Vlastnosti bin. operácií (VBO):

O – operácia
K – komutatívna
A – asociatívna
E – neutrálny prvok (ľavý, pravý, plnohodnotný)
I – existuje inverzný prvok (ľavý, pravý, plnohdnotný)
ku každému prvku (alebo len k prvkom na obmedzenej podmnožine)
G – existuje absorpčný (agresívny) prvok

!! Overiť VBO = overiť jednotlivé vlastnosti, prípadne (ak treba a ak sa to dá) navrhnúť zúženie definičného oboru tak, aby boli splnené.

Príklady – čiastočne aj s výsledkami a riešeniami

---

1. Overte VBO pre operácie +, *, -, / na množinách $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

($\mathbb{N}$, +) O,K,A, $e = 0$ (ak 0 nepatrí do $\mathbb{N}$, potom neexistuje e), ~~I, G~~
($\mathbb{Z}$, +) O,K,A, $e = 0$, $x^{-1} = -x$, ~~G~~
($\mathbb{Q}$, +), ($\mathbb{R}$, +) rovnako

($\mathbb{N}$, *) O,K,A, $e = 1$, ~~I,~~ $o=0$ (ak 0 nepatrí do $\mathbb{N}$, potom neexistuje o)
($\mathbb{Z}$, *) O,K,A, $e = 1$, ~~I,~~ $o=0$
($\mathbb{Q}$, *) O,K,A, $e = 1$, $x^{-1} = 1/x$, $o=0$
($\mathbb{R}$, *) rovnako

($\mathbb{N}$, -) ~~O~~
($\mathbb{Z}$, -) O, ~~K,A,~~ $e_P = 0$, ~~I, G~~
($\mathbb{Q}$, -), ($\mathbb{R}$, -) rovnako

($\mathbb{N}$, /), ($\mathbb{Z}$, /) ~~O~~
($\mathbb{Q}$, /) ~~O~~
($\mathbb{R}$, /) rovnako
($\mathbb{Q}$-{0}, /) O,~~K,A~~, $e_P = 1$, ~~I,~~ $o_L=0$ → x/1=x, 0/x=0
($\mathbb{R}$-{0}, /) rovnako

2. Pri operácii $x \square y = k*x + l*y + m$ na $\mathbb{R}$ zistite, pre aké k,l,m platia jednotlivé VBO.

O: áno

K: $k*x + l*y + m = k*y + l*x + m$ iba ak $k = l$

A: $k*(k*x + l*y + m) + l*z + m = k*x + l*(k*y+l*z+m) + m$
$k^2*x + kl*y + l*z + k*m + m = k*x + kl*y + l^2*z + l*m + m$

Uvedená rovnosť je splnená pre všetky možné x,y,z iba vtedy, ak platí:
a) $k^2=k$, $l^2=l$, $k=l$, teda pre $k=l=0$ alebo $k=l=1$.
To sú operácie $x \square y = m$ alebo $x \square y = x+y+m$, kde m je ľubovoľné.
b) $k^2=k$, $l^2=l$, $m=0$, teda pre $k=0,1$, $l=0,1$.
To sú operácie $x \square y = x+y$, $x \square y = 0$, $x \square y = x$ alebo $x \square y = y$.

E: $k*x + l*e_P + m = x$
Ak $k=1$, potom existuje $e_P = -m/l$. Podobne ak $l=1$, tak existuje $e_L = -m/k$.

Plnohodnotný neutrálny prvok existuje iba vtedy, keď $k=l=1$ a platí $e= -m$.

I: Inverzné prvky hľadáme len pre prípad $x \square y = x+y+m$.
Platí $x^{-1} = -2*m - x$

G: Nie je.

3. Pri operácii $x \square y = x^k + y^k$ na $\mathbb{R}$ overte jednotlivé VBO pre k= 2, 3, … .

Pre nezáporné k to je operácia, je komutatívna. Ďalšie vlastnosti iba pre $k=1$ (vybavené v 1. príklade)

4. Pri operácii $x \square y = x^k + y^l+m$ na $\mathbb{R}$ overte jednotlivé VBO pre rozličné prir. čísla k, l

Pre nezáporné k,l to je operácia, ak $k=l \rightarrow$ je komutatívna, ak $k=l=1 \rightarrow$ je asociatívna.

E: $x^k + e_P{}^l+m = x$, $e_L{}^k + y^l+m = y$

Pre $k=1$ a m nekladné existuje pravý neutrálny prvok a platí $e_P= (-m)^{1/l}$.
Pre $l=1$ a m nekladné existuje ľavý neutrálny prvok a platí $e_L= (-m)^{1/k}$.
Pre $k=l=1$ existuje plnohodnotný neutrálny prvok $e=-m$. Ide o operáciu, ktorej už sme sa venovali.

5. Pri operácii $x \square y = m*x^k*y^l$ na $\mathbb{R}$ zistite, pre aké k,l,m platia jednotlivé VBO.

O: pre k,l nezáporné to je operácia (nižšie nezápornosť k,l predpokladáme)
K: je, pokiaľ $k=l$
A: je, pokiaľ $k=l=1$

$m*(m*x*y)*z = m*x*(m*y*z)$

E: $m*x^k*e_P^{\,l} = x$, $m*e_L^{\,k}*y^l = y$

Ak $k=1$ a m je nezáporné, potom $e_P = (1/m)^{1/l}$
Ak $l=1$ a m je nezáporné, potom $e_L = (1/m)^{1/k}$
Ak $k=l=1$, potom $e = 1/m$

I: Len pre prípad $k=l=1$, $e = 1/m$

$m*x*x^{-1} = 1/m$
$x^{-1} = 1/(x*m^2)$

G: o=0

6. Pri operácii $x \square y = x^{k*y+l}$ na $\mathbb{R}$ zistite, pre aké k,l platia jednotlivé VBO.

O: je to operácia, ak obmedzíme def. obor na $\mathbb{R}_0^+$

K: nie je (protipríkladov je veľa)
A: nie je (protipríkladov je veľa)

E: $e_L^{\,k*y+l} = y$ → e_L neexistuje
$x^{k*e_P^{\,+l}} = x$ → $e_P = (1-l)/k$

Pravý neutrálny prvok existuje, ak je $(1-l)/k$ nezáporné číslo.

I: Nemáme plnohodnotné e.

G: $o_L=0$ alebo 1
$o_P=1$ ak $k+l = 0$

7a. Pri operácii $x \square y = (x^k + y^l)^{1/2}$ na $\mathbb{R}$ overte jednotlivé VBO pre rozličné prir. k, l

O: je to operácia, ak obmedzíme def. obor na $\mathbb{R}_0^+$

K: ak $k=l$

A: ak $k=l=2$, potom platí:

$$((x^2 + y^2)^{1/2})^2 + z^2)^{1/2} = (x^2 + ((y^2 + z^2)^{1/2})^2)^{1/2}$$

E: Pre $k=2$ je $e_P=0$, pre $l=2$ je $e_L=0$. Pre $k=l=2$ je $e=0$.

I: Na $\mathbb{R}_0^+$ neexistujú inverzné prvky k nenulovým x.

7b. Pri operácii $x \square y = (x^k + y^l)^{1/2}$ na $\mathbb{C}$ overte jednotlivé VBO pre rozličné prir. k, l

O: je to operácia, ak obmedzíme def. obor na $\mathbb{R}_0^+ \cup i*\mathbb{R}_0^+$ a z dvoch možných výsledkov odmocniny vyberieme ten, ktorý padne do definičného oboru.

K, A, E: rovnako ako vyššie

I: $x^{-1} = i*x$

8. Napíšte Cayleyho tabuľku operácie * na množine {1, -1, i, -i} a overte VBO.

	1	**-1**	**i**	**-i**
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

O, K, A (tieto vlastnosti * sa nemenia zúžením definičného oboru)

e = 1

I: $x^{-1} = 1/x$

9. Napíšte Cayleyho tabuľku operácie $x \square y = x^k * y^l$ na množine {1, -1, i, -i} pre k,l =1,2,3 a overte jednotlivé VBO.

k=1, l=2 (pre *k=2, l=1* symetricky podobne)

	1	**-1**	**i**	**-i**
1	1	1	-1	-1
-1	-1	-1	1	1
i	i	i	-i	-i
-i	-i	-i	i	i

Nie je K ani A (nájsť protipríklad...)

e_L neexistuje
e_P = 1, -1 (dve možnosti!!!)

k=1, l=3 (pre *k=3, l=1* symetricky podobne)

	1	**-1**	**i**	**-i**
1	1	-1	-i	i
-1	-1	1	i	-i
i	i	-i	1	-1
-i	-i	i	-1	1

Nie je K ani A (nájsť protipríklad...)
e_P = 1

k=2, l=2

	1	**-1**	**i**	**-i**
1	1	1	-1	-1
-1	1	1	-1	-1
i	-1	-1	1	1
-i	-1	-1	1	1

Je K, nie je A (protipríkladom môže byť trojica 1,1,i)

k=2, l=3
k=3, l=3
podobne....

10. Vypíšte (tabuľkou) všetky binárne operácie na množine {0, 1} a overte ich vlastnosti.

	0	1
0	0	0
1	0	0

K, A, ~~E~~, o=0

	0	1
0	1	1
1	1	1

K, A, ~~E~~, o=1

	0	1
0	0	0
1	0	1

K, A (overiť!), e=1, ~~I~~, o=0

	0	1
0	0	1
1	1	1

K, A (overiť!), e=0, ~~I~~, o=1

	0	1
0	0	0
1	1	0

~~K~~, ~~A~~ (protipríklad 1,0,1), ~~E, I~~, o_L=0,

	0	1
0	0	1
1	0	0

podobne

	0	1
0	1	0
1	1	1

podobne

	0	1
0	1	1
1	0	1

podobne

	0	1
0	1	0
1	0	0

K, ~~A~~ (protipríklad 0,0,1), ~~E~~

	0	1
0	1	1
1	1	0

podobne

	0	1
0	1	1
1	0	0

~~KAEG~~

	0	1
0	1	0
1	1	0

podobne

	0	1
0	0	0
1	1	1

~~K,~~ A, e_P=0, 1, o_L=0, 1

	0	1
0	0	1
1	0	1

podobne

	0	1
0	1	0
1	0	1

K, A (overiť!), e=1, x^{-1}=x

	0	1
0	0	1
1	1	0

K, A (overiť!), e=0, x^{-1}=1-x

11. Koľko rozličných binárnych operácií existuje na množine {0, 1, 2, 3, ..., n} ?

$(n+1)^{(n+1)*(n+1)}$

12. Overte VBO pre operácie + , * , .* (súčin po zložkách)
na množine regulárnych matíc n × n .

+ : K,A, E = nulová matica, $X^{-1} = -X$
* : ~~K~~ ,A, E = I (jednotková matica), X^{-1} = inverzná matica
.* : K, A, E = matica so samými jednotkami, ~~I~~ (problém s možným delením nulou)