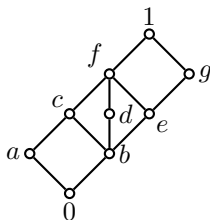


Priezvisko:..... Meno:.....

1.	2.	3.	4.	5.	$\Sigma$	Sem.	$\Sigma\Sigma$	Známka

(1) **Teória:** Definujte kongruenciu na zväze.

Nakreslite 3 kópie diagramu tohto zväzu  $L$  a na každej z nich vyznačte rozklad podľa nejakej netrivialnej kongruencie. Samozrejme, každá kongruencia musí byť iná. Vždy nakreslite aj diagram príslušného faktorového zväzu. (Pomôcka: diamant má práve dve kongruencie.)



(2) **Teória:** Napíšte vetu o pentagone.

Nech  $\mathbb{S}$  je množina všetkých bodov v priestore. Vyberme jeden fixný bod  $O \in \mathbb{S}$  (počiatok). Nech  $L \subseteq 2^{\mathbb{S}}$  je systém množín, ktorý obsahuje práve množiny

- $\{O\}$ ,
- $\mathbb{S}$ ,
- všetky priamky prechádzajúce bodom  $O$ ,
- všetky roviny prechádzajúce bodom  $O$ .

Uvažujme zväz  $(L, \subseteq)$ .

- (a) Dokážte, že  $L$  nie je distributívny.
- (b) Dokážte, že  $L$  je modulárny. (Pomôcka: Predpokladajte, že  $L$  obsahuje pentagon ako podzväz a dospejte k sporu. Pozrite sa najprv na 4-prvkový reťazec v pentagone a usúďte, aké prvky z  $L$  musí obsahovať.)

(3) **Teória:** Nech  $G$  je grupa a  $H$  je jej normálna podgrupa. Aký je vzťah medzi triedami ekvivalencie kongruencie  $\Theta_H$  a pravými kosetmi  $H$  v  $G$ ?

Definujme na  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  operáciu  $+$  takto

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

Potom  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$  je grupa (to nedokazujte).

- (a) Nájdite podgrupu  $H$  grupy  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$  generovanú množinou  $\{(0, 2), (2, 0)\}$ .

- (b) Keďže naša grupa je abelovská,  $H$  je normálna. Nájdite rozklad  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\Theta_H$  a nakreslite jeho Cayleyho tabuľku.
- (4) **Teória:** Definujte rozklad podgrupy  $G$  na pravé kosety podľa podgrupy  $H$ .

Uvažujme grupu  $D_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ , ktorej Cayleyho tabuľka je

.	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	1	4	3	6	5	8	7
3	3	4	1	2	7	8	5	6
4	4	3	2	1	8	7	6	5
5	5	7	6	8	1	3	2	4
6	6	8	5	7	2	4	1	3
7	7	5	8	6	3	1	4	2
8	8	6	7	5	4	2	3	1

- (a) Nájdite všetky podgrupy grupy  $D_4$ , ktoré sú generované jednoprvkovými množinami, to znamená všetky  $[\{x\}]$ , kde  $x \in D_4$ . Pre viac ako dvojprvkové podgrupy aj nakreslite Cayleyho tabuľku, pre tie malé nemusíte.
- (b) Vyberte si nejaké dve z podgrúp  $D_4$ , ktoré ste našli v (a), nazvite ich  $H_1, H_2$ . Nájdite rozklady  $D_4$  na pravé kosety vzhľadom na  $H_1$ , aj vzhľadom na  $H_2$ .
- (c) Dokážte, že  $\{1, 2\}$  nie je normálna podgrupa  $D_4$ . (pomôcka: 5)
- (5) Nájdite kosť grafu prehľadávaním
- (a) do hĺbky,
- (b) do šírky.

Poradie vrcholov je abecedné.

