Zväzy – dodatok

Ortokomplementácia

Ide o pojem z kapitoly ortomodulárnych zväzov. K tej sa už nedostaneme, ale aspoň malá predchuť a zopár príkladíkov...

Pojem *komplementárny zväz* už poznáme. Je to zväz, v ktorom každý prvok má svoj (aspoň jeden) komplement.

Ak je zväz distributívny, tak aj komplementy budú jednoznačné. Ak nie je distributívny, komplementy nemusia byť určené jednoznačne – v niektorých prípadoch sa však dá konštatovať stav "na polceste medzi jednoznačnosťou a nejednoznačnosťou" komplementu – stav, kde tú jednoznačnosť môžeme a vieme dodefinovať, a to pomocou *ortokomplementácie*.

Ortokomplementácia je funkcia na bodoch zväzu, ktorá každému bodu a priradí jednoznačným spôsobom ortokomplement, teda bod $a^{\perp}$, ktorý spĺňa nasledujúce podmienky:

1. Zákon komplementarity:

$$a^{\perp} \vee a = \mathrm{I}\ ,\ a^{\perp} \wedge a = \mathrm{O}$$

kde O a I je označenie najmenšieho a najväčšieho prvku zväzu.

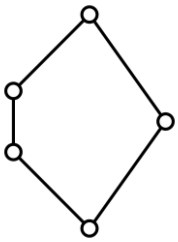
2. Zákon involúcie:

$$a^{\perp\perp} = a$$

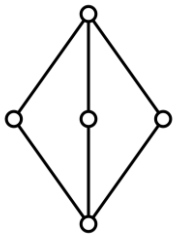
3. Obrátenie poradia:

$$\text{ak } a \leq b, \text{ potom } b^{\perp} \leq a^{\perp}$$

Príklady



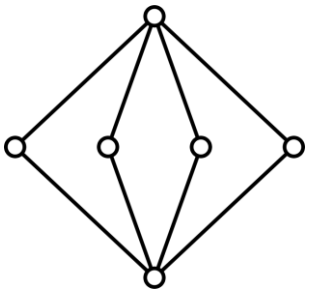
N5



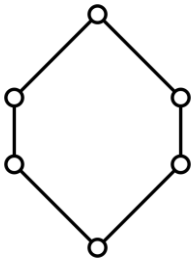
M5

Pentagon N5: prvok vpravo má dva komplementy, komplementom k obom prvkom vľavo je ten istý bod vpravo. V tejto situácii nie je možné definovať ortokomplementáciu.

Diamant M5: každý z troch bodov na prostrednom poschodí (označme a,b,c) má za svoj komplement ostatné dva body. Ak by sme sa pokúsili definovať napr. $a^{\perp} = b$, bod c ostane sám. Ortokomplementácia nie je možná.



M6



N6

M6 – čím viac pásikov, tým viac diamant:
Každý z bodov na strednom poschodí, tj. všetky body okrem O,I (označme ich po rade a,b,c,d) majú po tri komplementy. Komplement ku a je b,c aj d, a podobne je to pre b,c,d. Komplementy nie sú jednoznačné, ale táto jednoznačnosť sa dá rozumne dodefinovať, a to tromi rôznymi spôsobmi.

i. definujeme $a^\perp = b$, $b^\perp = a$ a $c^\perp = d$, $d^\perp = c$.
ii. definujeme $a^\perp = c$, $c^\perp = a$ a $b^\perp = d$, $d^\perp = b$.
iii. definujeme $a^\perp = d$, $d^\perp = a$ a $c^\perp = b$, $b^\perp = c$.

Všetky tri podmienky ortokomplementárnosti sú splnené vo všetkých troch možnostiach.

N6 – slušný hexagon:
Označme jeho body nasledovne

I
a b
c d
O

Každý z bodov a,b,c,d má dva komplementy. Jednoznačnosť vieme dodefinovať tak, že "spárujeme" ako komplementárne

i. a s b, c s d, alebo
ii. a s d, c s b.

Iba jedna z týchto možností je správna a rozhodne o tom tretia podmienka – *obrátenie poradia.* Musí platiť o.i.

$$\text{ak } c \leq a, \text{ potom } a^\perp \leq c^\perp$$

teda $b \leq d$ v prípade i, a $d \leq b$ v prípade ii. Pohľad do grafu ukazuje, že ii je správne.
Zväz N6 teda umožňuje ortokomplementáciu a to jediným možným spôsobom, keď

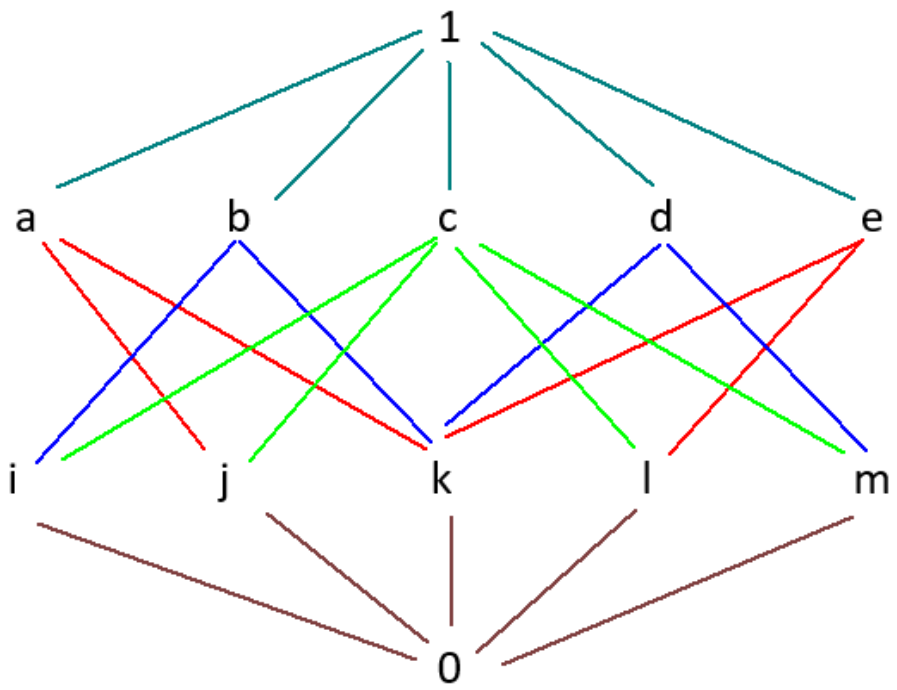
definujeme $a^\perp = d$, $d^\perp = a$ a $c^\perp = b$, $b^\perp = c$.

Neriešený príklad 1.1:

Podľa vzoru vyššie uvedených príkladov nájdite ešte aspoň dva jednoduché príklady zväzov, v ktorých je možná ortokomplementácia, a aspoň dva príklady, kde možná nie je.

Neriešený príklad 1.2:

Posúďte nasledujúci Hasseho diagram: je to zväz? Je komplementárny? Je možná ortokomplementácia?



Boolova algebra – funkcie

Ak ste dávali pozor na LS, nasledujúce veci budú znieť povedome.
Už vieme, že každý boolovský zväz sa dá reprezentovať ako množina všetkých možných n-tíc núl a jednotiek, teda B^n, kde B= {0,1}.
Infímum dvoch n-tíc realizuje funkcia * (súčin) po zložkách,
suprémum dvoch n-tíc realizuje funkcia + (logický súčet) po zložkách.
Komplementom prvku je jeho negácia (po zložkách).
Čiastočné usporiadanie je definované opäť po zložkách – dve n-tice vieme porovnať, ak je jedna z nich menšia než druhá na každej zložke.

Boolovskú funkciu definujeme ako zobrazenie $B^n \rightarrow B$, teda ako predpis (daný napr. pravdivostnou tabuľkou), ktorý každej vstupnej n-tici priradí hodnotu 0 alebo 1.
Pre n=2 zoznam všetkých boolovských funkcií vyzerá nasledovne:

x y	f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9	f10	f11	f12	f13	f14	f15
0 0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
0 1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
1 0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
1 1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1

Sú štyri možné vstupy premenných x, y. Boolovská funkcia je predpis, ktorý tejto štvorici vstupov priradí výstup (štvorica čísel). Existuje 16 možností, 16 rôznych výstupných štvoríc, teda 16 rôznych boolovských funkcií dvoch premenných.

Pri pevnom poradí zápisu vstupných dvojíc (ako v tabuľke) je každá boolovská funkcia jednoznačne určená svojou štvoricou (stĺpcom) výstupných hodnôt.
Ak budeme boolovské funkcie dvoch premenných reprezentovať príslušnými štvoricami núl a jednotiek, budú tvoriť boolovskú algebru.

Neriešený príklad 2.1:

Nakreslite Hasseho diagram zväzu boolovských funkciií dvoch premenných. Funkcie reprezentujte prvkami z B^4.

Neriešený príklad 2.2:

Každú z funkcií f0 až f15, ktorú sú určené tabuľkou, vyjadrite ako funkčný predpis (vzorec), do ktorého sa dá dosadzovať.

<u>Poznámka:</u> Boolovskou ***funkciou*** nazývame samotný princíp, podľa ktorého sa vstupom priraďujú výstupy. Boolovským ***výrazom*** nazývame vzorec (premenné a operácie +,*, negácia), ktorý dáva po dosadení výsledky niektorej funkcie. Každá boolovská funkcia sa dá reprezentovať viacerými (nekonečne veľa) výrazmi.

Neriešený príklad 2.3:

Vráťte sa k príkladu 3 a aspoň k niektorým funkciám nájdite aj ďalšie (iné) výrazy, ktoré ich reprezentujú.

Neriešený príklad 2.4:

Je daný boolovský zväz (B^n, +, *, ≤), kde + a * sú logické OR, AND po zložkách. Overte (od podlahy z definície), že (B^n, ⊕, *), kde ⊕ je XOR po zložkách, je okruh.

Neriešený príklad 2.5:

Je daná množina BF_n funkcií $B^n \rightarrow B$. Aká je jej mohutnosť? Ak budeme prvky BF_n reprezentovať vektormi výstupných hodnôt, o aký (akých rozmerov) Boolovský zväz pôjde?

Neriešený príklad 2.6:

Je daná množina $BF_{n \times m}$ funkcií $B^n \rightarrow B^m$ (tj. funkcia pozostáva z vektora m jednoduchých bool. funkcií). Aká je jej mohutnosť? Je možné, aby tieto fukcie tvorili (akým spôsobom a ako veľký) boolovský zväz?

UNDF, UNKF

Každá boolovská funkcia sa dá vyjadriť/reprezentovať mnohými boolovskými výrazmi.

Napr. funkcia XOR sa dá vyjadriť o.i. nasledujúcimi výrazmi

$$x \oplus y = x'y+xy' = (x+y)(x'+y') = (xy + x'y')'$$

Kvôli poriadku a potrebe "pevného bodu v nekonečnom vesmíre možností" je užitočné medzi výrazmi určiť také, ktoré budú pre danú funkciu najreprezentatívnejšie a jednoznačne určené pri dodržaní normatívneho tvaru.

<u>UNDF</u>

UNDF (niekedy len NDF) = *úplná normálna disjunktívna forma* je výraz tvorený súčtom úplných súčinov. Úplný súčin je súčinový člen všetkých n premenných (nenegovaných alebo negovaných). Veci najlepšie pochopíme na príklade hľadania UNDF z tabuľky.

Boolovská funkcia f je daná tabuľkou.

x y	f	i_{11}	i_{10}	i_{00}
0 0	1	0	0	1
0 1	0	0	0	0
1 0	1	0	1	0
1 1	1	1	0	0

"Rozoberieme" f na samostatné jednotky:

$$f(x,y) = i_{11}(x,y) + i_{10}(x,y) + i_{00}(x,y)$$

Tieto "samostatné jednotky", teda funkcie, ktoré nadobúdajú hodnotu 1 pre jediný vstup, sa dajú vyjadriť už vyššie spomínanými úplnými súčinovými členmi:

$i_{11}(x,y) = xy$
$i_{10}(x,y) = xy'$
$i_{00}(x,y) = x'y'$

Funkciu f vieme vyjadriť ako súčet týchto členov:

$$f(x,y) = xy + xy' + x'y'$$

Tento tvar je normatívny (je to UNDF) a čo je podstatné, je jednoznačný. Nijak inak sa to v tvare UNDF zapísať nedá.

<u>UNKF</u>

UNKF (niekedy len NKF) = *úplná normálna konjunktívna forma* je výraz tvorený súčinom úplných súčtov. Úplný súčet je súčtový člen všetkých n premenných (nenegovaných alebo negovaných).

Boolovská funkcia f je daná tabuľkou.

x y	f	o_{01}	o_{10}
0 0	1	1	1
0 1	0	0	1
1 0	0	1	0
1 1	1	1	1

"Rozoberieme" f na samostatné nuly:

$$f(x,y) = o_{01}(x,y) * o_{10}(x,y)$$

Tieto "samostatné nuly", teda funkcie, ktoré nadobúdajú hodnotu 0 pre jediný vstup, sa dajú vyjadriť už vyššie spomínanými úplnými súčtovými členmi:

$o_{01}(x,y) = x+y'$
$o_{10}(x,y) = x'+y$

Funkciu f vieme vyjadriť ako súčin týchto členov:

$$f(x,y) = (x+y')(x'+y)$$

Tento tvar je normatívny (je to UNKF) a je jednoznačný. Nijak inak sa to v tvare UNKF zapísať nedá.

Ak je funkcia zadaná tabuľkou, vyššie uvedený spôsob je najvhodnejší na jej vyjadrenie pomocou UNDF alebo UNKF.

Ak je zadaná výrazom, je pohodlnejšie a rýchlejšie upraviť výraz na požadovaný tvar pomocou distributívnych a deMorganových zákonov a iných múdrych vzorčekov.

Príklad: Funkcia f je daná výrazom f(s,t,u,v) = st+(uv)' . Nájdite UNDF a UNKF funkcie f.

Riešenie:

UNDF $st+(uv)' = st + u'+v' = st(u+u')(v+v') + u'(s+s')(t+t')(v+v') + v'(s+s')(t+t')(u+u')=$

$= stuv+stuv'+stu'v+stu'v'+$
$\cancel{stu'v}+\cancel{stu'v'}+st'u'v+st'u'v'+s'tu'v+s'tu'v'+s't'u'v+s't'u'v'+$
$\cancel{stuv'}+\cancel{stu'v'}+st'uv'+\cancel{st'u'v'}+ s'tuv'+\cancel{s'tu'v'}+s't'uv'+\cancel{s't'u'v'}$

$= stuv+stuv'+stu'v+stu'v'+st'u'v+st'u'v'+s'tu'v+s'tu'v'+s't'u'v+s't'u'v'+st'uv'+s'tuv'+ s't'uv'$

UNKF $st+(uv)' = (s+(uv)')\,(t+(uv)') = (s+u'+v')\,(t+u'+v') = (s+u'+v'+tt')\,(t+u'+v'+ss') =$

$= (s+u'+v'+t)\,(s+u'+v'+t')\,(t+u'+v'+s)\,(t+u'+v'+s')$

$= (s+t+u'+v')\,(s+t'+u'+v')\,(s+t+u'+v')\,(s'+t+u'+v')$

Neriešené príklady 3:

Vyjadrite v tvare UNDF a UNKF nasledujúce výrazy:

a) 0
b) 1
c) $x+y$
d) $x(y+z')$
e) $x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$
f) $x \Rightarrow (y \Rightarrow x)$
g) $x \oplus (y \Rightarrow z)$
h) $(x'y \oplus z)(xz \Rightarrow y)$
i) $(xy' \oplus yz') \oplus x'z$

Návod: Najprv výraz prepíšte len pomocou +,*, negácie. Potom upravujte na úplný tvar.

Pomôcka (dokážte jej správnosť):

$(x \Rightarrow y) = x'+y$