normálna disjunktívna a konjunktívna forma výrokových formúl

11. Napíšte výrokovú formulu, ktorej pravdivostné ohodnotenie je reprezentované B-výrazom
   - a) $\overline{\left(x+\overline{(y+\bar{z})}\right)}(xz+y\bar{z})$,
   - b) $1\cdot x\bar{y}z+0\cdot\bar{x}z+1\cdot\bar{x}y\bar{z}$,
   - c) $(0+x+y)(1+\bar{x}+\bar{y})(0+\bar{x}+\bar{y}+z)$.

12. Pomocou B-výrazu napíšte pravdivostné ohodnotenie výrokovej formuly a.
   - a) $a=p\Rightarrow q$,
   - b) $a=(p\Rightarrow q)\Rightarrow r$,
   - c) $a=p\Rightarrow(q\Rightarrow r)$,
   - d) $a=(p\wedge q)\Rightarrow r$,
   - e) $a=\overline{((p\vee\bar{q})\Rightarrow r)}\vee(\bar{p}\wedge\bar{r})$.

13. Nájdite UNDF a UNKF výrokovej formuly a.
   - a) $a=p\Rightarrow q$,
   - b) $a=(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(q\Rightarrow p)$,
   - c) $a=\overline{((p\vee q)\wedge r)\Rightarrow(\bar{p}\vee\bar{r})}$.

14. Nájdite NDF a NKF (rôznu od UNDF resp. UNKF) výrokovej formuly b.
   - a) $b=\overline{(p\Rightarrow q)}\Rightarrow\overline{(\bar{p}\Rightarrow\bar{r})}$,
   - b) $b=\overline{(p\Rightarrow q)}\Leftrightarrow\overline{(\bar{p}\Rightarrow\bar{r})}$,
   - c) $b=((p\vee q)\wedge r)\Rightarrow(\bar{p}\vee r)$.

Úplný systém booleovských funkcií

15. Ukážte, že množina Q je USBF, ak
   - a) $Q=\{+,\overline{\ \ }\}$,
   - b) $Q=\{\cdot,\overline{\ \ }\}$.

16. Funkciu g vyjadrite pomocou P_2-výrazov.
   - a) $g(x,y,z)=\overline{(\bar{x}+\bar{y}z)}(x+yz)$,
   - b) $g(x,y,z)=(x+\bar{y})(\bar{x}+y+z)$,
   - c) $g(x,y,z)=\bar{y}z+xy\bar{z}$.

17. Funkciu g vyjadrite pomocou S_2-výrazov.
   - a) $g(x,y,z)=\overline{(\bar{x}+\bar{y}z)}(x+yz)$,

b) $g(x,y,z) = (x+\bar{y})(\bar{x}+y+z)$,
c) $g(x,y,z) = \bar{y}z + xy\bar{z}$.

18. Funkciu g vyjadrite pomocou P-výrazov.
   a) $g(x,y,z,u) = y\bar{u} + \bar{x}zu + x\bar{y}\bar{z}u$,
   b) $g(x,y,z,u) = (z+\bar{u})(y+\bar{z}+u)(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}+\bar{u})$.

19. Funkciu g vyjadrite pomocou S-výrazov.
   a) $g(x,y,z,u) = y\bar{u} + \bar{x}zu + x\bar{y}\bar{z}u$,
   b) $g(x,y,z,u) = (z+\bar{u})(y+\bar{z}+u)(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}+\bar{u})$.

Kombinacné logické siete

20. Nakreslite kombinacnú logickú siet priradenú k B-výrazu
   a) $U(x,y,z) = \overline{(x+\bar{y})}z + (x+z)y$,
   b) $U(x,y,z) = ((xyz+\bar{z})y + x(\bar{y}+z))(\overline{xy}+z)$,
   c) $U(x,y,z) = \bar{x} + x\bar{y} + xy\bar{z}$,
   d) $U(x,y,z) = (x+\bar{y}+z)(\bar{x}+y)(y+\bar{z})$.

21. Nakreslite kombinacnú logickú siet zostavenú len z 2-vstupových clenov NOR (resp. NAND), ktorá realizuje funkciu
   a) $f(x,y,z) = \overline{(x+\bar{y})}z + (x+z)y$,
   b) $g(x,y,z) = \bar{x} + x\bar{y} + xy\bar{z}$,
   c) $h(x,y,z) = (x+\bar{y}+z)(\bar{x}+y)(y+\bar{z})$,

22. Nakreslite kombinacnú logickú siet zostavenú len z 3-vstupových clenov NOR (resp. NAND), ktorá realizuje funkciu
   a) $f(x,y,z,u) = \bar{x}z + xy\bar{z}u$
   b) $g(x,y,z,u) = (y+z)(x+\bar{y}+z+u)$

23. Nakreslite kombinacnú logickú siet zostavenú len z clenov NOR (resp. NAND) bez obmedzenia poctu vstupov, ktorá realizuje funkciu
   a) $f(x,y,z,u) = x\bar{y} + \bar{x}y\bar{z} + yz\bar{u} + \bar{x}\bar{y}zu$,
   b) $g(x,y,z,u) = (y+\bar{u})(x+\bar{y}+z)(\bar{x}+y+\bar{z}+\bar{u})$.

Booleovské funkcie $f : \boldsymbol{B}^n \to \boldsymbol{B}^m$

24. Napíšte booleovskú funkciu, ktorá by realizovala
   a) scitovanie dvoch nezáporných celých císel v dvojkovej sústave, z ktorých prvé je jednociferné a druhé dvojciferné,
   b) násobenie dvoch najviac dvojmiestnych nezáporných celých císel v dvojkovej sústave,

   a zostavte k nej kombinacnú logickú siet.

25. Nakreslite kombinacnú logickú siet dvojkového dekódera s dvomi adresovými vstupmi.

26. Kombinacný logický obvod má dva vstupy a štyri výstupy. Ked vstup (x_1, x_2) reprezentuje v binárnej sústave císlo $k = x_1 2^1 + x_2 2^0$, nech výstup (z_1, z_2, z_3, z_4) reprezentuje císlo $3k = z_1 2^3 + z_2 2^2 + z_3 2^1 + z_4 2^0$. V tabulkovej forme zapíšte logickú funkciu $f : \boldsymbol{B}^2 \to \boldsymbol{B}^4$, ktorá prislúcha k tomuto obvodu. Navrhnite jej fyzikálnu realizáciu pomocou clenov NAND.

27. Nech $A = a_1 a_0$, $B = b_1 b_0$ sú císla v dvojkovej sústave $(a_i, b_i \in \{0, 1\})$. Navrhnite kombinacnú logickú siet, pomocou ktorej vieme rozhodnút , ci $A = B$, $A < B$ alebo $A > B$.

28. Zostrojte kombinacnú logickú siet, ktorá má na vstupe dve n-tice núl a jednotiek $X = (x_1, \ldots, x_n), Y = (y_1, \ldots, y_n)$ a na výstupe 0, ak $X \neq Y$, a 1, ak $X = Y$.

29. Nakreslite kombinacnú logickú siet multiplexora s dvomi adresovými vstupmi.

30. Pomocou multiplexora s dvomi adresovými vstupmi generujte funkciu
    a) $g(x, y) = (((x \downarrow) \downarrow y) \downarrow (x \downarrow (y \downarrow))) \downarrow$,
    b) $g(x, y, z) = \overline{(x + y\bar{z})(\bar{x}z + \bar{y}\bar{z})}$.

31. Pomocou multiplexora s tromi adresovými vstupmi generujte funkciu
    a) $g(x, y, z) = (x + y\bar{z})(\bar{x}z + \bar{y}\bar{z})$,
    b) $g(x, y, z, u) = 1 \Leftrightarrow$ v štvorici (x, y, z, u) sú aspon tri jednotky.

Karnaughova mapa

32. Nakreslite Karnaughovu mapu booleovskej funkcie
    a) $g(x, y) = x\bar{y} + y$,
    b) $g(x, y) = (x + y)(\bar{x} + y)$,
    c) $g(x, y, z) = \bar{x}y + x\bar{y} + z$,
    d) $g(x, y, z, u) = ((((x \uparrow (y \uparrow) \uparrow u) \uparrow ((x \uparrow) \uparrow z)) \uparrow) \uparrow (y \uparrow z \uparrow (u \uparrow)) \uparrow (x \uparrow y))$,
    e) $g(x, y, z, u, v) = 1 \Leftrightarrow$ v pätici (x, y, z, u, v) je párny pocet jednotiek.

33. Funkcia f je urcená normálnou disjunktívnou formou. Nakreslite Karnaughovu mapu priradenú k tejto NDF, ak
    a) $f(x, y) = \bar{x}y + x$,
    b) $f(x, y, z) = \bar{x}yz + xy + \bar{y}z$,
    c) $f(x, y, z, u) = \bar{x}\bar{y}\bar{z}u + xyz + \bar{y}z$,
    d) $f(x, y, z, u) = \bar{x}z + \bar{z} + xyu$,
    e) $f(x, y, z, u) = y\bar{z} + \bar{y}u + \bar{x}\bar{z}\bar{u}$,
    f) $f(x, y, z, u, v) = xz\bar{u} + \bar{x}\bar{z} + xyu + \bar{x}yz\bar{v}$,
    g) $f(x, y, z, u, v) = \bar{y}z + xy\bar{v} + x\bar{y}\bar{z}u$.

34. Pomocou Karnaughovej mapy nájdite NDF (rôznu od UNDF) funkcie g, ak
    a) $J(g) = \{(0, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$,
    b) $N(g) = \{(1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$,
    c) $g(x, y, z, u, v) = 1 \Leftrightarrow$ v pätici (x, y, z, u, v) je viac jednotiek ako núl.

35. Pomocou Karnaughovej mapy nájdite NKF (rôznu od UNKF) funkcie g, ak

a) $g(x,y,z)=\bar{x}yz+xy+\bar{y}z,$
b) $g(x,y,z,u)=\bar{x}\bar{y}\bar{z}u+xyz+\bar{y}z,$
c) $g(x,y,z,u)=\bar{x}z+\bar{z}+xyu,$
d) $g(x,y,z,u)=y\bar{z}+\bar{y}u+\bar{x}\bar{z}\bar{u},$
e) $g(x,y,z,u,v)=xz\bar{u}+\bar{x}\bar{z}+xyu+\bar{x}yz\bar{v},$
f) $g(x,y,z,u,v)=\bar{y}z+xy\bar{v}+x\bar{y}\bar{z}u.$

36. V automobile máme štyri nezávislé ovládacie prvky p,t,d,h. Tieto nám umožnujú zapnút parkovacie svetlá P, tlmené svetlá T, dialkové svetlá D, hmlové svetlá H. Platia tieto zásady: Pri zapojení hociktorého zo svetiel T, D, H musia byt zapojené aj P. Pri zapojení H musia byt zapojené aj T. Svetlá T a D nemôžu byt zapojené súcasne.

Nájdite MNDF pre funkcie P,T,D,H premenných p,t,d,h. Navrhnite fyzikálnu realizáciu týchto funkcií pomocou clenov NOR.

Minimalizácia B-výrazov

37. Nájdite SNDF a jadro funkcie g, ak
a) $g(x,y,z)=\bar{x}\bar{z}+y\bar{z}+\bar{x}yz+xz,$
b) $g(x,y,z)=(x+y+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+z),$
c) $g(x,y,z,u)=xz+\bar{x}\bar{y}u+y\bar{z}u+\bar{x}y\bar{u}+\bar{y}\bar{z}\bar{u},$
d) $g(x,y,z,u)=(x+z+u)(y+\bar{z}+\bar{u}),$
e) $g(x,y,z,u)=\bar{x}\bar{z}+\bar{y}z+xzu+y\bar{z}u+\bar{x}y\bar{u},$
f) $g(x,y,z,u,v)=(x+z+\bar{u}+v)(y+\bar{z}+\bar{u}+\bar{v})(\bar{x}+y+u)(\bar{x}+\bar{y}+z+v)(x+\bar{y}+\bar{u}+v).$

38. Nájdite všetky INDF a MNDF funkcie g, ak
a) $g(x,y,z)=\bar{x}\bar{z}+y\bar{z}+\bar{x}yz+xz,$
b) $g(x,y,z)=(x+y+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+z),$
c) $g(x,y,z,u)=\bar{x}y+x\bar{y}+\bar{x}z\bar{u}+y\bar{z}u+xz\bar{u},$
d) $g(x,y,z,u)=x\bar{y}+z\bar{u}+\bar{x}y\bar{z}+\bar{x}zu+x\bar{z}u,$
e) $g(x,y,z,u)=x\bar{z}+\bar{y}u+\bar{x}z\bar{u}+\bar{x}yu+xy\bar{u},$
f) $g(x,y,z,u)=\bar{x}z+x\bar{z}+\bar{x}\bar{y}u+yz\bar{u}+y\bar{z}u,$
g) $g(x,y,z,u)=y\bar{u}+\bar{x}z+\bar{y}\bar{z}u+x\bar{y}z+xy\bar{z},$
h) $g(x,y,z,u,v)=\bar{z}\bar{u}\bar{v}+y\bar{z}u+\bar{x}\bar{z}u+\bar{x}zu+yz\bar{u}v+x\bar{z}\bar{u}v.$

39. Nájdite všetky MNDF a MNKF funkcie g, ak

a) $g(x,y,z)=x\bar{y}+xy\bar{z}+\bar{x}\bar{y}z,$
b) $g(x,y,z,u)=(x+\bar{y}+\bar{z}+u)(\bar{x}+y+\bar{u})(x+\bar{y}+\bar{z}+\bar{u})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{u}),$
c) $g(x,y,z,u)=\bar{y}zu+x\bar{y}u+\bar{x}\bar{z}+yzu+x\bar{y}z,$
d) $g(x,y,z,u)=x\bar{y}zu+x\bar{z}\bar{u}+\bar{y}z\bar{u}+yzu+\bar{y}\bar{z}u$
e) $g(x,y,z,u)=(x+z+u)(x+y+\bar{z}+\bar{u})(x+z+\bar{u})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}+u),$
f) $g(x,y,z,u,v)=\bar{x}\bar{y}z+\bar{y}z\bar{u}+x\bar{y}u+xy\bar{z}+xyv+\bar{x}y\bar{z}\bar{u},$
g) $g(x,y,z,u,v)=(\bar{y}+z+\bar{u}+v)(z+\bar{u}+\bar{v})(x+\bar{y}+\bar{z}+\bar{u}+v)(y+\bar{z}+\bar{u}+\bar{v}).$

40. Nájdite MNDF a MNKF booleovskej funkcie $g(x,y,z,u,v)=\bar{x}z+yuv+\bar{y}zuv+\bar{x}y\bar{z}u\bar{v}$ a k tej z nich, ktorá má menej písmen nakreslite prislúchajúcu kombinacnú siet.

2.3. Výsledky

2. a) nie. b) áno. c) nie. d) áno. **4.** a) $J(g)=\{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,0),(1,1,1),(1,0,0)\}$.
b) $N(g)=\{(0,1,0),(0,1,1),(0,0,0),(0,0,1),(1,0,1),(1,1,1)\}$. c) $J(g)=\{(1,0,1),(1,1,1),$
$(0,0,1),(0,1,0)\}$. **5.** a) $S_5(x,y,z)$, $T_2(x,y,z)$. b) $S_{13}(x,y,z,u)$, $T_2(x,y,z,u)$. c) $S_{10}(x,y,z,u)$,
$T_5(x,y,z,u)$**.** **6.** a) $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, $x+y+z$. b) $xy\bar{z}\bar{u}$, $\bar{x}+\bar{y}+z+u$. **7.** a) $xyz+xy\bar{z}+\bar{x}yz$, $(x+y+z)$
$(x+y+\bar{z})(x+\bar{y}+z)(\bar{x}+y+z)(\bar{x}+y+\bar{z})$. b) $\bar{x}\bar{y}\bar{z}u+\bar{x}\bar{y}zu+\bar{x}y\bar{z}u+\bar{x}yz\bar{u}+\bar{x}yzu+x\bar{y}\bar{z}\bar{u}+x\bar{y}z\bar{u}+$
$x\bar{y}zu+xy\bar{z}\bar{u}+xyz\bar{u}+xyzu$, $(x+y+z+u)(x+y+\bar{z}+u)(x+\bar{y}+z+u)(\bar{x}+y+z+\bar{u})(\bar{x}+\bar{y}+z+\bar{u})$.
c) $\bar{x}yz+x\bar{y}z++x\bar{y}\bar{z}+xyz$, $(x+y+z)(x+y+\bar{z})(x+\bar{y}+z)(\bar{x}+\bar{y}+z)$.
d) $x\bar{y}zu+x\bar{y}z\bar{u}+x\bar{y}\bar{z}u+x\bar{y}\bar{z}\bar{u}+\bar{x}\bar{y}zu++\bar{x}\bar{y}\bar{z}u+xyzu+xyz\bar{u}+xy\bar{z}u+\bar{x}y\bar{z}u+\bar{x}yz\bar{u}+\bar{x}\bar{y}z\bar{u}$,
$(x+y+z+u)(x+\bar{y}+z+u)(\bar{x}+\bar{y}+z+u)(x+\bar{y}+\bar{z}+\bar{u})$. **8.** a) napr. $\mathrm{NDF}(g)=\bar{x}\bar{y}+\bar{y}\bar{z}$,
$\mathrm{NKF}(g)=\bar{y}(\bar{x}+\bar{z})$. b) napr. $\mathrm{NDF}(g)==xy+x\bar{z}+\bar{x}\bar{z}+y\bar{z}$, $\mathrm{NKF}(g)=(x+\bar{z})(y+\bar{z})$.
9. napr. $\mathrm{NDF}(\overline{U})=x\bar{y}+\bar{x}\bar{y}\bar{z}+y\bar{z}$. **10.** napr. $\mathrm{NKF}(\overline{V})=(x+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+z)y$.
11. a) $\overline{\left(p\vee\overline{(q\vee\bar{r})}\right)}\wedge((p\wedge r)\vee(q\wedge\bar{r}))$. b) $(p\wedge\bar{q}\wedge r)\vee(\bar{p}\wedge q\wedge\bar{r})$. c) $(p\vee q)\wedge(\bar{p}\vee\bar{q}\vee r)$. **12.**
a) $\mathrm{ph}_a(x,y)=\bar{x}+y$. b) $x\bar{y}+z$. c) $\bar{x}+\bar{y}+z$. d) $\bar{x}+\bar{y}+z$. e) $(x+\bar{y})z+x\bar{z}$. **13.** a) $\mathrm{UNDF}(a)=$
$=(\bar{p}\wedge\bar{q})\vee(\bar{p}\wedge q)\vee(p\wedge q)$, $\mathrm{UNKF}(a)=\bar{p}\vee q$. b) $\mathrm{UNDF}(a)=(p\wedge q)\vee(\bar{p}\wedge\bar{q})$, $\mathrm{UNKF}(a)=$
$=(p\vee\bar{q})\wedge(\bar{p}\vee q)$. c) $\mathrm{UNDF}(a)=(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\bar{q}\wedge r)$, $\mathrm{UNKF}(a)=(p\vee q\vee r)\wedge$
$\wedge(p\vee q\vee\bar{r})\wedge(p\vee\bar{q}\vee r)\wedge(p\vee\bar{q}\vee\bar{r})\wedge(\bar{p}\vee q\vee r)\wedge(\bar{p}\vee\bar{q}\vee r)$. **14.** a) napr. $\mathrm{NDF}(b)=$
$=\mathrm{NKF}(b)=\bar{p}\vee q$. b) napr. $\mathrm{NDF}(b)=(\bar{p}\wedge\bar{r})\vee(\bar{p}\wedge\bar{q})\vee(p\wedge q)\vee(q\wedge\bar{r})$, $\mathrm{NKF}(b)=(\bar{p}\vee q)\wedge$
$\wedge(p\vee\bar{q}\vee\bar{r})$. c) napr. $\mathrm{NDF}(b)=\mathrm{NKF}(b)=p\vee\bar{p}$. **16.** a) napr.$(((x\downarrow)\downarrow(y\downarrow(z\downarrow)))\downarrow)\downarrow$
$(x\downarrow((y\downarrow)\downarrow(z\downarrow)))$. b) napr. $(x\downarrow(y\downarrow))\downarrow((x\downarrow)\downarrow((y\downarrow z)\downarrow))$. c) napr. $((y\downarrow(z\downarrow))\downarrow$
$((((x\downarrow)\downarrow(y\downarrow))\downarrow)\downarrow z))\downarrow$. **17.** a) napr. $((x\uparrow((y\uparrow)\uparrow z))\uparrow)\uparrow((x\uparrow)\uparrow(y\uparrow z))\uparrow$. b)
napr. $(((x\uparrow)\uparrow y)\uparrow(x\uparrow((y\uparrow)\uparrow(z\uparrow))))\uparrow$. c) napr. $((y\uparrow)\uparrow z)\uparrow(((x\uparrow y)\uparrow)\uparrow z\uparrow))$. **18.**
a) $(((y\downarrow)\downarrow u)\downarrow(x\downarrow(z\downarrow)\downarrow(u\downarrow))\downarrow((x\downarrow)\downarrow y\downarrow z\downarrow(u\downarrow)))\downarrow$.
b) $((z\downarrow(u\downarrow))\downarrow(y\downarrow(z\downarrow)\downarrow u)\downarrow((x\downarrow)\downarrow(y\downarrow)\downarrow(z\downarrow)\downarrow(u\downarrow)))$.
19. a) $((y\uparrow(u\uparrow))\uparrow((x\uparrow)\uparrow z\uparrow u)\uparrow(x(y\uparrow)\uparrow(z\uparrow)\uparrow u))$.
b) $(((z\uparrow)\uparrow u)\uparrow((y\uparrow)\uparrow z\uparrow(u\uparrow))\uparrow(x\uparrow y\uparrow z\uparrow u))\uparrow$. **24.** a) súctom císel x, y_1y_2 je najviac trojciferné císlo $z_1z_2z_3$, kde $z_1=xy_1y_2$, $z_2=\bar{x}y_1+x\bar{y}_1y_2+xy_1\bar{y}_2$, $z_3=\bar{x}y_2+x\bar{y}_2$. b) súcinom císel x_1x_2, y_1y_2 je najviac štvorciferné císlo $z_1z_2z_3z_4$, kde $z_1=x_1x_2y_1y_2$,
$z_2=x_1\bar{x}_2y_1+x_1y_1\bar{y}_2$, $z_3=\bar{x}_1x_2y_1+x_1\bar{x}_2y_2+x_1\bar{y}_1y_2+x_2y_1\bar{y}_2$, $z_4=x_2y_2$. **25.** adresové vstupy: A,B, výstupy: $s_0,\dots,s_3$, pricom $s_i=S_i(A,B)$, kde $S_i(A,B)$ je i-tý elementárny súcinový clen. **26.** $f(x_1,x_2)=(x_1x_2,x_1\bar{x}_2,x_1\oplus x_2,x_2)$. **34.** a) napr. $\mathrm{NDF}(g)=y$. b) napr. $\mathrm{NDF}(g)=$
$=\bar{y}\bar{z}+x\bar{y}u+yz\bar{u}+\bar{z}u+\bar{x}y$. c) napr. $\mathrm{NDF}(g)=zuv+xzu+xzv+xuv+xyz+xyu+xyv+$
$+yzu+yuv+yzv$. **35.** a) napr. $\mathrm{NKF}(g)=(x+z)(y+z)$. b) napr. $\mathrm{NKF}(g)=(z+u)(x+\bar{y})(\bar{x}+z)$.
c) napr. $\mathrm{NKF}(g)=(\bar{x}+y+\bar{z})(\bar{x}+\bar{z}+u)$. d) napr. $\mathrm{NKF}(g)=(\bar{y}+\bar{z})(\bar{z}+u)(\bar{x}+y+u)$. e) napr.
$\mathrm{NKF}(g)=(x+y+\bar{z})(\bar{x}+z+u)(\bar{x}+y+\bar{u})(x+\bar{z}+\bar{v})$. f) napr. $\mathrm{NKF}(y+z+u)$. **37.** a) SNDF
$(g)=\bar{x}\bar{z}+y+xz=\mathrm{Jadro}(g)$. b) $\mathrm{SNDF}(g)=\bar{x}\bar{z}+\bar{y}\bar{z}+\bar{x}y+yz+xz+x\bar{y}$, $\mathrm{Jadro}(g)=0$. c) SNDF
$(g)=\bar{x}\bar{z}+\bar{x}\bar{y}u+\bar{y}zu+\bar{y}\bar{z}\bar{u}+x\bar{y}\bar{u}+xz+xyu+y\bar{z}u+\bar{x}y\bar{u}+yz\bar{u}$,
$\mathrm{Jadro}(g)=0$. d) $\mathrm{SNDF}(g)=z\bar{u}+\bar{z}u+x\bar{z}+x\bar{u}+xy+yz+yu$, $\mathrm{Jadro}(g)=z\bar{u}+\bar{z}u+yu$.
e) $\mathrm{SNDF}(g)=\bar{x}\bar{z}+\bar{x}\bar{y}+\bar{x}\bar{u}+\bar{y}z+xzu+xyu+y\bar{z}u$, $\mathrm{Jadro}(g)=\bar{y}z+\bar{x}\bar{u}$. f) $\mathrm{Jadro}(g)=\bar{x}\bar{u}+yv$,
$\mathrm{SNDF}(g)=\bar{x}\bar{u}+\bar{x}\bar{y}z\bar{v}+\bar{y}zu\bar{v}+\bar{x}\bar{z}v+\bar{z}uv+x\bar{y}u\bar{v}+xzu\bar{v}+x\bar{y}\bar{z}u+xyz+yz\bar{u}+yv$. **38.** a)
$\mathrm{INDF}(g)=\bar{x}\bar{z}+y+xz=\mathrm{MNDF}(g)$. b) $\mathrm{INDF}_{1,2}(g)=\bar{x}\bar{z}+x\bar{y}+\left\langle\begin{matrix}\bar{x}y+xz\\ yz\end{matrix}\right.$,

$\mathrm{INDF}_{3,4}(g) = \bar{y}\bar{z} + \bar{x}y + \left\langle \begin{array}{l} yz + x\bar{y} \\ xz \end{array} \right.$, $\mathrm{INDF}_{5}(g) = \bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{z} + yz + xz$, $\mathrm{MNDF}_{1}(g) = \bar{x}\bar{z} + x\bar{y} + yz$ $\mathrm{MNDF}_{2}(g) = \bar{y}\bar{z} + \bar{x}y + xz$. c) $\mathrm{Jadro}(g) = x\bar{y} + \bar{x}y + z\bar{u}$, $\mathrm{MNDF}_{1,2}(g) = \mathrm{INDF}_{1,2}(g) = \mathrm{Jadro}(g) + {} + \left\langle \begin{array}{l} x\bar{z}u \\ y\bar{z}u \end{array} \right.$. d) $\mathrm{Jadro}(g) = x\bar{y} + \bar{x}y + z\bar{u}$, $\mathrm{INDF}_{1,2}(g) == \mathrm{Jadro}(g) + z\bar{y} + \left\langle \begin{array}{l} x\bar{z}u \\ y\bar{z}u \end{array} \right.$ $\mathrm{INDF}_{3,4}(g) = \mathrm{Jadro}(g) + \bar{x}z + \left\langle \begin{array}{l} x\bar{z}u \\ y\bar{z}u \end{array} \right.$, každá INDF je aj MNDF. e) $\mathrm{Jadro}(g) = x\bar{z} + \bar{x}z + \bar{y}u$, $\mathrm{INDF}_{1,2}(g) = \mathrm{Jadro}(g) + \bar{z}u + \left\langle \begin{array}{l} xy\bar{u} \\ yz\bar{u} \end{array} \right.$, $\mathrm{INDF}_{3,4}(g) = \mathrm{Jadro}(g) ++ \bar{x}u + \left\langle \begin{array}{l} xy\bar{u} \\ yz\bar{u} \end{array} \right.$, každá INDF je aj MNDF. f) $\mathrm{Jadro}(g) = \bar{x}z + x\bar{z}$, $\mathrm{INDF}_{1,2}(g) = \mathrm{Jadro}(g) ++ \bar{z}u + \left\langle \begin{array}{l} xy\bar{u} \\ yz\bar{u} \end{array} \right.$, $\mathrm{INDF}_{3,4}(g) = {} = \mathrm{Jadro}(g) + \bar{x}u + \left\langle \begin{array}{l} xy\bar{u} \\ yz\bar{u} \end{array} \right.$, každá INDF je aj MNDF. g) $\mathrm{Jadro}(g) = y\bar{u} + \bar{y}u + \bar{x}z$, $\mathrm{INDF}_{1,2}(g) = {} = \mathrm{Jadro}(g) + z\bar{u} + \left\langle \begin{array}{l} x\bar{z}u \\ xy\bar{z} \end{array} \right.$, $\mathrm{INDF}_{1,2}(g) = \mathrm{Jadro}(g) ++ \bar{y}z + \left\langle \begin{array}{l} x\bar{z}u \\ xy\bar{z} \end{array} \right.$, každá INDF je aj MNDF.

h) $\mathrm{Jadro}(g) = x\bar{z}\bar{u} + \bar{x}u$, $\mathrm{INDF}_{1,2,3,4}(g) = \mathrm{Jadro}(g) + \bar{z}\bar{u}\bar{v} + \left\langle \begin{array}{l} y\bar{z}u + \left\langle \begin{array}{l} yz\bar{u}v \\ xy\bar{u}v + \bar{x}yzv \end{array} \right. \\ xy\bar{z} + \left\langle \begin{array}{l} yz\bar{u}v \\ \bar{x}yzv \end{array} \right. \end{array} \right.$,

$\mathrm{INDF}_{5,6,7,8}(g) = \mathrm{Jadro}(g) + \bar{x}\bar{z}\bar{v} ++ \left\langle \begin{array}{l} y\bar{z}u + \left\langle \begin{array}{l} yz\bar{u}v \\ xy\bar{u}v + \bar{x}yzv \end{array} \right. \\ xy\bar{z} + \left\langle \begin{array}{l} yz\bar{u}v \\ \bar{x}yzv \end{array} \right. \end{array} \right.$, **39.** a) $\mathrm{MNDF}(g) = x\bar{z} + {} + \bar{y}z$, $\mathrm{MNKF}(g) = (x + z)(\bar{y} + \bar{z})$. b) $\mathrm{MNDF}(g) = \bar{x}\bar{y} + x\bar{u} + \bar{x}\bar{z}$, $\mathrm{MNKF}(g) = (\bar{x} + \bar{u})(x + \bar{y} + \bar{z})$. c) $\mathrm{MNDF}(g) = \bar{y}u + \bar{x}\bar{z} + zu + x\bar{y}z$, $\mathrm{MNKF}_{1,2}(g) = (x + \bar{z} + u)(\bar{x} + z + u)(\bar{x} + \bar{y} + z) \left\langle \begin{array}{l} (\bar{x} + \bar{y} + u) \\ (\bar{y} + \bar{z} + u) \end{array} \right.$ d) $\mathrm{MNDF}(g) = x\bar{y} + x\bar{z}\bar{u} + \bar{y}z\bar{u} + yzu + \bar{y}\bar{z}u$, $\mathrm{MNKF}(g) = (x + z + u)(x + y + \bar{z} + \bar{u})(\bar{y} + \bar{z} + u)$ $(\bar{y} + z + \bar{u})$. e) $\mathrm{MNDF}(g) = x\bar{z} + x\bar{y} + \bar{x}yz + xu$, $\mathrm{MNKF}(g) = (x + z)(x + y + \bar{u})(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} + u)$. f) , $\mathrm{MNKF}(g) = (y + z + u)(\bar{y} + \bar{z} + v)(x + \bar{y} + \bar{z})(x + z + \bar{u})$. g) $\mathrm{MNDF}_{1,2}(g) = \bar{u} + \bar{y}\bar{v} + yzv + \left\langle \begin{array}{l} xz\bar{v} \\ xyz \end{array} \right.$, $\mathrm{MNKF}(g) = (\bar{y} + z + \bar{u})(y + \bar{u} + \bar{v})(x + \bar{y} + \bar{u} + v)$. **40.** a) , $\mathrm{MNKF}(g) = (z + u)(\bar{x} + u)(\bar{x} + v)(y + z)$.

3. Konecné automaty

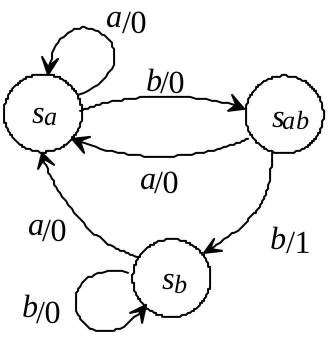
3.1. Riešené príklady

Príklad 1. Zariadenie používa vstupnú abecedu $X = \{a, b\}$ a výstupnú abecedu $Z = \{0, 1\}$. Pri vstupe b, ak predchádzajúce dva vstupy boli a, b (v tomto poradí) je výstup 1. V ostatných prípadoch je výstup 0 (napr. $\begin{array}{l|cccccccccc} \text{pri vstupe} & b & a & b & b & b & a & a & b & b & a \\ \hline \text{výstup je} & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$). Opíšte zariadenie ako automat.

Riešenie. Zariadenie opíšeme ako automat , kde $X = \{a, b\}$, $Z = \{0, 1\}$. $S = \{s_a, s_{ab}, s_b\}$, pricom automat prejde do stavu:

s_a vždy po vstupe písmena a,
s_{ab} po vstupe písmena b, ak predchádzajúci vstup bol a,
s_b po vstupe písmena b, ak predchádzajúci vstup nebol a.

Graf automatu A:



Tabulka automatu A:

	a	b
s_a	s_a / 0	s_{ab} / 0
s_b	s_a / 0	s_b / 0
s_{ab}	s_a /0	s_b / 1

Príklad 2. Nájdite ekvivalentné stavy automatu A a zostavte tabulku k nemu redukovaného automatu A_R, ak automat A je daný tabulkou

	a	b
1	1/0	2/0
2	4/1	9/0
3	7/0	9/0
4	3/1	3/0
5	8/0	4/0
6	7/0	4/0
7	3/1	4/1
8	6/1	9/1
9	3/1	6/0

Riešenie. Priamo z tabulky vidiet , že $\tilde{E}_1 = \{\{1, 3, 5, 6\}, \{2, 4, 9\}, \{7, 8\}\}$. Teraz potrebujeme zistit , ci

$1 E_2\, 3$, $3 E_2\, 5$, $5 E_2\, 6$ $2 E_2\, 4$, $4 E_2\, 9$, $7 E_2\, 8$
$1 E_2\, 5$, $3 E_2\, 6$, $2 E_2\, 9$,
$1 E_2\, 6$,

$\delta(1, a) = 1,\ \delta(3, a) = 7,\ 1 E_1 7 \Rightarrow 1 E_2 3,$
$\delta(1, a) = 1,\ \delta(5, a) = 8,\ 1 E_1 8 \Rightarrow 1 E_2 5,$
$\delta(1, a) = 1,\ \delta(6, a) = 7,\ 1 E_1 7 \Rightarrow 1 E_2 7,$
$\delta(3, a) = 7,\ \delta(5, a) = 8,\ 7 E_1 8,\ \delta(3, b) = 9,\ \delta(5, b) = 4,\ 9 E_1 4, \Rightarrow 3 E_2 5,$
$\delta(3, a) = 7,\ \delta(6, a) = 7,\ 7 E_1 7,\ \delta(3, b) = 9,\ \delta(6, b) = 4,\ 9 E_1 4, \Rightarrow 3 E_2 6$

$5E_2 3,\ 3E_2 6 \Rightarrow 5E_2 6,$

Dalej uvádzame už len výsledky:

$2\not{E}_2 4, 2\not{E}_2 9,\ 4E_2 9,\ 7E_2 8.$

Teda

$$\tilde{E}_2 = \{\{1\},\{3,5,6\},\{2\},\{4,9\},\{7,8\}\}.$$

Teraz zistujeme ci platí: $3E_3\,5,\ 3E_3\,6,\ 5E_3\,6,\ 4E_3\,9,\ 7E_3\,8.$

$\delta(3,a)=7,\ \delta(5,a)=8,\ 7E_2 8,\ \delta(3,b)=9,\ \delta(5,b)=4,\ 9E_2 4, \Rightarrow 3E_3 5,$

$\delta(3,a)=7,\ \delta(6,a)=7,\ 7E_2 7,\ \delta(3,b)=9,\ \delta(6,b)=4,\ 9E_2 4, \Rightarrow 3E_3 6,$

$5E_3 3,\ 3E_3 6 \Rightarrow 5E_3 6,$

$\delta(4,a)=3,\ \delta(9,a)=3,\ 3E_2 3,\ \delta(4,b)=3,\ \delta(9,b)=6,\ 3E_2 6, \Rightarrow 4E_3 9,$

$\delta(7,a)=3,\ \delta(8,a)=6,\ 3E_2 6,\ \delta(7,b)=4,\ \delta(8,b)=9,\ 4E_2 9, \Rightarrow 7E_3 8.$

$$\tilde{E}_3 = \tilde{E}_2 = \tilde{E} = \{\{1\},\{3,5,6\},\{2\},\{4,9\},\{7,8\}\}.$$

Oznacme $s_1=\{1\}$, $s_2=\{3,5,6\}$, $s_3=\{2\}$, $s_4=\{4,9\}$, $s_5=\{7,8\}$. Potom redukovaný automat A_R je daný tabulkou

	a	b
s_1	$s_1/0$	$s_3/0$
s_2	$s_5/0$	$s_4/0$
s_3	$s_4/1$	$s_4/0$
s_4	$s_2/1$	$s_2/0$
s_5	$s_2/1$	$s_4/1$

Príklad 3. Nájdite ekvivalentné stavy medzi automatmi A, B. Sú tieto automaty ekvivalentné?

A	a	b
s_1	$s_2/0$	$s_3/1$
s_2	$s_1/1$	$s_3/0$
s_3	$s_2/0$	$s_1/1$
s_4	$s_4/0$	$s_1/1$

B	a	b
t_1	$t_3/1$	$t_2/0$
t_2	$t_1/0$	$t_2/1$
t_3	$t_1/1$	$t_2/0$

Riešenie. Vytvoríme nový automat $A\cup B$ - zjednotenie automatov A, B a v nom nájdeme ekvivalentné stavy.

$A\cup B$	a	b
s_1	$s_2/0$	$s_3/1$
s_2	$s_1/1$	$s_3/0$
s_3	$s_2/0$	$s_1/1$
s_4	$s_4/0$	$s_1/1$
t_1	$t_2/1$	$t_2/0$
t_2	$t_1/0$	$t_2/1$
t_3	$t_1/1$	$t_2/0$

$\tilde{E}_1 = \{\{s_1,s_3,s_4,t_2\},\{s_2,t_1,t_3\}\}$

$s_1E_2s_3$ ✓ $\quad s_1\not{E}_2s_4 \quad s_1E_2t_2$ ✓ $\quad s_3\not{E}_2s_4$

$s_3E_2t_2$ ✓ $\quad s_4\not{E}_2t_2$

$s_2E_2t_1$ ✓ $\quad s_2\not{E}_2t_3 \quad t_1\not{E}_2t_3$

$\tilde{E}_2 = \{\{s_1,s_3,t_2\},\{s_4\},\{s_2,t_1\},\{t_3\}\}$

$s_1E_3s_3$ ✓ $\quad s_1E_3t_2$ ✓ $\quad s_3E_3t_2$ ✓ $\quad s_2E_3t_1$ ✓

$$\tilde{E}_3 = \tilde{E}_2 = \tilde{E} = \{\{s_1, s_3, t_2\}, \{s_4\}, \{s_2, t_1\}, \{t_3\}\}$$

Zistili sme, že $s_1 \sim s_3 \sim t_2$, $s_2 \sim t_1$. Automaty A, B nie sú ekvivalentné, lebo napríklad k stavu s_4 automatu A neexistuje ekvivalentný stav v automate B.

3.2.Cvicenia

1. Navrhnite tabulkou Mealyho automat $A = (S, X, Z, \delta, \lambda)$, v ktorom $|X| = 3$, $|Z| = 3$, $|S| = 3$ a nakreslite jeho graf.

2. Navrhnite tabulkou Moorov automat $A = (S, X, Z, \delta, \mu)$, v ktorom $|X| = 3$, $|Z| = 2$, $|S| = 4$ a nakreslite jeho graf.

3. Zariadenie používa vstupnú abecedu $X = \{a, b\}$ a výstupnú abecedu $Z = \{0, 1\}$. Výstup je 1 práve vtedy, ked na vstupe boli za sebou písmená bab. Popíšte zariadenie ako automat.

4. Popíšte automat so vstupnou abecedou $X = \{1, 2, 3\}$ a výstupnou $Z = \{0, 1\}$, ak výstup $z(t) = 1$ práve vtedy, ked pre vstupy platí $x(t-2) + x(t-1) > 2\,x(t)$ (+ je obvyklé scitovanie v množine reálnych císel).

5. Zariadenie má vstupnú abecedu $X = \{0, 1\}$ a výstupnú abecedu $Z = \{0, 1\}$. Výstup $z(t) = 1$ práve vtedy, ked pre vstup platí $x(t) = x(t-2)$, $(t \geq 3)$. Opíšte toto zariadenie ako automat.

6. Popíšte automat $A = (S, X, Z, \delta, \lambda)$, ak $X = \{a, b\}$, $Z = \{0, 1\}$. Výstup je 1, vždy ked na vstupe je v poradí štvrté *b* (nemusia íst za sebou), inác je výstup 0.

7. Popíšte ako automat zariadenie, ktorého vstupná abeceda je $X = \{a, b\}$, výstupná $Z = \{0, 1\}$ a na výstupe sa objaví 1 práve vtedy, ked sa na vstupe nachádza štvrté a v bloku písmen a idúcich za sebou (pocítadlo blokov dlžky 4). V opacnom prípade je výstup 0.

8. Hádžem mincou. Vyhrám 1 Sk za každé druhé písmo a za hlavu, ked pred nou bola hlava (inác nevyhrávam). Popíšte automat, ktorý bude hlásit moju výhru (výstup je 1 práve vtedy, ked vyhrávam).

9. Chceme cítat slovenský text (26 základných písmen plus medzera medzi slovami). Navrhnite zariadenie, ktoré bude indikovat prítomnost slova zacínajúceho na t a konciaceho na r. Popíšte to zariadenie ako automat.

10. Daný je Mealyho automat tabulkou. Zistite, ci k nemu existuje silno ekvivalentný Moorov automat. Ak existuje, popíšte ho tabulkou.

    a)

	a	b	a	b
s_0	s_1	s_1	0	1
s_1	s_0	s_2	1	0
s_2	s_2	s_1	0	1

b)

	a	b	a	b
s_0	s_1	s_1	1	1
s_1	s_0	s_2	1	0
s_2	s_2	s_1	0	1

11. Automat A je daný tabulkou. Nakreslite graf automatu A a vypocítajte $\hat{\delta}(s,w)$, $\hat{\lambda}(s,w)$, ak

a) $s = 3,\ w = aababbba,$

	a	b
1	3/1	1/0
2	4/0	3/1
3	4/0	3/0
4	2/1	2/0

b) $s = 4,\ w = abbcbaac$

	a	b	c	μ
1	3	2	4	0
2	1	4	2	1
3	4	1	3	1
4	1	3	2	0

12. Zariadenie má tri vstupné znaky 0, 1, Q. Na „otázku“ Q vloženú na vstup odpovedá, ci pocet doteraz vyslaných jednotiek bol párny alebo nepárny. Popíšte toto zariadenie ako neúplne špecifikovaný automat.

13. Nájdite ekvivalentné stavy automatu A daného tabulkou

	x	y
1	2/0	3/0
2	3/1	6/1
3	5/0	1/0
4	2/0	4/0
5	1/1	6/1
6	5/0	2/0

14. Nájdite ekvivalentné stavy automatu A daného tabulkou

	x	y
1	2/1	6/1
2	1/0	5/0
3	6/1	2/1
4	2/0	7/0
5	6/0	7/0
6	3/0	4/0
7	5/0	7/0

15. Nájdite ekvivalentné stavy automatu A daného tabulkou

	x	y	z
0	0/0	1/0	2/0
1	0/0	1/0	3/0
2	5/0	5/1	6/0
3	3/0	5/1	8/0
4	7/0	8/0	9/0
5	7/0	2/1	8/0
6	7/1	8/1	0/1
7	3/0	5/1	8/0
8	7/1	8/1	9/1
9	1/0	4/0	3/0

16. Automat A je daný tabulkou:

a)

	x	y
s_1	$s_3/0$	$s_2/1$
s_2	$s_3/0$	$s_2/1$
s_3	$s_4/1$	$s_1/0$
s_4	$s_4/1$	$s_1/0$

b)

	a	b	a	b
1	2	7	0	0
2	2	7	0	0
3	5	4	0	0
4	6	3	0	0
5	5	3	1	0
6	6	4	1	0
7	1	7	0	1

Nájdite k nemu redukovaný automat A_R.

17. Nájdite redukovaný automat automatu A z príkladov 13, 14 a 15.

18. Zistite, ktoré stavy automatov A, B sú ekvivalentné. Sú automaty A, B ekvivalentné?

A	x	y
s_1	$s_2/0$	$s_3/1$
s_2	$s_1/0$	$s_4/1$
s_3	$s_3/1$	$s_1/0$
s_4	$s_4/1$	$s_2/0$

B	x	y
t_1	$t_1/0$	$t_2/1$
t_2	$t_3/1$	$t_1/0$
t_3	$t_3/1$	$t_1/0$
t_4	$t_1/0$	$t_1/1$

19. Množina stavov automatu A_1 je $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ a automatu A_2 je $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$. Oba automaty majú vstupnú abecedu $X = \{x\}$ a výstupnú abecedu $Z = \{0, 1\}$. Funkcie δ a λ sú dané tabulkami

	x	x
s_1	s_1	0
s_2	s_1	1
s_3	s_3	1
s_4	s_3	1

	x	x
t_1	t_2	0
t_2	t_2	0
t_3	t_1	1
t_4	t_4	1

Sú A_1, A_2 ekvivalentné?

20. Automaty A a B sú dané tabulkami:

A	x_1	x_2
s_1	$s_2/0$	$s_3/1$
s_2	$s_1/0$	$s_3/1$
s_3	$s_3/1$	$s_1/0$

B	x_1	x_2
t_1	$t_1/0$	$t_2/1$
t_2	$t_3/1$	$t_1/0$
t_3	$t_3/1$	$t_2/0$

Vyšetrite, ci automaty A *a* B sú ekvivalentné.

3.3. Výsledky

1. napr.

	a	b	c
s_1	$s_2/1$	$s_1/1$	$s_2/3$
s_2	$s_3/2$	$s_2/3$	$s_3/1$
s_3	$s_2/1$	$s_3/2$	$s_1/3$

10. a) nie. b) áno

	a	b	μ
s_0	s_1	s_1	1
s_1	s_0	s_2	1
s_2	s_2	s_1	0

11. a) $\hat{\delta}(s,w)=4$, $\hat{\lambda}(s,w)=01100100$. b) $\hat{\delta}(s,w)=3$, $\hat{\lambda}(s,w)=01010011$. **13.** $\tilde{E}=\{\{1,3,4\},\{6\},\{2,5\}\}$. **14.** $\tilde{E}=\{\{1,3\},\{2,6\},\{4,5\},\{7\}\}$. **15.** $\tilde{E}=\{\{0\},\{1\},\{9\},\{4\},\{2\},\{3,7\},\{5\},\{8\},\{6\}\}$. **18.** $s_1 \sim s_2 \sim t_1$, $s_3 \sim s_4 \sim t_2 \sim t_3$; automaty nie sú ekvivalentné. **19.** áno. **20.** nie.

4. Fyzikálna realizácia automatov

4.1. Riešené príklady

Príklad 1. Vytvorte dvojkový automat, ktorý pokrýva automat $A=(S,X,Z,\delta,\lambda)$ daný tabulkou

	a	b	c
p	q/u	r/u	q/v
q	p/u	q/v	r/u
r	p/v	r/u	p/u

Budiace funkcie a výstupnú funkciu vyjadrite pomocou B-výrazov.

Riešenie. Najprv vytvoríme k automatu A kódový ekvivalent A_B. Zakódujme stavy, vstupy a výstupy automatu A napr. pomocou zobrazení

$$f:S \to B^2,\ f(p)=(0,0),\ f(q)=(0,1),\ f(r)=(1,0),$$

$$g:X \to B^2,\ g(a)=(0,0),\ g(b)=(1,0),\ g(c)=(1,1),$$

$$h:Z \to B,\ h(u)=0,\ h(v)=1,$$

co môžeme znázornit pomocou Karnaughových máp:

		y_2
	p	q
y_1	r	

		x_2
	a	
x_1	b	c

	u
z	v

Pri tejto volbe kódovým ekvivalentom automatu A je automat $A_B = (f(S), g(X), h(Z), \delta_B, \lambda_B)$, kde $f(S) = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$, $g(X) = \{(0,0), (1,0), (1,1)\}$, $h(Z) = \{0, 1\}$ a funkcie δ_B, λ_B sú určené tabulkou

A_B	$(0,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$(0,1)/0$	$(1,0)/0$	$(0,1)/1$
$(0,1)$	$(0,0)/0$	$(0,1)/1$	$(1,0)/0$
$(1,0)$	$(0,0)/1$	$(1,0)/0$	$(0,0)/0$

Automat rozšírime na dvojkový neúplne špecifikovaný automat $\tilde{A}_B = \left(B^2, B^2, B, \tilde{\delta}_B, \tilde{\lambda}_B\right)$, ktorý pokrýva automat :

$\tilde{A}_B$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(0,1)$
$(0,0)$	$(0,1)/0$	$(1,0)/0$	$(0,1)/1$	$-/-$
$(0,1)$	$(0,0)/0$	$(0,1)/1$	$(1,0)/0$	$-/-$
$(1,0)$	$(0,0)/1$	$(1,0)/0$	$(0,0)/0$	$-/-$
$(1,1)$	$-/-$	$-/-$	$-/-$	$-/-$

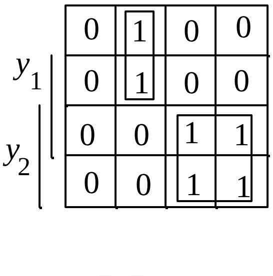
Budiace funkcie a výstupnú funkciu vyjadríme pomocou Karnaughovej mapy:

Y_1		x_1	x_2	
	0	1	0	–
y_1	0	1	0	–
y_2	–	–	–	–
	0	0	1	–

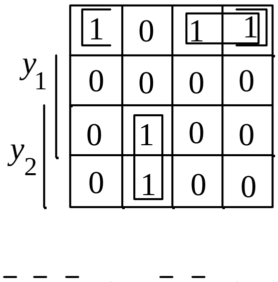
Y_2		x_1	x_2	
	1	0	1	–
y_1	0	0	0	–
y_2	–	–	–	–
	0	1	0	–

z		x_1	x_2	
	0	0	1	–
y_1	1	0	0	–
y_2	–	–	–	–
	0	1	0	–

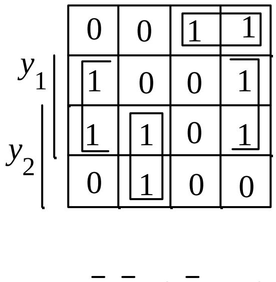
Nedefinované hodnoty dourcíme tak, aby sme minimalizovali DNF týchto funkcií:



Y_1		x_1	x_2	
	0	1	0	0
y_1	0	1	0	0
y_2	0	0	1	1
	0	0	1	1



Y_2		x_1	x_2	
	1	0	1	1
y_1	0	0	0	0
y_2	0	1	0	0
	0	1	0	0



z		x_1	x_2	
	0	0	1	1
y_1	1	0	0	1
y_2	1	1	0	1
	0	1	0	0

$$Y_1 = x_1\bar{x}_2\bar{y}_2 + x_2 y_2, \quad Y_2 = \bar{x}_1\bar{y}_1\bar{y}_2 + x_2\bar{y}_1\bar{y}_2 + x_1\bar{x}_2 y_2, \quad z = x_2\bar{y}_1\bar{y}_2 + \bar{x}_1 y_1 + x_1\bar{x}_2 y_2$$

Príklad 2. Kódový ekvivalent A_B automatu A je urcený tabulkou

A_B	0	1
$(0,0)$	$(1,0)/1$	$(1,1)/0$
$(1,0)$	$(0,0)/1$	$(1,0)/0$
$(1,1)$	$(1,1)/0$	$(0,0)/1$

Navrhnite fyzikálnu realizáciu automatu A pomocou synchrónnych JK-preklápacích obvodov.
Riešenie. Dvojkový automat $\tilde{A}_B$ pokrývajúci automat A:

$\tilde{A}_B$	0	1
$(0,0)$	$(1,0)/1$	$(1,1)/0$
$(1,0)$	$(0,0)/1$	$(1,0)/0$
$(1,1)$	$(1,1)/0$	$(0,0)/1$
$(0,1)$	$-/-$	$-/-$

Budiace funkcie a výstupná funkcia automatu $\tilde{A}_B$:

Y_1		x
	1	1
y_1	0	1
y_1 y_2	1	0
y_2	–	–

Y_2		x
	0	1
y_1	0	0
y_1 y_2	1	0
y_2	–	–

z		x
	1	0
y_1	1	0
y_1 y_2	0	1
y_2	–	–

z		x
	$\boxed{1}$	0
y_1	$\boxed{1}$	0
y_1 y_2	0	$\boxed{1}$
y_2	0	$\boxed{1}$

$$z = \bar{x}\bar{y}_2 + xy_2$$

Nedefinované hodnoty budiacich funkcií zatial nešpecifikujeme, urobíme tak pri zostavovaní vstupov JK-preklápacích obvodov, ktoré generujú tieto budiace funkcie. Uvedomme si, že na dosiahnutie prechodu $y_i \to Y_i$ musíme nastavit vstupy J_i a K_i podla tejto tabulky

	J_i	K_i
	Y_i	–
y_i	–	$\bar{Y}_i$

Karnaughove mapy pre vstupy JK-preklápacích obvodov sú potom takéto:

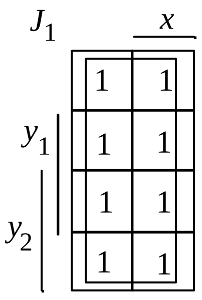
J_1		x
	1	1
y_1	–	–
y_1 y_2	–	–
y_2	–	–

K_1		x
	–	–
y_1	1	0
y_1 y_2	0	1
y_2	–	–

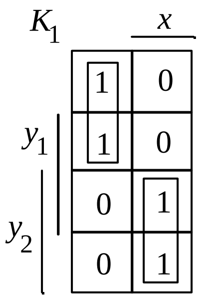
J_2		x
	0	1
y_1	0	0
y_1 y_2	–	–
y_2	–	–

K_2		x
	–	–
y_1	–	–
y_1 y_2	0	1
y_2	–	–

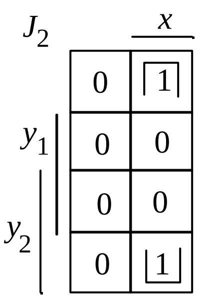
Dodefinujeme nedefinované hodnoty tak, aby sme minimalizovali DNF týchto funkcií.



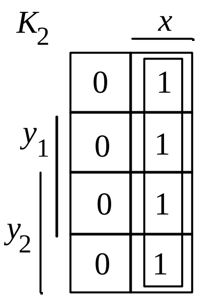
$J_1 = 1,$



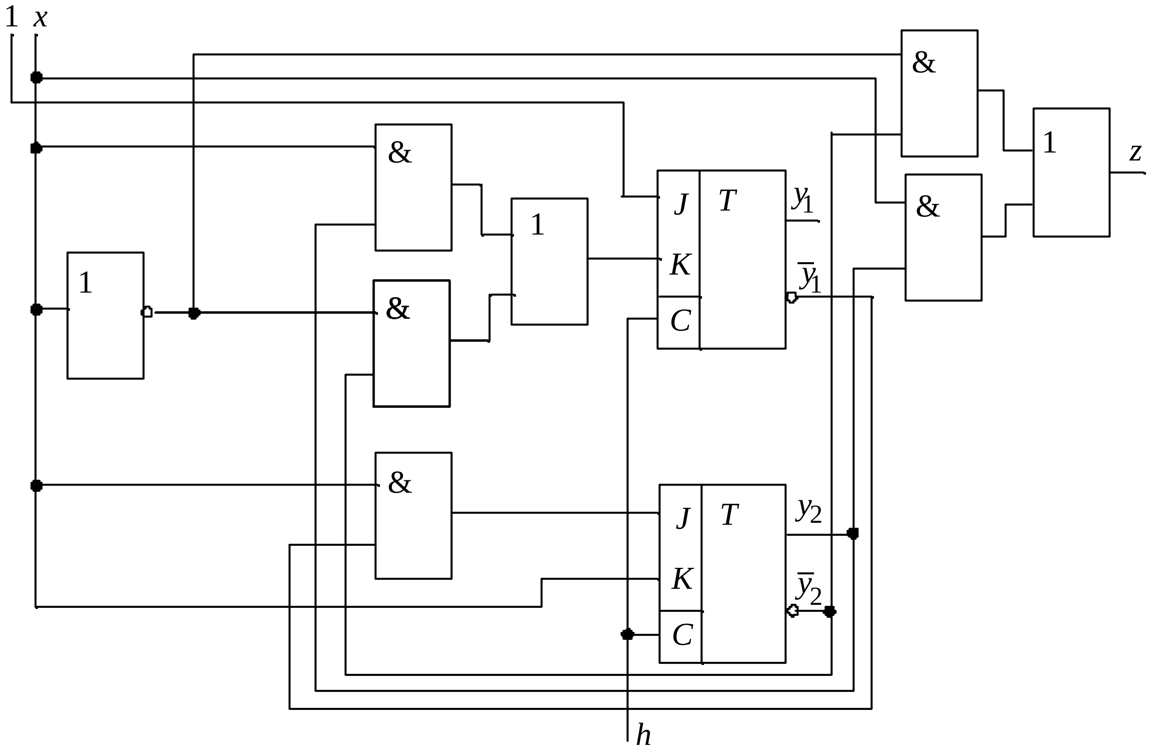
$K_1 = \bar{x}\bar{y}_2 + xy_2,$



$J_2 = x\bar{y}_1,$



$K_2 = x$



4.2. Cvicenia

1. Navrhnite fyzikálnu realizáciu automatu daného tabulkou pomocou synchrónnych SR preklápacích obvodov.

	a	b	c	μ
A	C	A	B	1
B	B	C	A	1
C	A	B	A	0

2. Navrhnite fyzikálnu realizáciu automatu daného tabulkou

	a	b	c	d
1	1/0	2/0	1/1	1/0
2	2/0	3/0	1/0	1/1
3	3/0	3/0	1/0	1/0

pomocou synchrónnych JK - preklápacích obvodov.

3. Navrhnite fyzikálnu realizáciu automatov z príkladov 3 až 8 pomocou synchrónnych preklápacích obvodov.

4.3. Výsledky