

## DISKRÉTNÁ MATEMATIKA A LOGIKA – PŘÍKLADY

Znakom (\*) sú označené príklady, ktoré sa môžu javiť ako „ťažšie“ tesne po príslušnej prednáške. Mali by ste však byť schopní ich zvládnuť s istým časovým odstupom, po diskusii s kolegami alebo s prednášajúcim/cvičiacim a podobne.

### 4. OPERÁCIE NA MNOŽINE (ČASŤ I.)

- (1) Nakreslite Cayleyho tabuľku pre nasledujúce operácie.

(a) Operácia  $*$  na množine  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  daná predpisom

$$x * y := \min(4, x + y).$$

(b) Operácia násobenia na množine komplexných čísel  $1, -1, i, -i$ .

(c) Operácia zjednotenia na množine všetkých podmnožín množiny  $\{1, 2\}$ .

Operácia  $*$  na množine  $\{1, 2, 3, 4\}$  daná predpisom

$$x * y := \text{zvyšok po delení } x.y \text{ číslom } 5.$$

(d) Operácia  $*$  na množine  $\{1, 2, 3, 4\}$  daná predpisom

$$x * y := \text{zvyšok po delení } x.y+1 \text{ číslom } 5.$$

(e) Operácia  $*$  na množine  $\{1, 2, 3, 4\}$  daná predpisom

$$x * y := \text{zvyšok po delení } x.(y+1) \text{ číslom } 5.$$

- (2) Pre každú operáciu z predošlého príkladu zistite, či je operácia komutatívna, či má jednotkový prvok a či je (\*) asociatívna.

(3) Koľko je všetkých binárnych operácií na  $n$ -prvkovej množine?

(4) (\*) Koľko je všetkých komutatívnych binárnych operácií na  $n$ -prvkovej množine?

(5) Zistite, či je operácia  $*$  na  $\mathbb{R}$  daná daným predpisom komutatívna, asociatívna a nájdite jednotkový prvok (ak existuje). Svoju odpoveď dokážte.<sup>1</sup>

(a)  $a * b = |a + b|$

(b)  $a * b = |a.b|$

(c)  $a * b = a + b + 1$

(d)  $a * b = a^2 + b^2$

(e)  $a * b = \sin(a + b)$

(f)  $a * b = 1$

(6) Nech  $\mathcal{P}$  je množina všetkých reálnych polynómov. Nech  $\heartsuit$  je binárna operácia na  $\mathcal{P}$  daná predpisom  $\mathbf{p} \heartsuit \mathbf{q} = (\mathbf{p} + \mathbf{q})'$ , kde  $'$  označuje deriváciu. Zistite, či je operácia  $\heartsuit$  komutatívna a asociatívna a či má jednotkový prvok.

(7) Nech  $P$  je množina všetkých bodov v rovine. Nech  $\odot$  je binárna operácia na  $P$  daná predpisom

$$A \odot B = \text{stred úsečky } AB.$$

Zistite, či  $\odot$  je komutatívna, asociatívna a nájdite jednotkový prvok (ak existuje).

<sup>1</sup>Ak tvrdíte, že neexistuje jednotkový prvok, aj to musíte dokázať!

- (8) Nech  $A$  je množina, označme  $2^A$  množinu všetkých podmnožín  $A$ .
- (a) Nájdite jednotkový prvok vzhľadom na operáciu  $\cap$  na  $2^A$ .
  - (b) Nájdite jednotkový prvok vzhľadom na operáciu  $\cup$  na  $2^A$ .
  - (c) (\*) Nech  $\div$  je operácia na  $2^A$  daná predpisom

$$X \div Y = (X \cap Y^C) \cup (X^C \cap Y).$$

- ( $X \div Y$  sa volá *symetrická diferenciacia množín*  $X, Y$ ) Dokážte, že  $\div$  je komutatívna a asociatívna operácia a zistite, či má jednotkový prvok.
- (d) Pre  $A = \{1, 2\}$  nakreslite Cayleyho tabuľku  $\div$ .